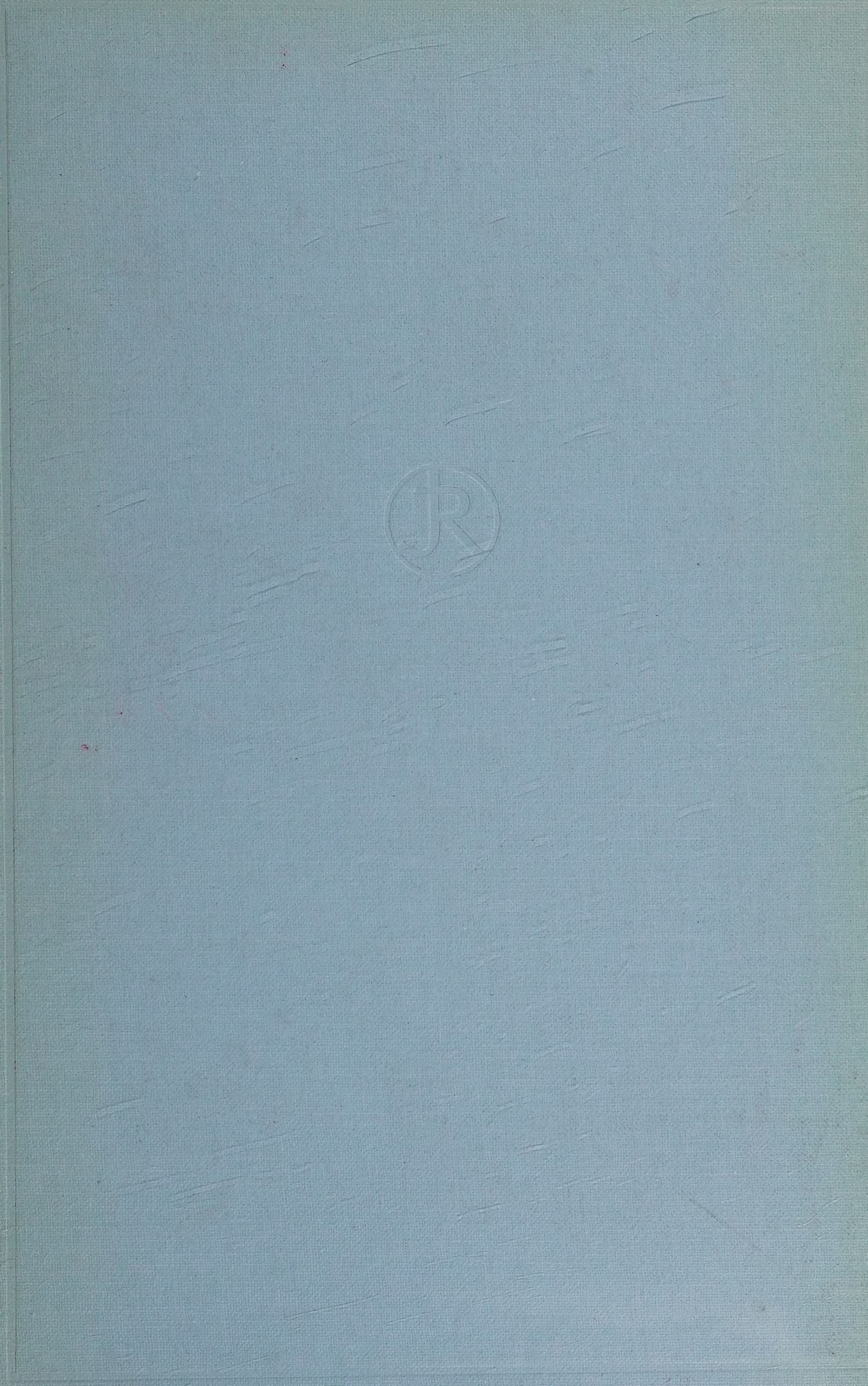




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 12

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ★ 1948

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 3–14

Я. Л. ГЕРОНИМУС

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Рассматривается связь между весом ортогональных на окружности полиномов и последовательностью параметров Шура.

Введение

В общей теории ортогональных полиномов весьма важную роль играют их асимптотические свойства; поведение ортогонального полинома при безграничном возрастании показателя его степени решает вопрос о сходимости многих бесконечных процессов: интерполяционного, квадратурного, аппроксимационного и т. п.

Мы рассматриваем систему полиномов $\{P_n(z)\}_0^\infty$, ортогональную на окружности $|z|=1$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(z)\,\overline{P_m(z)}\,d\sigma(\theta)=\begin{cases} 0, & \text{если } n\neq m,\\ h_n>0, & \text{если } n=m,\end{cases} \tag{1}$$

$$(z=e^{i\theta},\quad P_n(z)=z^n+\ldots),$$

где $\sigma(\theta)$ — ограниченная неубывающая функция с бесчисленным множеством точек роста в $[0, 2\pi]$; эти полиномы интересны и сами по себе, и благодаря своей связи с функциями типа Carathéodory и Schur'а и, наконец, от них весьма легко перейти к полиномам, ортогональным на отрезке, как показал G. Szegö [см. ([2]) и ([4])].

Хорошо известно, что функция $\sigma(\theta)$, как всякая функция ограниченной вариации, может быть представлена в виде суммы трех функций:

$$\sigma(\theta)=\sigma_1(\theta)+\sigma_2(\theta)+\sigma_3(\theta), \tag{2}$$

где $\sigma_1(\theta)$ — функция скачков, $\sigma_2(\theta)$ — сингулярная функция, имеющая положительную вариацию на множестве меры нуль, и, наконец, $\sigma_3(\theta)$ — ядро функции $\sigma(\theta)$, т. е. абсолютно непрерывная функция

$$\sigma_3(\theta) = \int_0^\theta p(\varphi)\, d\varphi \qquad (p(\varphi) \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi). \tag{3}$$

Полагая $\sigma_1(\theta) = \sigma_2(\theta) \equiv 0$ и налагая на вес $p(\theta)$ некоторые ограничения, G. Szegö и С. Н. Бернштейн получили некоторые достаточные условия для справедливости асимптотических формул.

ТЕОРЕМА I. [G. Szegö (2), (3)]. *Если существует интеграл Лебега*

$$\int_0^{2\pi} \log p(\theta)\, d\theta, \tag{4}$$

то при $|z| < 1$ *справедлива асимптотическая формула*

$$\hat{P}_n^*(z) = \frac{P_n^*(z)}{\sqrt{h_n}} = \pi(z) + \varepsilon_n, \qquad P_n^*(z) = z^n \overline{P}_n\left(\frac{1}{z}\right), \tag{5}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ (*равномерно при* $|z| \leqslant r < 1$), $\pi(z)$ — *аналитическая функция, регулярная и неравная нулю при* $|z| < 1$, *причем почти всюду в* $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0} \pi(re^{i\theta}) = \pi(e^{i\theta}), \qquad p(\theta) = \frac{1}{|\pi(e^{i\theta})|^2}. \tag{6}$$

При более ограничительных условиях, наложенных на функцию $p(\theta)$, асимптотическая формула (5) справедлива и на окружности $|z| = 1$, как это показывает

ТЕОРЕМА II. [С. Н. Бернштейн (5), G. Szegö (4)]. *Если вес* $p(\theta)$ *положителен при* $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ *и удовлетворяет условию Dini-Lipschitz'а*

$$|p(\theta + \delta) - p(\theta)| < L\,|\log \delta|^{-1-\alpha} \qquad (\alpha, L > 0), \tag{7}$$

то в замкнутой области $|z| \leqslant 1$ *справедлива асимптотическая формула* (5), *причем*

$$|\varepsilon_n| < C(\log n)^{-\alpha}, \qquad |z| \leqslant 1. \tag{8}$$

Настоящая работа имеет целью вывод асимптотических формул без наложения ограничения $\sigma_1(\theta) = \sigma_2(\theta) \equiv 0$; мы будем исходить не из веса, а из последовательности $\{a_n\}_0^\infty$ коэффициентов рекуррентного соотношения

$$P_{n+1}(z) = z\, P_n(z) - \bar{a}_n P_n^*(z) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

которые подчинены единственному ограничительному условию

$$|a_n| < 1 \ \ (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Мы выразим через них условия, необходимые и достаточные для справедливости асимптотической формулы (5) в области $|z| < 1$, или в замкнутой области $|z| \leqslant 1$, а также покажем связь порядка их убывания с дифференциальными свойствами веса $p(\theta)$.

§ 1

Сформулируем сперва некоторые результаты, полученные нами ранее.

ТЕОРЕМА 1. 1 [(6), (7)]. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *сходимость числового ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty; \tag{1.1}$$

2) *справедливость асимптотической формулы*

$$\lim_{n_\nu \to \infty} \hat{P}^*_{n_\nu}(z) = \pi(z) \tag{1.2}$$

хоть в одной точке области $|z| < 1$ *и хоть для одной бесконечной подпоследовательности* $\{n_\nu\}$;

3) *существование интеграла Лебега*

$$\int_0^{2\pi} \log p(\theta)\, d\theta, \tag{1.3}$$

где $p(\theta)$ — *существующая почти всюду производная* $p(\theta) = \sigma'(\theta)$ *.

Таким образом, функции $\sigma_1(\theta)$ и $\sigma_2(\theta)$ не влияют на справедливость асимптотической формулы (1.2) для ортогональных полиномов; играет роль только ядро. В частности, добавляя к обложению $d\sigma(\theta)$ любое количество концентрированных масс, мы не изменим функции $\pi(z)$, а следовательно, и главного члена асимптотической формулы (1.2).

ТЕОРЕМА 1. 2(1). *Сходимость числового ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty \tag{1.4}$$

достаточна для справедливости асимптотической формулы (5) *в замкнутой области* $|z| \leqslant 1$ *с оценкой погрешности* **

$$|\varepsilon_n| \leqslant C_1 \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|, \quad |z| \leqslant 1; \tag{1.5}$$

при этом функция $\sigma(\theta)$ *абсолютно непрерывна и вес*

$$p(\theta) = \frac{1}{|\pi(e^{i\theta})|^2}$$

положителен и непрерывен в $[0, 2\pi]$, *причем равномерно выполняется* (6).

---

* Как показали А. Колмогоров (8), М. Крейн (9) и Н. Ахиезер (13), утверждение 3) эквивалентно неполноте ортогональной системы $\{P_n(z)\}_0^\infty$ [см. также S. Verblunsky (11), G. Szegö (12)].

** Через C_1, C_2 и т. д. обозначены различные константы, не зависящие от n.

Примечание 1. 1. Простой пример показывает, что условие (1.4) нельзя заменить более слабым условием

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^{1+\alpha} < \infty \quad (0 < \alpha < 1) \tag{1.6}$$

и нельзя заменить условной сходимостью ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$; действительно, если

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n+\alpha} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \ \alpha > 1), \tag{1.7}$$

то оба эти условия выполняются; вместе с тем в этом случае мы имеем ([1])

$$P_n^*(-z) = 1 - \frac{z\,(z^n - 1)}{(n+\alpha-1)\,(z-1)}, \quad h_n = h_0 \frac{\alpha-1}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha}{n+\alpha-1}, \tag{1.8}$$

откуда ясно, что для $|z| \leqslant 1, z \neq -1$

$$\lim_{n\to\infty} \hat{P}_n^*(-z) = \sqrt{\frac{\alpha}{h_0(\alpha-1)}}; \tag{1.9}$$

в то же время

$$\lim_{n\to\infty} \hat{P}_n^*(-1) = 0. \tag{1.9'}$$

§ 2

Перейдем теперь к выводу условий, необходимых и достаточных для того, чтобы была справедлива асимптотическая формула (5), где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ равномерно при $|z| \leqslant 1$.

Введем следующие обозначения:

$$\lambda_k = a_k z^{k+1}, \quad \Omega_{ns} = \Omega_{ns}^{(0)} = \bar{\lambda}_s \sum_{k=n}^{s} \lambda_k, \quad \Omega_{ns} = 0, \quad s < n;$$
$$\Omega_{ns}^{(k)} = \sum_{r=n}^{s} \Omega_{nr}^{(k-1)} \Omega_{rs} \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{2.1}$$

ТЕОРЕМА 2. 1. *Для справедливости асимптотической формулы*

$$\hat{P}_n^*(z) = \pi(z) + \varepsilon_n \quad (|z| \leqslant 1), \tag{2.2}$$

*где $\pi(z)$ — аналитическая функция, регулярная при $|z| < 1$ и непрерывная при $|z| \leqslant 1$, а $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ (равномерно на окружности $|z| = 1$), необходимо и достаточно условие**

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \overline{\pi(z)} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} \Omega_{ns}^{(k)} \left[\pi(z) + \overline{\pi(z)} \sum_{i=s}^{\infty} \lambda_i \right] \right\} = 0, \quad |z| = 1; \tag{2.3}$$

* Во всех дальнейших условиях сходимость на окружности $|z| = 1$ предполагается равномерной.

более простые достаточные условия (в предположении, что функция $\pi(z)$ ограничена в круге $|z| \leqslant 1$):

сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ на окружности $|z|=1$ и существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} |\Omega_{ns}^{(k)}| = 0, \quad |z|=1; \tag{2.4}$$

еще более простые достаточные условия:

сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ на окружности $|z|=1$ и существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=0}^{\infty} |a_{n+s}| \cdot |a_n + a_{n+1} z + \ldots + a_{n+s} z^s| = 0, \quad |z|=1. \tag{2.5}$$

По теореме (1.1), справедливость (2.2) при $|z|<1$ эквивалентна сходимости бесконечного произведения

$$h_n = h_0 \prod_{k=0}^{\infty} (1-|a_k|^2), \tag{2.6}$$

где, по ([1]),

$$h_n = h_0 \prod_{k=0}^{n-1} (1-|a_k|^2); \tag{2.7}$$

поэтому

$$\lim_{n\to\infty} P_n^*(z) = \lim \{\sqrt{h_n}\, \hat{P}_n^*(z)\} = \sqrt{h}\, \pi(z).$$

Мы находим из (9)

$$P_n^*(z) = 1 - z \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k(z) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \overline{P}_k^* \left(\frac{1}{z}\right); \tag{2.8}$$

отсюда при $|z|=1$ имеем

$$P_n^*(z) = \sqrt{h}\, \pi(z) + \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \overline{P_k^*(z)} =$$

$$= \sqrt{h}\, \pi(z) + \sqrt{h}\, \overline{\pi(z)} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k + \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \lambda_k \overline{\lambda}_i P_i^*(z); \tag{2.9}$$

пользуясь обозначениями (2.1), находим

$$P_n^*(z) = \mu_n + \sum_{s=n}^{\infty} \Omega_{ns} P_s^*(z), \quad \mu_n = \sqrt{h} \left[\pi(z) + \overline{\pi(z)} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \right]; \tag{2.10}$$

итерируя этот процесс, получим

$$P_n^*(z) = \mu_n + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} \Omega_{ns}^{(k)} \mu_s.$$

Отсюда

$$\varepsilon_n' = P_n^*(z) - \sqrt{h}\,\pi(z) = \sqrt{h}\left\{\overline{\pi(z)} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} \Omega_{ns}^{(k)} \left[\pi(z) + \overline{\pi(z)} \sum_{k=s}^{\infty} \lambda_k\right]\right\}. \qquad (2.11)$$

Так как пределы последовательностей $\{\varepsilon_n\}$ и $\{\varepsilon_n'\}$ существуют одновременно, то отсюда вытекает необходимость и достаточность условия (2.3).

Для выполнения (2.11) достаточны условия

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} |\Omega_{ns}^{(k)}| = 0.$$

Если выполняется условие (2.5), то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{s=n}^{\infty} |\lambda_s| \cdot \left|\sum_{k=n}^{s} \lambda_k\right| = 0, \qquad (2.12)$$

т. е., задавая сколь угодно малое положительное ε, можно найти такое n_0, чтобы для всех $n \geqslant n_0$ иметь

$$\sum_{s=n}^{\infty} |\Omega_{ns}| = \sum_{s=n}^{\infty} |\lambda_s| \cdot \left|\sum_{k=n}^{s} \lambda_k\right| < \varepsilon. \qquad (2.13)$$

Если допустить, что для $k = 1, 2, \ldots, m$ имеем

$$\sum_{s=n}^{s} |\Omega_{ns}^{(k-1)}| < \varepsilon^k \quad (n \geqslant n_0), \qquad (2.14)$$

то, по (2.1), найдем

$$\sum_{r=n}^{\infty} |\Omega_{nr}^{(m)}| = \sum_{r=n}^{\infty} \left|\sum_{s=n}^{r} \Omega_{ns}^{(m-1)} \Omega_{sr}\right| \leqslant \sum_{r=n}^{\infty} \sum_{s=n}^{r} |\Omega_{ns}^{(m-1)}| \cdot |\Omega_{sr}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{s=n}^{\infty} |\Omega_{ns}^{(m-1)}| \sum_{r=s}^{\infty} |\Omega_{sr}| < \varepsilon \sum_{s=n}^{\infty} |\Omega_{ns}^{(m-1)}| < \varepsilon^{m+1};$$

таким образом, условие (2.5) влечет за собой условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=n}^{\infty} |\Omega_{ns}^{(k)}| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \qquad (2.15)$$

т. е. условие (2.4).

Примечание 2.1. Налагая некоторые ограничения на ε_n, можно получить некоторые необходимые условия, которым должны удовлетворять числа $\{a_n\}_0^\infty$ для справедливости асимптотической формулы (5) в замкнутой области $|z| \leqslant 1$, именно: в тех точках окружности $|z|=1$, где $\pi(z) \neq 0$:

1) сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n|^2$ влечет за собой сходимость степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$;

2) если хоть в одной точке окружности $|z|=1$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}| < \infty, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0, \tag{2.16}$$

то степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ абсолютно сходится на окружности $|z|=1$. Действительно, по (2.9),

$$\sqrt{h}\,|\pi(z)| \cdot \left|\sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k\right| = \left|\varepsilon'_n - \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \bar{\varepsilon}'_k\right| \leqslant |\varepsilon'_n| + \sqrt{\sum_{k=n}^{\infty} |\lambda_k|^2 \cdot \sum_{k=n}^{\infty} |\varepsilon'_k|^2},$$

откуда вытекает 1); далее, мы имеем

$$\lambda_n = a_n z^{n+1} = \frac{\varepsilon'_n - \varepsilon'_{n+1}}{\sqrt{h}\,\overline{\pi(z)} + \varepsilon'_n}, \qquad |a_n| \leqslant C\,|\varepsilon'_n - \varepsilon'_{n+1}|, \tag{2.17}$$

откуда вытекает 2).

§ 3

Покажем теперь, как по характеру убывания параметров $\{a_n\}_0^\infty$ сделать заключение о дифференциальных свойствах функции $p(\theta)$.

ТЕОРЕМА 3.1. *Если для достаточно больших значений n выполняются неравенства*

$$|a_n| \leqslant \frac{\varphi(\log n)}{n^{r+\alpha+1}} \qquad (0 < \alpha < 1), \tag{3.1}$$

где r — положительное целое число, а функция $\varphi(x)$ для достаточно больших значений аргумента положительна и убывает, причем существует интеграл

$$\varphi_2(x) = \int_x^\infty dy \int_y^\infty \varphi(z)\, dz, \tag{3.2}$$

то функция $p(\theta)$ имеет непрерывную производную r-го порядка с модулем непрерывности

$$\omega(\delta; p^{(r)}) \leqslant C_1 \varphi_2(|\log \delta|)\, \delta^\alpha; \tag{3.3}$$

обратно, если функция $p(\theta)$ имеет непрерывную производную r-го порядка, то

$$|a_n| \leqslant C \frac{\log n}{n^r} \omega\left(\frac{1}{n}; p^{(r)}\right), \quad C = \text{const.} \tag{3.4}$$

Мы имеем, по (1.5),

$$|\varepsilon_n| \leqslant C_2 \sum_{k=n}^{\infty} |a_k| \leqslant C_2 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\varphi(\log k)}{k^{r+\alpha+1}} < C_3 \int_n^{\infty} \frac{\varphi(\log x)\, dx}{x^{r+\alpha+1}} <$$

$$< \frac{C_3}{n^{r+\alpha}} \int_n^{\infty} \frac{\varphi(\log x)\, dx}{x} = \frac{C_3 \varphi_1(\log n)}{n^{r+\alpha}}, \quad \varphi_1(y) = \int_y^{\infty} \varphi(z)\, dz; \tag{3.5}$$

следовательно, при $z = e^{i\theta}$

$$|\pi(z) - \hat{P}_n^*(z)| \leqslant |\varepsilon_n| \leqslant \frac{C_3 \varphi_1(\log n)}{n^{r+\alpha}}; \tag{3.6}$$

но так как

$$[|\pi(z)|^2 - |\hat{P}_n^*(z)|^2| \leqslant |[\pi(z)]^2 - [\hat{P}_n^*(z)]^2] = |\pi(z) - \hat{P}_n^*(z)| \cdot |\pi(z) + \hat{P}_n^*(z)| \leqslant$$

$$\leqslant C_4 |\pi(z) - \hat{P}_s^*(z)| \leqslant \frac{C_5 \varphi_1(\log n)}{n^{r+\alpha}}, \quad z = e^{i\theta}, \tag{3.7}$$

то периодическая функция $F(\theta) = |\pi(e^{i\theta})|^2$ допускает приближение при помощи тригонометрического полинома $|\hat{P}_n^*(e^{i\theta})^2|$ порядка n с погрешностью, не превышающей

$$\frac{C_5 \varphi_1(\log n)}{n^{r+\alpha}}. \tag{3.8}$$

Но тогда по теореме De la Vallée-Poussin'a (10) функция $F(\theta)$ имеет производную r-го порядка с модулем непрерывности $\omega(\delta; F^{(r)})$, удовлетворяющим неравенству

$$\omega(\delta; F^{(r)}) \leqslant C_5 \int_{\frac{1}{\delta}}^{\infty} \frac{\varphi_1(\log x)\, dx}{x^{\alpha+1}} \leqslant C_5 \delta^{\alpha} \int_{|\log \delta|}^{\infty} \varphi_1(y)\, dy =$$

$$= C_5 \delta^{\alpha} \varphi_2(|\log \delta|). \tag{3.9}$$

По теореме 1.2, имеем

$$\sigma'(\theta) = p(\theta) = \frac{1}{|\pi(e^{i\theta})|^2} = \frac{1}{F(\theta)}; \tag{3.10}$$

так как $F(\theta) > 0$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, то из существования $F^{(r)}(\theta)$ вытекает существование $p^{(r)}(\theta)$.

Из соотношения $p(\theta) F(\theta) = 1$ легко находим для $s = 1, 2, \ldots, r$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{s} \binom{s}{\nu} \{p^{(\nu)}(\theta+\delta) \Delta F^{(s-\nu)}(\theta) + F^{(s-\nu)}(\theta) \Delta p^{(\nu)}(\theta)\} = 0, \\ &\Delta f(\theta) = f(\theta+\delta) - f(\theta), \end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

откуда методом математической индукции выводим

$$\omega(\delta;\ p^{(r)}) \leqslant C_6 \omega(\delta;\ F^{(r)})\,[1+O(\delta)]; \tag{3.12}$$

благодаря (3.10), получаем (3.3).

Для доказательства обратного утверждения достаточно почти дословно повторить рассуждения G. Szegö (4); из условия

$$\omega(\delta;\ p) < C_7 \,|\log\delta\,|^{-1-\alpha}, \quad \alpha > 0, \tag{3.13}$$

вытекает возможность построения тригонометрического полинома $|h(e^{i\theta})|^2$ порядка n, осуществляющего приближение

$$\left|\frac{1}{p(\theta)} - |h(e^{i\theta})|^2\right| < C_8 \,|\log n\,|^{-1-\alpha}. \tag{3.14}$$

G. Szegö показывает [(4), § 10.3.3], что отсюда вытекает неравенство

$$|\pi(z) - h(z)| < C_9 (\log n)^{-\alpha} \qquad (|z| \leqslant 1)$$

и что из (3.14) вытекает асимптотическая формула (2.2) с оценкой погрешности

$$|\varepsilon_n| < C_{10} (\log n)^{-\alpha} \tag{3.15}$$

(см. (4), § 12.4). В нашем случае из существования производной $p^{(r)}(\theta)$ с модулем непрерывности $\omega(\delta;\ p^{(r)})$ вытекает возможность построения тригонометрического полинома $|h(e^{i\theta})|^2$ порядка n, для которого

$$\left|\frac{1}{p(\theta)} - |h(e^{i\theta})|^2\right| < \frac{C_{11}\,\omega\left(\frac{1}{n};\ p^{(r)}\right)}{n^r}. \tag{3.16}$$

Незначительно обобщая метод G. Szegö [(4), § 10.3.3], мы показываем, что отсюда вытекает неравенство

$$|\pi(z) - h(z)| < \frac{C_{12}\,\omega\left(\frac{1}{n};\ p^{(r)}\right)}{n^r} \log n, \tag{3.17}$$

и, наконец, аналогично § 12.4, находим оценку

$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{C_{13}\,\omega\left(\frac{1}{n};\ p^{(r)}\right)}{n^r} \log n. \tag{3.18}$$

Мы имеем, по (2.9),

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |P_n^*(z) - \sqrt{h}\,\pi(z)|^2\, d\sigma(\theta) = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k|^2 h_k \leqslant |\varepsilon_n'|^2 \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\sigma(\theta),$$

откуда находим

$$|a_n| < \frac{C_{14}\,\omega\left(\frac{1}{n};\ p^{(r)}\right)\log n}{n^r}. \tag{3.19}$$

§ 4

В приводимой ниже таблице рассмотрены некоторые частные случаи и указаны порядки $|a_n|$, необходимые и достаточные для того, чтобы вес $p(\theta)$ обладал теми или иными свойствами.

№	Характер веса $p(\theta)$	Необходимый порядок $\lvert a_n \rvert$	Достаточный порядок $\lvert a_n \rvert$
1	$\omega(\delta;\ p^{(r)}) \leqslant C\delta^{\alpha}, \quad 0<\alpha<1$	$\dfrac{\log n}{n^{r+\alpha}}$	$\dfrac{1}{n^{r+\alpha+1}}$
2	$\omega(\delta;\ p^{(r)}) \leqslant C\delta \lvert \log\delta \rvert$	$\dfrac{\log^2 n}{n^{r+1}}$	$\dfrac{1}{n^{r+2}}$
3	$\omega(\delta;\ p^{(r)}) \leqslant C \lvert \log\delta \rvert^{-1-\alpha}, \quad \alpha>0$	$\dfrac{1}{n^r (\log n)^{\alpha}}$	$\dfrac{1}{n^{r+1} (\log n)^{\alpha+3}}$
4	$p(w)$ — аналитическая функция от $w=u+iv$, мероморфная в замкнутой области $\lvert v \rvert \leqslant \lvert \log\lambda \rvert$, $\lambda<1$, не равная нулю внутри области и имеющая на границе области нули порядка $\leqslant r$.	$n^{r-1}\lambda^n \log n$	$n^{r-1}\lambda^n$
5	Функция $p(w)$ мероморфна и не равна нулю в области $\lvert v \rvert < \lvert \log\lambda \rvert$, $\lambda<1$.	$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} \leqslant \lambda$	$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} \leqslant \lambda$

Так как случаи 1—4 вытекают из теоремы 3.1, то мы остановимся на случае 5. Имеет место

ТЕОРЕМА 4.1. *Для справедливости асимптотической формулы*

$$\hat{P}_n^*(z) = \pi(z) + \varepsilon_n \tag{4.1}$$

в области $|z| < \frac{1}{\lambda}$, $\lambda < 1$, *необходимо и достаточно условие*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \lambda. \tag{4.2}$$

Действительно, из этого условия вытекает (1.1) и справедливость (4.1) для $|z| < 1$; следовательно, при $|z| < \frac{1}{\lambda}$ имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|\,|P_n(z)|} =$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|z|^n \cdot \left|\bar{\pi}\left(\frac{1}{z}\right) + \bar{\varepsilon}_n'\right|} \leqslant |z|\,\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} < 1; \tag{4.3}$$

таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n P_n(z)$ равномерно сходится при $|z| \leqslant r < \frac{1}{\lambda}$ и поэтому из (2.8) вытекает справедливость асимптотической формулы (4.1) для $|z| < \frac{1}{\lambda}$.

Обратно, из справедливости (4.1) при $|z| < \frac{1}{\lambda}$ вытекает

$$|z| \cdot |\sqrt[n]{a_n}| \cdot \sqrt[n]{\left|\bar{\pi}\left(\frac{1}{z}\right) + \bar{\varepsilon}'_n\right|} \leqslant 1,$$

ибо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(z)$ сходится для $|z| < \frac{1}{\lambda}$; так как аналитическая функция $\bar{\pi}\left(\frac{1}{z}\right)$ не равна нулю для $1 < |z| < \frac{1}{\lambda}$, то мы имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \frac{1}{|z|}, \quad |z| < \frac{1}{\lambda},$$

откуда вытекает (4.2).

Примечание 4.1. При условиях теоремы 4.1 аналитическая функция

$$f(z) = \pi(z)\,\bar{\pi}\left(\frac{1}{z}\right) \tag{4.4}$$

регулярна в кольцевой области $\lambda < |z| < \frac{1}{\lambda}$, причем при $z = e^{i\theta}$ она совпадает с функцией $F(\theta) = \frac{1}{p(\theta)}$. Вводя

$$w = u + iv = \frac{1}{i}\log z, \tag{4.5}$$

мы получаем функцию $f(e^{iw})$, регулярную в области $|v| < |\log\lambda|$ и совпадающую на вещественной оси плоскости w с функцией

$$\frac{1}{p(w)} = \pi(e^{iw})\,\bar{\pi}(e^{-iw})$$

таким образом, функция $p(w)$ мероморфна и не равна нулю в области $|v| < |\log\lambda|$.

Поступило
15.1.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Геронимус Я. Л., О полиномах, ортогональных на круге, о тригонометрической проблеме моментов и об ассоциированных с нею функциях типа Carathéodory и Schur'a, Матем. сборник, т. 15 (1944), 99—130.

[2] Szegö G., Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, Math. Annalen, t. 82 (1921), 188—212.

[3] Szegö G., Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen, II, Math. Zeitschrift, t. 9 (1921), 167—190.

[4] Szegö G., Orthogonal polynomials, New York, 1939.

[5] Бернштейн С. Н., О многочленах, ортогональных в конечном интервале, Харьков, 1937.

[6] Геронимус Я. Л., Полиномы, ортогональные на круге, и их применения, Сообщ. Харьк. Матем. об-ва, 19 (1948), 35.

[7] Geronimus J., On the trigonometric moment-problem, Annals of Mathem., vol. 47, N 4(1946), 742—761.

[8] Колмогоров А. Н., Стационарные последовательности в гильбертовом пространстве, Бюлл. МГУ, 2 (1941), № 6.
[9] Крейн М. Г., Об одном обобщении исследований G. Szegö, В. И. Смирнова и А. Н. Колмогорова, Доклады Ак. Наук СССР, XLVI (1945), 95—98.
[10] De la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919.
[11] Verblunsky S., On positive harmonic functions, Proc. of the London Math. Soc., 40 (1935), 230—320.
[12] Szegö G., Remarks on a note of Mr. R. Wilson and on related subjects, Bull. of the American Math. Soc., 46 (1940), 852—858.
[13] Ахиезер Н. И., Об одном предложении А. Н. Колмогорова и одном предложении М. Г. Крейна, Доклады Ак. Наук СССР, т. 50 (1945), 35—39.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 15—30

М. К. ГАВУРИН

О ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ОТ МНОГОЧЛЕНА

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Вносятся некоторые уточнения в результат С. Н. Бернштейна, опубликованный в его статье (²). Устанавливается, что непрерывная функция $A(x)$, для которой уравнение

$$\sum_{i=0}^{k} \varphi_i(x)\, y^{(k-i)}(x) = A(x)$$

($\varphi_i(x)$ непрерывны, $|\varphi_0(x)| + |\varphi_1(x)| > 0$) имеет регулярное в смысле С. Н. Бернштейна решение $Y(x)$, не всегда может быть равномерно приближена функциями вида

$$\sum_{i=0}^{k} \varphi_i(x)\, P^{(k-i)}(x),$$

где $P(x)$ — алгебраический полином. Для того чтобы такое приближение было возможно, необходимо и достаточно, чтобы $Y(x)$ удовлетворяло некоторым дополнительным условиям.

1. Настоящая работа посвящена вопросу, рассматривавшемуся С. Н. Бернштейном в статье (²), носящей то же название, что и предлагаемая.

Объектом изучения служат линейные дифференциальные операторы

$$D_k(Y(x)) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(x)\, Y^{(k-i)}(x), \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1.1}$$

где коэффициенты $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, k)$ предполагаются непрерывными функциями.

Класс рассматриваемых операторов (1.1) ограничен условием

$$|\varphi_0(x)| + |\varphi_1(x)| > 0 \qquad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1.2}$$

которое во всем дальнейшем считается выполненным.

Через E обозначается множество нулей функции $\varphi_0(x)$, через $\overline{E}$ — множество $[a, b] - E$.

Функция $Y(x)$, определенная в $[a, b]$, называется регулярным решением уравнения

$$D_k(Y(x)) = A(x), \tag{1.3}$$

где $A(x)$ — заданная непрерывная функция, если:

1° $Y(x), \ldots, Y^{(k-1)}(x)$ определены и непрерывны в $[a, b]$;

2° $Y^{(k)}(x)$ определена и непрерывна на множестве $\overline{E}$;

3° равенство (1.3) соблюдено во всех точках $x \in \overline{E}$;

4° во всех точках $x \in E$ соблюдено равенство

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) Y^{(k-i)}(x) = A(x).$$

Проблема, изучавшаяся С. Н. Бернштейном, заключается в нахождении условий, при которых система «D_k-полиномов» $D_k(P(x))$, где $P(x)$ пробегает множество всех алгебраических полиномов, будет везде плотной в пространстве (C) непрерывных функций, т. е. условий, при которых любая непрерывная в $[a, b]$ функция $A(x)$ может быть с произвольной точностью равномерно приближена D_k-полиномами.

С. Н. Бернштейн высказывает (в несколько иных терминах) следующую теорему:

(α) *Для того чтобы система D_k-полиномов была везде плотной в (C), необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (1.3) *имело регулярное решение для любой непрерывной функции $A(x)$.*

В ходе доказательства выдвигаются более сильные утверждения:

(β) *Если $A_0(x)$ — данная непрерывная функция и уравнение*

$$D_k(Y(x)) = A_0(x) \tag{1.4}$$

имеет регулярное решение, то $A_0(x)$ может быть равномерно приближена с любой точностью D_k-полиномами.

(γ) *Если данная непрерывная функция $A_0(x)$ может быть равномерно приближена с любой точностью D_k-полиномами, то уравнение* (1.4) *имеет регулярное решение $Y(x)$, причем существует последовательность полиномов $P_n(x)$ такая, что равномерно в $[a, b]$*

$$\left.\begin{array}{l} P_n^{(k-i)}(x) \to Y^{(k-i)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k), \\ D_k(P_n(x)) \to A_0(x). \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

Автором установлено, что утверждение (β) неверно (п. 2) и потому теорема (α) в части достаточности, получающейся у С. Н. Бернштейна как простое следствие (β), требует нового доказательства, которое и проводится в п. 4 *.

---

* С. Н. Бернштейн, которому я привел (в письме от 21 мая 1946 г.) пример, опровергающий его утверждение (β), сообщив ему в то же время, что мне удалось восстановить соответствующую часть теоремы (α) с помощью результатов главы 2 его работы ([2]), отнесся с большим интересом к моему сообщению. В своем письме (от 20 августа 1946 г.) он сообщил также, что доказательство утверждения (β) исправлено им при ограничительном предположении, что $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ и $A_0(x)$ абсолютно непрерывны вдоль множества граничных точек E и $\overline{E}$. Из этой суженной формулировки утверждения (β) (которая близка к моей теореме 2 на стр. 26), как отмечает там же С. Н. Бернштейн, вытекает непосредственно доказательство достаточности условий теоремы (α) при вышеупомянутых ограничительных предположениях относительно $\varphi_i(x)$, которые, в частности, соблюдаются, если граница E конечна.

В п. 2 устанавливаются также необходимые и достаточные дополнительные условия, при добавлении которых теорема (β) становится справедливой.

В п. 3 приводятся некоторые условия, более легко проверяемые, чем найденные в п. 2, добавление которых достаточно, чтобы сделать справедливой теорему (β).

2. Будем для краткости обозначать класс непрерывных функций, допускающих произвольно точное равномерное приближение D_k-полиномами, символом $\Gamma(D_k)$.

Будем также говорить, что функция $Y(x)$ удовлетворяет условию $C^{(k-1)}(\varphi_0)$, если $Y^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна во всяком промежутке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, для которого $\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} < \infty$ (интеграл понимается в смысле Lebesgue'a). Тогда теорему, заменяющую (β), можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы непрерывная функция $A_0(x)$ принадлежала классу $\Gamma(D_k)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (1.4) *имело хоть одно регулярное решение $Y(x)$, удовлетворяющее условию $C^{(k-1)}(\varphi_0)$.*

Доказательство необходимости. Пусть $A_0(x) \in \Gamma(D_k)$. Тогда теорема (γ) позволяет утверждать существование регулярного решения $Y(x)$ уравнения (1.4) и последовательности полиномов $P_n(x)$, для которой выполнено (1.5). Из предельных равенств (1.5) мы получаем

$$\varphi_0(x)\,[P_n^{(k)}(x) - Y^{(k)}(x)] \to 0 \text{ равномерно в } \overline{E}. \tag{2.1}$$

Пусть $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ и

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} < \infty. \tag{2.2}$$

Из (2.1) получаем для произвольного $\varepsilon > 0$ и достаточно большого n

$$|P_n^{(k)}(x) - Y^{(k)}(x)| < \varepsilon \frac{1}{|\varphi_0(x)|} \tag{2.3}$$

в точках $\overline{E}$.

Условия 3° и 4° п. 1 показывают, что функция $\varphi_0(x)\,Y^{(k)}(x)$ станет непрерывной, если положить ее равной нулю в точках E. Отсюда следует ограниченность этой функции на множестве $\overline{E}$. Тогда неравенство (2.2) показывает интегрируемость $Y^{(k)}(x)$ в промежутке $[\alpha, \beta]$. Интегрируя (2.3) по этому промежутку (множество $E \cdot [\alpha, \beta]$, где (2.3) может не иметь места, в силу (2.2), имеет меру нуль), получаем

$$\left| P_n^{(k-1)}(\beta) - P_n^{(k-1)}(\alpha) - \int\limits_{\alpha}^{\beta} Y^{(k)}(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{|\varphi_0(x)|}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$ и используя (1.5), придем к неравенству

$$\left| Y^{(k-1)}(\beta) - Y^{(k-1)}(\alpha) - \int_\alpha^\beta Y^{(k)}(x)\,dx \right| \leqslant \varepsilon \int_\alpha^\beta \frac{dx}{|\varphi_0(x)|}.$$

Конечность интеграла в правой части и произвольность ε позволяют утверждать, что

$$Y^{(k-1)}(\beta) - Y^{(k-1)}(\alpha) = \int_\alpha^\beta Y^{(k)}(x)\,dx.$$

Заменяя здесь β на любое $x \in [\alpha, \beta]$, убеждаемся в том, что $Y^{(k-1)}(x)$ является в $[\alpha, \beta]$ неопределенным интегралом от своей производной и, следовательно, абсолютно непрерывной функцией.

Теперь мы в состоянии построить пример, показывающий, что утверждение теоремы (β) не всегда имеет место.

Пример. В промежутке [0,1] строим функции $\varphi_0(x)$ и $\theta(x)$ следующим образом: $\varphi_0(x)$ есть подчиненная условию

$$\int_0^1 \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} < \infty$$

непрерывная функция, для которой множеством нулей служит совершенное множество Cantor'a E *; $\theta(x)$ — известная сингулярная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая соотношениям:

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(1) = 1, \quad \theta'(x) = 0 \text{ для } x \bar{\in} E.$$

Уравнение

$$\Delta_1(Y(x)) = \varphi_0(x) Y'(x) + Y(x) = \theta(x) \tag{2.4}$$

имеет очевидное регулярное решение

$$Y(x) = \theta(x).$$

Это решение единственно, поскольку соответствующее однородное уравнение

$$\varphi_0(x) Z'(x) + Z(x) = 0$$

имеет лишь тривиальное регулярное решение. Пусть, в самом деле, $Z(x)$ — регулярное решение этого уравнения. Так как точки 0 и 1 принадлежат E, то $Z(0) = Z(1) = 0$. Допустим, что $Z(x) \not\equiv 0$ и примем

$$\max_{[0,1]} |Z(x)| = |Z(x^*)|, \quad 0 < x^* < 1.$$

Если $x^* \in E$, то, в силу 4° п. 1, $Z(x^*) = 0$, если же $x^* \bar{\in} E$, то $Z'(x^*) = 0$ и снова $Z(x^*) = 0$, так что $Z(x) \equiv 0$.

* Например, можно положить для каждого дополнительного к E промежутка (α, β)

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} (x-\alpha)^\lambda, & \alpha < x \leqslant \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ (\beta - x)^\lambda, & \dfrac{\alpha+\beta}{2} \leqslant x < \beta \end{cases} \qquad \left(0 < \lambda < 1 - \frac{\log 2}{\log 3}\right).$$

Функция $\theta(x)$, в противоречие с теоремой (β), не принадлежит классу $\Gamma(\Delta_1)$, так как в противном случае единственное регулярное решение уравнения (2.4) $Y(x)$ должно было бы удовлетворять условию $C^{(0)}(\varphi_0)$, т. е. быть абсолютно непрерывным в промежутке $[0,1]$, где $\frac{1}{|\varphi_0(x)}$ интегрируема.

Доказательство достаточности*. Мы установим существование такой функции $Z(x)$, непрерывной в $[a, b]$ со своими производными до k-го порядка, что $D_k(Z(x))$ с любой наперед заданной точностью будет равномерно аппроксимировать $A_0(x)$. После этого достаточно будет взять в качестве $P(x)$ полином, близкий со своими производными до k-го порядка к $Z(x)$ и ее соответствующим производным, чтобы сделать разность $D_k(P(x))-A_0(x)$ малой во всем промежутке $[a, b]$.

Пусть $Y(x)$—удовлетво ее условию $C^{(\;-1)}(\varphi_0)$ регулярное решение уравнения (1.4), существование которого предположено.

Доопределим функцию $\varphi_0(x)Y^{(k)}(x)$, положив ее равной нулю в точках E, после чего она сделается непрерывной в $[a, b]$.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и разобьем промежуток $[a, b]$ на части точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ так, чтобы для любого $h=0, 1, \ldots, n-1$ колебания функций $\varphi_0(x)Y^{(k)}(x)$ и $Y^{(k-1)}(x)$ в $[x_h, x_{h+1}]$ сделались каждое меньше ε.

Положим

$$Z^{(k-1)}(x_h)=Y^{(k-1)}(x_h) \quad (h=0, 1, \ldots, n), \tag{2.5}$$

$$Z^{(k)}(x_h)=\begin{cases} Y^{(k)}(x_h), & \text{если } x_h \in E, \\ 0, & \text{если } x_h \in E. \end{cases} \tag{2.6}$$

Разобьем промежутки $[x_h, x_{h+1}]$ на три категории: 1) промежутки, содержащиеся в E, 2) промежутки, содержащиеся в $\overline{E}$, 3) промежутки, содержащие точки как E, так и $\overline{E}$.

В промежутках первой категории определим $Z^{(k)}(x)$ как произвольную функцию, лишь бы были соблюдены условия (2.6), а также условия

$$\int_{x_h}^{x_{h+1}} Z^{(k)}(x)\,dx=Z^{(k-1)}(x_{h+1})-Z^{(k-1)}(x_h)=Y^{(k-1)}(x_{h+1})-Y^{(k-1)}(x_h) \tag{2.7}$$

и

$$|Z^{(k-1)}(x)-Y^{(k-1)}(x)|<2\varepsilon, \quad x\in[x_h, x_{h+1}]. \tag{2.8}$$

Поскольку (2.6) сводится в данном случае к равенству

$$Z^{(k)}(x_h)=Z^{(k)}(x_{h+1})=0,$$

условие (2.8) будет соблюдено, если взять $Z^{(k)}(x)$ функцией постоянного знака в (x_h, x_{h+1}), удовлетворяющей (2.7), так как тогда $Z^{(k-1)}(x)$ будет

* Предлагаемое доказательство является соответствующим видоизменением доказательства утверждения (β), приведенного С. Н. Бернштейном [(2), стр. 17)].

лежать между числами $Y^{(k-1)}(x_h)$ и $Y^{(k-1)}(x_{h+1})$, от каждого из которых $Y^{(k-1)}(x)$ разнится меньше чем на ε.

В промежутках второй категории $Y^{(k)}(x)$ непрерывна, и мы просто полагаем $Z^{(k)}(x)=Y^{(k)}(x)$, причем будут автоматически соблюдены условия (2.6) — (2.8).

В промежутках $[x_h, x_{h+1}]$ третьей категории нам потребуется так определить $Z^{(k)}(x)$, чтобы были соблюдены условия (2.6) — (2.8) и, кроме того, условие

$$|\varphi_0(x)\, Z^{(k)}(x)| < \varepsilon. \tag{2.9}$$

Заметим, прежде всего, что в каждом таком промежутке есть точки E, где $\varphi_0(x)\, Y^{(k)}(x)=0$, так что во всем промежутке

$$|\varphi_0(x)\, Y^{(k)}(x)| < \varepsilon \tag{2.10}$$

и потому

$$|Y^{(k)}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{|\varphi_0(x)|}, \tag{2.11}$$

причем знак равенства имеет место лишь там, где левая и правая части обращаются в $+\infty$.

Возможны два случая:

a) $\displaystyle\int_{x_h}^{x_{h+1}} \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} < +\infty,$

откуда, согласно условиям теоремы, следует абсолютная непрерывность $Y^{(k-1)}(x)$ в $[x_h, x_{h+1}]$ и равенство

$$Y^{(k-1)}(x_{h+1}) - Y^{(k-1)}(x_h) = \int_{x_h}^{x_{h+1}} Y^{(k)}(x)\, dx.$$

Тогда, в силу (2.11),

$$|Y^{(k-1)}(x_{h+1}) - Y^{(k-1)}(x_h)| < \varepsilon \int_{x_h}^{x_{h+1}} \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} \tag{2.12}$$

(знак $<$ мы имеем право написать потому, что в (2.11) равенство имеет место лишь на множестве меры нуль).

b) $\displaystyle\int_{x_h}^{x_{h+1}} \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} = +\infty.$

В этом случае неравенство (2.12) становится тривиальным.

Обозначим

$$\theta_N(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\varphi_0(x)|} & \dfrac{1}{|\varphi_0(x)|} \leqslant N, \\ N & \dfrac{1}{|\varphi_0(x)|} > N. \end{cases}$$

По определению интеграла Lebesgue'а,

$$\int_{x_h}^{x_{h+1}} \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} = \lim_{n\to\infty} \int_{x_h}^{x_{h+1}} \theta_N(x)\, dx,$$

так что из неравенства (2.12) следует для достаточно большого N

$$|Y^{(k-1)}(x_{h+1})-Y^{(k-1)}(x_h)|<\varepsilon\int_{x_h}^{x_{h+1}}\theta_N(x)\,dx. \tag{2.13}$$

Зафиксируем N таким, чтобы соблюдалось неравенство (2.13).

Если положить

$$Z^{(k)}(x)=\lambda\theta_N(x),\quad x\in[x_h,x_{h+1}], \tag{2.14'}$$

где

$$\lambda=\frac{Y^{(k-1)}(x_{h+1})-Y^{(k-1)}(x_h)}{\int_{x_h}^{x_{h+1}}\theta_N(x)\,dx},$$

и принять во внимание, что согласно (2.5),

$$Z^{(k-1)}(x)=Y^{(k-1)}(x_h)+\int_{x_h}^{x}Z^{(k)}(x)\,dx\quad x\in[x_h,x_{h+1}],$$

то условия (2.7) и (2.8) окажутся выполненными. Условие (2.9) также будет соблюдено, так как $\lambda<\varepsilon$ и $|\varphi_0(x)\theta_N(x)|\leqslant 1$.

Условие (2.6), вообще говоря, не будет соблюдено и, чтобы ему удовлетворить, необходимо несколько видоизменить определение (2.14′), введя вместо постоянной λ непрерывную функцию $\lambda(x)$, которую можно построить следующим образом:

Примем, для определенности, что $x_h\in\overline{E}, x_{h+1}\in E$ и увеличим N настолько, чтобы соблюдалось неравенство $\frac{1}{|\varphi_0(x_h)|}\leqslant N$, из которого следует $\theta_N(x_h)=\frac{1}{|\varphi_0(x_h)|}$.

Выберем теперь функцию $\lambda(x)$ удовлетворяющей условиям:

a) $\lambda(x_h)=\frac{Y^{(k)}(x_h)}{\theta_N(x_h)}=Y^{(k)}(x_h)\,|\varphi_0(x_h)|$;

b) $\lambda(x_{h+1})=0$;

c) знак $\lambda(x)$ совпадает со знаком разности $Y^{(k-1)}(x_{h+1})-Y^{(k-1)}(x_h)$ всюду, кроме, может быть, окрестности $[x_h,x_h+\sigma]$ точки x_h, где $0<\sigma\leqslant\frac{1}{N}$;

d) $|\lambda(x)|<\varepsilon$;

e) $Y^{(k-1)}(x_{h+1})-Y^{(k-1)}(x_h)=\int_{x_h}^{x_{h+1}}\lambda(x)\,\theta_N(x)\,dx.$

Совместность условий a) — e) можно считать очевидной, если принять во внимание (2.10) и (2.13).

Если мы теперь положим

$$Z^{(k)}(x)=\lambda(x)\,\theta_N(x), \tag{2.14}$$

то a) и b) повлекут для $Z^{(k)}(x)$ выполнение условия (2.6), e) — выполнение условия (2.7), c) и d) повлекут выполнение условия (2.8), так

как для $x \in [x_h, x_h + \sigma]$ будет

$$|Z^{(k-1)}(x) - Y^{(k-1)}(x_h)| < \sigma \cdot \varepsilon N,$$

а для $x \in [x_h + \sigma, x_{h+1}]$ $Z^{(k-1)}(x)$ будет лежать между $Z^{(k-1)}(x_h + \sigma)$ и $Y^{(k-1)}(x_{h+1})$; наконец, d) повлечет выполнение условия (2.9), так как

$$|\varphi_0(x) Z^{(k)}(x)| = |\lambda(x) \theta_N(x) \varphi_0(x)| \leqslant |\lambda(x)| < \varepsilon.$$

Итак, нами построена функция $Z^{(k)}$, непрерывная, в силу (2.6), и удовлетворяющая в промежутках третьей категории условию (2.9). Функция $Z^{(k-1)}(x)$ вполне определена и непрерывна в силу условий (2.5) и (2.7), причем всюду в $[a, b]$ соблюдено условие (2.8).

Определим теперь $Z^{(k-i)}(x)$ $(i = 2, \ldots, k)$, полагая

$$Z^{(k-i)}(a) = Y^{(k-i)}(a).$$

Тогда из (2.8) следует, что всюду в $[a, b]$

$$|Y^{(k-i)}(x) - Z^{(k-i)}(x)| < M\varepsilon,$$

где M — постоянная, зависящая лишь от чисел k и $b - a$.

Оценим разность

$$r(x) = A_0(x) - \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(x) Z^{(k-i)}(x).$$

Во всех точках промежутков первой категории и в точках промежутков третьей категории, принадлежащих E,

$$A_0(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) Y^{(k-i)}(x)$$

и потому

$$|r(x)| = \left| \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) [Y^{(k-i)}(x) - Z^{(k-i)}(x)] \right| < KM\varepsilon,$$

где

$$K = \max_{[a, b]} \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x)|.$$

В точках промежутков второй категории годится та же оценка, ибо там $Z^{(k)}(x) = Y^{(k)}(x)$.

Наконец, в точках промежутков третьей категории, принадлежащих $\overline{E}$,

$$|r(x)| \leqslant |\varphi_0(x) Y^{(k)}(x)| + |\varphi_0(x) Z^{(k)}(x)| +$$
$$+ \left| \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) [Y^{(k-i)}(x) - Z^{(k-i)}(x)] \right| < 2\varepsilon + KM\varepsilon.$$

Таким образом, неравенство $|r(x)| < C\varepsilon$, где C — постоянная, зависящая лишь от порядка оператора D_k, длины промежутка $[a, b]$ и от заданных коэффициентов $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, установлено для всех $x \in [a, b]$, и теорема доказана.

3. Условия, найденные в теореме 1, являются необходимыми и достаточными, но формулируются в терминах, содержащих неиз-

вестные, вообще говоря, решения уравнения (1.4). Желательно найти условия, хотя бы только достаточные, но сформулированные в терминах заданных коэффициентов оператора D_k и приближаемой функции $A_0(x)$, в предположении лишь существования регулярного решения уравнения (1.4). Установлению таких условий и посвящен настоящий пункт.

Начнем с трех лемм, позволяющих судить о свойствах $Y^{(k-1)}(x)$ по свойствам коэффициентов D_k [$Y(x)$ — регулярное решение уравнения (1.4)] *.

ЛЕММА 1. *Если* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x), A_0(x)$ — *непрерывные функции ограниченной вариации в* $[a, b]$ *и* $Y(x)$ — *регулярное решение уравнения* (1.4), *то* $Y^{(k-1)}(x)$ *есть функция ограниченной вариации в* $[a, b]$.

Доказательство. Так как $Y^{(k-i)}(x)\,(i=2, 3, \ldots, k)$ во всяком случае являются в $[a, b]$ функциями ограниченной вариации, то такой же будет функция $A_0(x)-\sum\limits_{i=2}^{k}\varphi_i(x)\,Y^{(k-i)}(x)$ и потому, переписав уравнение (1.4) в форме

$$\varphi_0(x)\,(Y^{(k-1)}(x))'+\varphi_1(x)\,Y^{(k-1)}(x)=A_0(x)-\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(x)\,Y^{(k-i)}(x),$$

мы сведем дело к рассмотрению уравнений первого порядка.

Итак, рассматриваем уравнение

$$\varphi_0(x)\,Y'(x)+\varphi_1(x)\,Y(x)=A_0(x), \tag{3.1}$$

где $\varphi_1(x)$ и $A_0(x)$ — непрерывные функции ограниченной вариации, и предполагаем, что $Y(x)$ является его регулярным решением. Требуется установить, что $Y(x)$ есть функция ограниченной вариации.

Лемма Borel'я позволяет ограничиться установлением того факта, что для каждой точки $x_0 \in [a, b]$ найдется окрестность, в замыкании которой $Y(x)$ имеет ограниченную вариацию. Это очевидно для точек $x_0 \in \overline{E}$. Пусть $x_0 \in E$. Так как $\varphi_1(x_0) \neq 0$, то найдется окрестность x_0, в которой $|\varphi_1(x)|$ ограничена снизу положительным числом. Эта окрестность и будет искомой. Примем для простоты, что она совпадает со всем промежутком $[a, b]$.

Пусть

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b \tag{3.2}$$

— произвольное разбиение промежутка $[a, b]$ и пусть

$$S=E+\underset{x\in[a,b]}{\mathcal{E}}\{Y'(x)=0\}.$$

Как нетрудно видеть, S замкнуто.

---

* Леммы 1 и 2 не являются необходимыми для дальнейшего и приводятся здесь ввиду их непосредственной связи с содержанием пункта.

Составим соответствующую разбиению (3.2) сумму

$$B = \sum_{i=0}^{n-1} | Y(x_{i+1}) - Y(x_i) |.$$

Добавляя, в случае необходимости, в разбиение (3.2) новые точки (отчего B не уменьшится), можно добиться того, чтобы внутри промежутков (x_i, x_{i+1}), хоть один из концов которых не принадлежит $\bar{S}$, не было точек S. Тогда, если для какого-нибудь i $x_i \bar{\in} S$, то в промежутке (x_{i-1}, x_{i+1}) $Y'(x)$ непрерывна и не обращается в нуль, так что $Y(x)$ в этом промежутке монотонна. Это ведет к равенству

$$| Y(x_i) - Y(x_{i-1}) | + | Y(x_{i+1}) - Y(x_i) | = | Y(x_{i+1}) - Y(x_{i-1}) |,$$

которое показывает, что сумма B не изменится, если мы из разбиения (3.2) исключим точку x_i. Таким образом, мы можем исключить из разбиения (3.2) все точки $x_i \bar{\in} S$ за исключением, быть может, точек a и b. Так как, в силу уравнения (3.1), в точках S $Y(x) = \frac{A_0(x)}{\varphi_1(x)}$, то

$$B = | Y(x_1) - Y(a) | + \sum_{i=1}^{n-2} \left| \frac{A_0(x_{i+1})}{\varphi_1(x_{i+1})} - \frac{A_0(x_i)}{\varphi_1(x_i)} \right| +$$
$$+ | Y(b) - Y(x_{n-1}) | \leqslant 4M + \operatorname*{var}_a^b \frac{A_0(x)}{\varphi_1(x)},$$

где $M = \sup\limits_{[a,b]} | Y(x) |$. Та же оценка справедлива и для $\operatorname*{var}\limits_a^b Y(x) = \sup B$.

Прежде чем перейти к лемме 2, введем следующее определение:

Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная на множестве $D \subset [a, b]$, абсолютно непрерывна вдоль D, если для любой конечной системы неналегающих промежутков $\{(\xi_j', \xi_j'')\}$, концы которых принадлежат D, сумма

$$\sum_j | f(\xi_j'') - f(\xi_j') |$$

становится меньше наперед заданного числа $\varepsilon > 0$, если только сумма $\sum\limits_j | \xi_j'' - \xi_j' |$ достаточно мала.

ЛЕММА 2. *Если* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$, $A_0(x)$ — *непрерывные функции ограниченной вариации на* $[a, b]$, *абсолютно непрерывные вдоль* E, *и* $Y(x)$ — *регулярное решение уравнения* (1.4), *то* $Y^{(k-1)}(x)$ — *абсолютно непрерывная в* $[a, b]$ *функция.*

Доказательство сводится, как и в лемме 1, к рассмотрению уравнения первого порядка (3.1), в котором $\varphi_1(x)$ и $A_0(x)$ — функции ограниченной вариации на $[a, b]$, абсолютно непрерывные вдоль E, причем $\min\limits_{[a,b]} | \varphi_1(x) | > 0$. В таком случае и функция $\frac{A_0(x)}{\varphi_1(x)}$ будет абсолютно непрерывна вдоль E.

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\delta_1 > 0$ таково, что неравенство $\sum_j |\xi_j'' - \xi_j'| < \delta_1$ для любой конечной системы неналегающих промежутков $\{(\xi_j', \xi_j'')\}$, концы которых принадлежат E, влечет неравенство

$$\sum_j \left| \frac{A_0(\xi_j'')}{\varphi_1(\xi_j'')} - \frac{A_0(\xi_j')}{\varphi_1(\xi_j')} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу леммы 1, функция $Y(x)$ имеет в $[a, b]$ ограниченную вариацию и, следовательно, представима в форме:

$$Y(x) = g(x) + h(x),$$

где $g(x)$ абсолютно непрерывна, а $h(x)$—сингулярная функция.

Так как $Y(x)$ абсолютно непрерывна во всяком замкнутом промежутке $[\lambda, \mu]$, содержащемся в дополнительном к E промежутке (α, β), то $h(x)$ постоянна в $[\lambda, \mu]$, а следовательно, и в $[\alpha, \beta]$.

Выберем $\delta_2 > 0$ так, чтобы для любой конечной системы неналегающих промежутков $\{(\eta_i', \eta_i'')\}$, содержащихся в $[a, b]$, с суммой длин, меньшей δ_2, соблюдалось неравенство

$$\sum_i |g(\eta_i'') - g(\eta_i')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min[\delta_1, \delta_2]$ и $\{x_i', x_i''\}$—конечная система неналегающих промежутков, содержащихся в $[a, b]$, с суммой длин, меньшей δ. Обозначим

$$\sigma_i = \min E \cdot [x_i', x_i''], \quad \tau_i = \max E \cdot [x_i', x_i''],$$

если $E \cdot [x_i', x_i''] \neq 0$ и

$$\sigma_i = x_i', \quad \tau_i = x_i'',$$

если $E \cdot [x_i', x_i''] = 0$. Тогда

$$C = \sum_i |Y(x_i'') - Y(x_i')| \leqslant \sum_i |Y(\sigma_i) - Y(x_i')| +$$
$$+ \sum_i |Y(\tau_i) - Y(\sigma_i)| + \sum_i |Y(x_i'') - Y(\tau_i)|.$$

Так как σ_i и $\tau_i \in E$, то

$$Y(\sigma_i) = \frac{A_0(\sigma_i)}{\varphi_1(\sigma_i)}, \quad Y(\tau_i) = \frac{A_0(\tau_i)}{\varphi_1(\tau_i)}.$$

С другой стороны, каждый из промежутков (x_i', σ_i) и (τ_i, x_i'') (если он не пуст) лежит в одном из дополнительных к E промежутков. Поэтому

$$h(\sigma_i) - h(x_i') = h(x_i'') - h(\tau_i) = 0,$$

откуда следует

$$Y(\sigma_i) - Y(x_i') = g(\sigma_i) - g(x_i'),$$
$$Y(x_i'') - Y(\tau_i) = g(x_i'') - g(\tau_i).$$

В силу этих соотношений, имеем

$$C \leqslant \sum_i |g(\sigma_i) - g(x_i')| + \sum_i \left| \frac{A_0(\tau_i)}{\varphi_1(\tau_i)} - \frac{A_0(\sigma_i)}{\varphi_1(\sigma_i)} \right| + \sum_i |g(x_i'') - g(\tau_i)| < \varepsilon,$$

и лемма доказана.

Лемма 2 позволяет сформулировать следующее утверждение:

Для того чтобы непрерывная функция $A_0(x)$ *принадлежала* $\Gamma(D_k)$, *достаточно, чтобы коэффициенты* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ *оператора* D_k *и* $A_0(x)$ *были ограниченной вариации в* $[a, b]$ *и абсолютно непрерывны вдоль* E *и чтобы уравнение* (1.4) *имело хоть одно регулярное решение.*

Однако условия, налагаемые на функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ и $A_0(x)$, могут быть несколько ослаблены, для чего нам послужит лемма 3.

Обозначим через T совершенное ядро множества E, т. е. множество точек конденсации E.

ЛЕММА 3. *Если* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$, $A_0(x)$ *абсолютно непрерывны вдоль* T, $\int\limits_a \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} < \infty$ *и* $Y(x)$*—регулярное решение уравнения* (1.4), *то* $Y^{(k-1)}(x)$ *абсолютно непрерывна в* $[a, b]$.

Доказательство. Мы снова можем ограничиться случаем $k = 1$. Неравенство

$$|Y'(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{|\varphi_0(x)|} \quad (x \in [a, b]),$$

следующее из того, что $Y(x)$ есть регулярное решение уравнения (1.4), позволяет утверждать существование интеграла $\int\limits_a^b Y'(x)\,dx$.

Пусть (α, β) — дополнительный к T промежуток. В $[\alpha, \beta]$ имеется лишь исчислимое множество точек E и потому $Y(x)$ абсолютно непрерывна в $[\alpha, \beta]$.

Обозначим

$$g(x) = \int\limits_a^x Y'(x)\,dx, \quad h(x) = Y(x) - g(x).$$

Тогда $g(x)$ абсолютно непрерывна в $[a, b]$, а $h(x)$ постоянна в замыкании любого промежутка (α, β), смежного к T.

Завершается доказательство буквально так же, как и в лемме 2, с заменой E на T.

Обозначим через $R_+(R_-)$ множество тех точек, в любой правосторонней (левосторонней) окрестности которых $\int \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} = +\infty$, а через R — множество точек неинтегрируемости $\frac{1}{|\varphi_0(x)|}$, т. е. $R_+ + R_-$.

ТЕОРЕМА 2. *Если для любой точки множества* $T - R_+$ *существует правосторонняя, а для любой точки* $T - R_-$ *— левосторонняя окрестность, в замыкании которой функции* $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$, $A_0(x)$ *абсолютно непрерывны вдоль* T, *то каждое регулярное решение* $Y(x)$ *уравнения* (1.4) *удовлетворяет условию* $C^{(k-1)}(\varphi_0)$.

Доказательство. Пусть $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ и $\int\limits_\alpha^\beta \frac{dx}{|\varphi_0(x)|} < +\infty$. Тогда $\alpha \bar{\in} R_+$, $\beta \bar{\in} R_-$ и в (α, β) нет точек R. Для каждой точки $x_0 \in [\alpha, \beta] - T$

существует окрестность, замыкание которой лишено точек T. В такой окрестности $Y^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна. Для каждой точки $x_0 \in [\alpha, \beta] \cdot T$ существует окрестность, в замыкании которой выполнены условия леммы 3 и в ней $Y^{(k-1)}(x)$ также абсолютно непрерывна. Лемма Borel'я позволяет утверждать абсолютную непрерывность $Y^{(k-1)}(x)$ в $[\alpha, \beta]$.

Замечание. Условия теоремы во всяком случае выполнены, если граница E исчислима.

4. Для доказательства достаточности условий теоремы (α) нам потребуются еще некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 4. *Если x_0 — предельная справа точка множества E, то для достаточно малого $h > 0$ однородное уравнение*

$$D_k(Y(x)) = \sum_{i=0}^{k} \varphi_i(x)\, Y^{(k-i)}(x) = 0 \tag{4.1}$$

не имеет в промежутке $[x_0, x_0 + h]$ нетривиального регулярного решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$Y(x_0) = Y'(x_0) = \ldots = Y^{(k-2)}(x_0) = 0, \tag{4.2}$$

если только $x_0 + h \in E$.

Доказательство. Пусть $Y(x)$ — регулярное решение уравнения (4.1), удовлетворяющее условиям (4.2). В силу замкнутости E, $x_0 \in E$ и условие регулярности дает

$$\sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x_0)\, Y^{(k-i)}(x_0) = 0.$$

Так как $\varphi_1(x_0) \neq 0$, то из (4.2) вытекает, что $Y^{(k-1)}(x_0) = 0$.

Выберем $h > 0$ так, чтобы было $|\varphi_1(x_0)| > 0$ в $[x_0, x_0 + h]$, и обозначим $\lambda = \min\limits_{[x,\, x+h]} |\varphi_1(x)|$. Уменьшим, в случае необходимости, h так, чтобы было также

$$h \leqslant 1, \quad h < \frac{\lambda}{K}, \tag{4.3}$$

где $K = \max\limits_{[a,b]} \sum_{i=1}^{k} |\varphi_i(x)|$, и чтобы точка $x_0 + h$ принадлежала E. Обозначим, далее,

$$p = \max_{[x_0,\, x_0+h]} |Y^{(k-1)}(x)| = |Y^{(k-1)}(x^*)| \quad (x_0 < x^* \leqslant x_0 + h).$$

Тогда, в силу (4.2) и первого из неравенств (4.3), будет

$$|Y^{(k-2)}(x)| \leqslant ph, \ldots, |Y(x)| < ph \quad (x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h).$$

Допустим теперь, что $x^* \overline{\in} E$. Тогда $x_0 < x^* < x_0 + h$ и $Y^{(k)}(x^*) = 0$.

Поэтому в точке x^* уравнение (4.1) примет вид:

$$\varphi_1(x^*)Y^{(k-1)}(x^*)+\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(x^*)Y^{(k-1)}(x^*)=0.$$

Равенство это справедливо и в случае $x^*\in E$. Из него мы получаем

$$\lambda p\leqslant|\varphi_1(x^*)Y^{(k-1)}(x^*)|=|\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(x^*)Y^{(k-i)}(x^*)|\leqslant Kph.$$

Однако, неравенство $\lambda\leqslant Kh$ невозможно в силу (4.3) и потому $p=0$, т. е. $Y(x)\equiv 0$ в $[x_0, x_0+h]$.

С. Н. Бернштейн установил [(²), стр. 23—25], что если x_0 есть левый конец дополнительного к E промежутка и $\int\limits_{x_0}^{x_0+\alpha}\frac{dx}{|\varphi_0(x)|}$ сходится для какого-нибудь $\alpha>0$, то в достаточно малой правой окрестности точки x_0 любые начальные условия $Y^{(k-2)}(x_0), \ldots, Y(x_0)$ определяют одно и только одно регулярное решение уравнения (4.1). Этот результат вместе с леммой 4 приводят к следующей лемме:

ЛЕММА 5. *Если* $x_0\in E$ *и* $\int\limits_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha}\frac{dx}{|\varphi_0(x)|}<\infty$, *где* α — *некоторое число* >0, *то существует такое* $h_0>0$, *что для всех положительных* $h', h''\leqslant h_0$ *число* $\varkappa(x_0-h', x_0+h'')$ *линейно независимых регулярных решений уравнения* (4.1) *в промежутке* $[x_0-h', x_0+h'']$ *не превосходит* $k-1$.

ЛЕММА 6. *Если уравнение* (1.3) *имеет регулярное решение для всякой непрерывной функции* $A(x)$ *и* E *содержит более* k *точек, то*

$$\int\limits_a^b\frac{dx}{|\varphi_0(x)|}=+\infty.$$

Доказательство для случая, когда E конечно, дано С. Н. Бернштейном ((²), стр. 32—34). Его методом проводится доказательство и в общем случае.

Допустим, рассуждая от противного, что $\int\limits_a^b\frac{dx}{|\varphi_0(x)|}<\infty$ и что E (которое в этом случае нигде не плотно) содержит не менее $k+1$ точки. Тогда в промежутке $[a, b]$ содержится не менее k дополнительных к E интервалов. Выберем из них k интервалов (α_j, β_j) $(j=1, 2, \ldots, k)$ и будем считать, что они расположены слева направо в порядке возрастания номеров. Внутри каждого из них выберем меньший интервал $(\gamma_j, \delta_j): \alpha_j<\gamma_j<\delta_j<\beta_j$.

Лемма 5 позволяет утверждать, что с каждой точкой $x\in E$ можно связать такое число $h_x>0$, что, каковы бы ни были h', h'' $(0<h', h''\leqslant h_x)$, число $\varkappa(x-h', x+h'')$ линейно независимых решений однородного уравнения (4.1) в промежутке $[x-h', x+h'']$ не превосходит $k-1$. Можно считать, что ни один из интервалов (γ_j, δ_j) не пересе-

кается с интервалами $\delta_x = (x - h_x, x + h_x)$. Система интервалов δ_x покрывает множество E и по лемме Borel'я можно выбрать конечную систему $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_m}$ этих интервалов, также покрывающую E.

Отбросив часть из интервалов $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_m}$ и уменьшив надлежащим образом (с использованием того факта, что E нигде не плотно в $[a, b]$) остальные до замкнутых промежутков, мы получим конечную систему замкнутых промежутков $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, которая будет обладать следующими свойствами:

1) каждое Δ_ν содержится в одном из интервалов δ_{x_l} и содержит соответствующее x_l.

2) $\Delta_\nu \cdot \Delta_{\nu'} = 0 \ (\nu \neq \nu')$.

3) $\sum\limits_{j=1}^{k} (\gamma_j, \delta_j) \cdot \sum\limits_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu = 0$.

4) E содержится внутри $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu$.

Из 1) следует, что число $\varkappa_\nu$ линейно независимых регулярных решений уравнения (4.1) в каждом из промежутков Δ_ν не превосходит $k-1$, а из 3) и 4) следует, что $n \geqslant k+1$.

Мы построим теперь непрерывную функцию $A_0(x)$ таким образом, что уравнение

$$D_k(Y(x)) = A_0(x) \tag{4.4}$$

не будет, вопреки предположению, иметь регулярного решения, что и завершит доказательство леммы.

Положим

$$A_0(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ если } x \in \sum\limits_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu, \\ D_k(u(x)), & \text{ если } x \bar{\in} \sum\limits_{\nu=1}^{n} \Delta_\nu, \end{cases} \tag{4.5}$$

где $u(x)$ — непрерывная вместе со своими первыми k производными функция, которую мы пока подчиним лишь условиям

$$D_k(u(\lambda_\nu)) = D_k(u(\mu_\nu)) = 0, \quad \Delta_\nu = [\lambda_\nu, \mu_\nu] \quad (\nu = 1, \ldots, n), \tag{4.6}$$

обеспечивающим непрерывность $A_0(x)$.

Допустим, что уравнение (4.4) имеет регулярное решение $Y(x)$, и определим его вид.

В каждом промежутке $[\mu_\nu, \lambda_{\nu+1}]$ $\varphi_0(x)$ не обращается в нуль и потому однородное уравнение (4.1) имеет k линейно независимых регулярных решений $y_{\nu,1}(x), \ldots, y_{\nu,k}(x)$, так что $Y(x)$ представляется в таких промежутках в форме

$$Y(x) = u(x) + \sum_{s=1}^{k} a_{\nu,s} y_{\nu,s}(x), \quad x \in [\mu_\nu, \lambda_{\nu+1}] \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{4.7}$$

В промежутках же $\Delta_\nu = [\lambda_\nu, \mu_\nu]$ уравнение (4.1) имеет $\varkappa_\nu$ линейно независимых регулярных решений $z_{\nu,1}(x), \ldots, z_{\nu,\varkappa_\nu}(x)$, так что $Y(x)$

представляется в форме

$$Y(x)=\sum_{t=1}^{x_\nu} b_{\nu,t} z_{\nu,t}(x), \quad x\in[\lambda_\nu, \mu_\nu] \quad (\nu=1, 2, \ldots, n). \tag{4.8}$$

В $2(n-1)$ точках $\mu_1, \lambda_2, \mu_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu_{n-1}, \lambda_n$ значения $Y(x), \ldots, Y^{(k-1)}(x)$, даваемые выражениями (4.7) и (4.8), должны совпадать, что приводит к $2(n-1)k$ уравнениям относительно коэффициентов $a_{\nu,s}$ и $b_{\nu,t}$:

$$\left.\begin{array}{c} u^{(i)}(\lambda_\nu)+\sum\limits_{s=1}^{k} a_{\nu,s} y_{\nu,s}^{(i)}(\lambda_\nu)=\sum\limits_{t=1}^{x_\nu} b_{\nu,t} z_{\nu,t}^{(i)}(\lambda_\nu) \\ (\nu=2, \ldots, n;\ i=0, 1, \ldots, k-1), \\ u^{(i)}(\mu_\nu)+\sum\limits_{s=1}^{k} a_{\nu,s} y_{\nu,s}^{(i)}(\mu_\nu)=\sum\limits_{t=1}^{x_\nu} b_{\nu,t} z_{\nu,t}^{(i)}(\mu_\nu) \\ (\nu=1, \ldots, n-1;\ i=0, 1, \ldots, k-1). \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

Число коэффициентов $a_{\nu,s}$ равно $(n-1)k$, число коэффициентов $b_{\nu,t}$ — сумме $\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu \leqslant n(k-1)$, а всего коэффициентов не больше

$$(n-1)k+n(k-1)=2(n-1)k-(n-k).$$

Последнее число меньше $2(n-1)k$, так как $n \geqslant k+1$.

Таким образом, число уравнений превосходит число неизвестных. Свободные члены уравнений можно выбрать произвольным образом. В самом деле, условиям (4.6) можно удовлетворить при любых $u^{(i)}(\lambda_\nu)$ и $u^{(i)}(\mu_\nu)$ $(i=0, 1, \ldots, k-1)$, надлежащим образом подобрав $u^{(k)}(\lambda_\nu)$ и $u^{(k)}(\mu_\nu)$, так как $\varphi_0(\lambda_\nu)\neq 0$, $\varphi_0(\mu_\nu)\neq 0$ $(\nu=1, 2, \ldots, n)$.

Следовательно, можно так подобрать функцию $u(x)$, чтобы уравнения (4.9) не имели решения. Тогда уравнение (4.4) с функцией $A_0(x)$, определяемой равенствами (4.5), не будет иметь регулярного решения.

ТЕОРЕМА 3. *Если уравнение (1.3) имеет регулярное решение при любой непрерывной функции $A(x)$ в правой части, то каждое из этих регулярных решений будет удовлетворять условию $C^{(k-1)}(\varphi_0)$.*

Доказательство. Лемма 6 показывает, что в условиях теоремы у всякой точки $T-R_+$ $(T-R_-)$ существует правосторонняя (левосторонняя) окрестность, лишенная точек T, и потому условия теоремы 2 соблюдаются тривиальным образом.

Теоремы 3 и 1 непосредственно устанавливают достаточность условия теоремы (α).

Поступило
27.II.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Первая заметка о линейных дифференциальных операторах, Доклады Ак. Наук СССР, XXIX, 8—9 (1940), 532—535.

[2] Бернштейн С. Н., О приближении непрерывной функции линейным дифференциальным оператором от многочлена, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 5 (1941), 15—42.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 31—46

Н. Г. ЧУДАКОВ

О КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИИ $\psi(x, k, l)$

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе рассматриваются оценки конечной разности функции Чебышева $\psi(x, k, l)$ для значений переменной x, достаточно малых в сравнении с величиной k.

Как следствие этих оценок, получаются новые данные о густоте расположения простых чисел в арифметической прогрессии.

В 1936 г. автор этой статьи показал [1], что конечная разность арифметической функции

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

имеет асимптотическое выражение для $x \to \infty$ в форме

$$\psi(x+u) - \psi(x) = u + o(u), \tag{1}$$

если $u = x^{\frac{3}{4}+\varepsilon}$.

Позднее Ingham [4] улучшил этот результат, заменив указанную величину u более точной; именно, он показал, что можно положить

$$u = x^{\frac{48}{77}+\varepsilon}.$$

В 1940 г. Fogels [5] применил развитые для функции $\Lambda(n)$ методы к другим аналогичным арифметическим функциям, например, к функциям $\mu(n)$, $\lambda(n)$ и др.

В этой статье, краткое изложение содержания которой было дано ранее [2], автор, опираясь на одну из своих прежних работ [3], получает асимптотическое выражение для конечной разности функции

$$\psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod k \\ n \leq x}} \Lambda(n),$$

где число k, т. е. разность прогрессии $l + k\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, берется в свою очередь переменной величиной, граница изменения которой зависит от x. Именно, в теореме 3 показывается, что эта величина имеет асимптотическое представление в форме

$$\psi(x+u, k, l) - \psi(x, k, l) = \frac{u}{h \ln x} + o\left(\frac{u}{h \ln x}\right), \tag{2}$$

если $u=x^{\theta}$, θ — постоянное $<\frac{3}{4}$, $k\leqslant(\ln x)^{A}$ и A — произвольное положительное число, независимое от x.

Тождество (2) имеет силу и в более широких границах изменения k, но при современном состоянии наших знаний о нулях функций $L(s,\chi)$ на число k нужно наложить дополнительные ограничения, о которых речь будет итти ниже.

В конце работы изложены приложения тождества (2) к проблемам распределения простых чисел.

Теоремы 1 и 2, хотя и имеют вспомогательное значение в этой работе, однако представляют самостоятельный интерес, так как являются обобщением известных свойств функции $\zeta(s)$ на значительно более широкий класс функций $L(s,\chi)$.

Обозначения. $\chi(n)$ — характер, принадлежащий модулю k; $L(s,\chi)$ — соответствующия ему функция Дирихле;

$$\xi(s,\chi)=\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)L(s,\chi),$$

где $\delta=0$, если $\chi(-1)=1$ и $\delta=1$, если $\chi(-1)=-1$.

Если $\chi(n)$ — первообразный характер, то, как известно,

$$\frac{\xi'}{\xi}(s,\chi)=b+\sum_{\rho}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right),$$

где суммирование распространяется на все «критические» нули $\rho=\beta+i\gamma$ функции $L(s,\chi)$, т. е. нули, лежащие в критической полосе; ряд сходится абсолютно всюду для любого $s\neq\rho$.

Далее, известен результат Page'а (7), что все «критические» нули функций $L(s,\chi)$, принадлежащих данному модулю k, лежат внутри области

$$c_1\ln^{-1}k(|t|+e)\leqslant\sigma\leqslant1-\ln^{-1}k(|t|+e). \tag{3}$$

Возможное исключение составляют два действительных нуля $\rho_0<\frac{1}{2}$ и $\rho_1=1-\rho_0$ некоторой функции $L(s,\chi)$ какого-то ближе неизвестного нам характера $\chi_1(n)$. Если χ_1 существует для данного k, то $\chi_1(n)$, $L(s,\chi_1)$, ρ_0 и ρ_1 мы будем называть «исключительными».

Введем еще символ $E(k)$, который определим условиями: $E(k)=1$, если для данного k существует «исключительный» характер, и $E(k)=0$ — в противоположном случае.

Наконец, пусть

$$E(\chi)=\begin{cases}1, & \text{если } \chi=\chi_1,\\ 0, & \text{если } \chi\neq\chi_1.\end{cases}$$

ЛЕММА 1. *Для всякой функции $L(s,\chi)$, где χ — первообразный характер, справедливы следующие утверждения:*

1°. $b+E(\chi)\frac{1}{\rho_0}\ll\ln^2(k+e)$. (4)

2°. *Образуем область D_r следующим образом. Около каждого критического нуля ρ как центра опишем окружность радиуса $r<1$ и удалим внутренности этих кружков из полуплоскости $\sigma \geqslant -1$. Остается замкнутая область, которую назовем D_r. Тогда всюду в D_r справедлива оценка:*

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) \ll r^{-1}\ln(|t|+e)+\ln^2 k(|t|+e)+\ln^2(k+e)+\frac{1}{|s+\delta|}. \tag{5}$$

3°. *Пусть t — любое действительное число; тогда в интервале $(t, t+1)$ найдется такое t', что*

$$\frac{L'}{L}(s,\chi) \ll \ln^2 k(|t|+e) \tag{6}$$

вдоль луча, выходящего из точки $-1+it'$ и идущего в направлении к $+\infty+it'$.

Доказательство. Оценку (5) достаточно установить для $\sigma \leqslant 2$. Известно, что всюду в полуплоскости $\sigma \geqslant -1$ справедлива оценка

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+\delta}{2}\right) \ll \frac{1}{|s+\delta|}+\ln(|s|+e),$$

что вместе с классическим функциональным уравнением для функции $\xi(s,\chi)$ дает

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)-b-E(\chi)\frac{1}{\rho_0} \ll r^{-1}+|s+\delta|^{-1}+\ln k(|t|+e)+\left|\sum(s)\right|,$$

где

$$\sum(s)=\sum_{\rho\neq\rho_0}\left(\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right).$$

Но

$$\left|\sum(s)\right| \leqslant \sum_{|\gamma|\leqslant N}|\rho|^{-1}+\sum_{|\gamma|\leqslant N}|s-\rho|^{-1}+\sum_{|\gamma|>N}\left|\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right|,$$

где $N=[2|t|]+1$.

Если теперь принять во внимание распределение нулей ρ согласно соотношению (3), а также тот классический факт, что существует $O(\ln k(|t|+e))$ нулей ρ, лежащих в полосе $|t-\gamma|\leqslant 1$, то без труда получим

$$\sum_{|\gamma|\leqslant N}|\rho|^{-1} \ll \ln k(|t|+e)\ln(|t|+e)+\ln^2(k+e).$$

Аналогичным образом получим оценку

$$\sum_{|\gamma|\leqslant N}|s-\rho|^{-1} \ll \ln k(|t|+e)\ln(|t|+e)+r^{-1}\ln k(|t|+e),$$

если учесть, что $|s-\rho|\geqslant r$ и

$$\sum_{|\gamma|\geqslant N}\left|\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right| \ll (|t|+e)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\ln nk}{n^2} \ll \ln k(|t|+e),$$

ибо в рассматриваемой сумме $|\gamma-t|\geqslant\frac{1}{2}|\gamma|$.

На основании всего сказанного, мы легко убеждаемся в справедливости соотношения (5), если его левая часть заменена величиной

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)-b-E(\chi)\frac{1}{\rho_0},$$

т. е.

$$\frac{L'}{L}(s,\chi)-b-E(\chi)\frac{1}{\rho_0}\ll r^{-1}\ln(|t|+e)+\ln^2 k(|t|)+e)+\ln^2(k+e)+\frac{1}{|s+\delta|}. \quad (5')$$

Оценка (4) получается из (5′), если положить там $s=2$ и вспомнить, что $\frac{L'}{L}(2,\chi)\ll 1$. Неравенства (4) и (5′) доказывают (5).

Наконец, чтобы доказать третье утверждение нашей леммы, разделим интервал $(t, t+1)$ на $\nu+2$ равных частей, где ν равно числу «критических» нулей, ординаты которых заключены в $(t, t+1)$. Очевидно, что одна из полученных частей не содержит как ординаты ρ, так и $t=0$. Если середину ее принять за $t=t'$, а r положить равным $\frac{1}{4}(\nu+2)^{-1}$, то подстановка этих величин в (5) уже доказывает (6), ибо

$$r^{-1}\ll\ln k(|t|+e).$$

Прежде чем доказывать теорему 1, сделаем несколько замечаний.

Пусть числовая функция $a(n)$ вполне мультипликативна, т. е. для любой пары натуральных чисел m и n справедливо тождество

$$a(mn)=a(m)\,a(n).$$

Отсюда тотчас следует, что $a(1)=1$, если $a(n)\not\equiv 0$.

Если, сверх того, $a(n)$ ограничена для всех n, то $|a(n)|\leqslant 1$, ибо для любого простого p мы имеем

$$|a(p)|\leqslant\overline{\lim_{m\to\infty}}|a(p^m)|^{\frac{1}{m}}\leqslant\lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{c}=1,$$

где $c=\sup|a(n)|$ для $n=1,2,\ldots$

ТЕОРЕМА 1.—1°. *Пусть в полуплоскости $\sigma>1$ функция $f(s)$ разлагается в бесконечный ряд*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s},$$

где $a(n)$ представляет собой вполне мультипликативную функцию переменного n и не обращается тождественно в 0.

Допустим, далее, что $f(s)$ продолжается в полуплоскость $\sigma>\sigma_0$, где $\sigma_0<\frac{1}{2}$, и правильна там везде, кроме, может быть, точки $s=1$, где она может иметь полюс конечного порядка.

Наконец, пусть для $|t|\to\infty$ внутри любой полосы $\sigma_0+\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant 1$

$$f(s)=O(|t|^{\beta}),$$

где β—величина, независящая от t.

Тогда для любого $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$ *и* $T \geqslant 3$ *справедлива оценка*

$$N_f(\sigma, T) \ll B^{4(1-\sigma)} T^{b(1-\sigma)} \ln^5 B_2 T + N_f\left(\frac{1}{2}, 3\right),$$

где $N_f(\sigma, T)$ *равно числу нулей функции* $f(s)$ *в прямоугольнике* $\sigma \leqslant u \leqslant 1$; $|t| \leqslant T$; *величины* B, c, B_1, c_1, B_2 *и* b *определяются из оценочных неравенств*

$$\sup_{0 \leqslant |t| < \infty} |t|^{-c_1} \left| f\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \leqslant B,$$

$$\sup_{0 \leqslant |t| < \infty} |t|^{-c_1} |f(\sigma_1 + it)| \leqslant B_1, \quad B_2 = \max(B, B_1),$$

где

$$\sigma_1 = \max\left(\frac{2\sigma_0 + 1}{4}; \frac{1}{4}\right), \quad b = 2(1 + 2c).$$

2°. *Если* k *равно наименьшему модулю характера* $\chi(n)$, *то для любого* $\sigma > \frac{1}{2}$ *и* $T \geqslant 3$

$$N(\sigma, T) \ll k^{4\lambda(1-\sigma)} T^{b(1-\sigma)} \ln^5 kT,$$

где $N(\sigma, T)$ *равно числу критических нулей* $L(s, \chi)$ *в том же прямоугольнике, о котором шла речь выше, а* λ *определяется из оценочного соотношения*

$$\max_{|t| \leqslant T} \left| L\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| \ll k \; T^c.$$

Примечание. При современном состоянии наших знаний о росте величины $\left| L\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|$ мы можем положить *

$$\lambda = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{19}{116} + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$N(\sigma, T) \ll k^{2(1-\sigma)} T^{\frac{77}{29}(1-\sigma)} \ln^5 kT.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$f_1(s) = \sum_{=1}^{\infty} \frac{\overline{a(n)}}{n^s},$$

которую будем называть функцией сопряженной $f(s)$.

Базируясь на основных принципах теории аналитических функций и принимая во внимание, что $\overline{a(n)}$ есть также вполне мультипликативная функция, мы обнаружим полное сходство свойств обеих функций $f(s)$ и $f_1(s)$, именно, $f_1(s)$ — функция правильная в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$, кроме точки $s = 1$, в окрестности которой разность $f(s) - f_1(s)$ будет правильной функцией. Кроме того, в силу принципов аналитического продолжения, всюду в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$, кроме точки $s = 1$, справедливо функциональное уравнение

$$f(s) = \overline{f_1(\bar{s})}, \tag{7}$$

которое для $\sigma > 1$ вытекает тотчас же из определения $f_1(s)$.

* Эти постоянные вычислила В. Архангельская, базируясь на работах E. Titchmarsh'a [10].

Это тождество позволяет нам ограничиться в дальнейшем только рассмотрением нулей $f(s)$, имеющих неотрицательные ординаты, так как, в силу (7), нули $f(s)$ с отрицательными ординатами расположены симметрично относительно нулей $f_1(s)$ с положительными ординатами. А для функции $f_1(s)$ все дальнейшие рассуждения справедливы и приводят к оценкам, которые тождественны с таковыми же для $f(s)$.

Введем еще вспомогательные функции

$$F(s)=\sum_{n\leqslant T} a(n)\mu(n)n^{-s}, \quad \rho(s)=f(s)F(s)-1,$$

$$h(s)=1-\rho^2(s),$$

где $\mu(n)$ — функция Мебиуса.

Аналогично построим функции $F_1(s)$, $\rho_1(s)$ и $h_1(s)$, исходя из функции $f_1(s)$.

Принимая во внимание основные свойства вполне мультипликативных функций, мы после элементарных вычислений получаем разложение $\rho(s)$ в бесконечный ряд для $\sigma>1$:

$$\rho(s)=\sum_{n>T}\frac{b(n)}{n^s},$$

где

$$b(n)=a(n)\sum_{\substack{d/n\\ d\leqslant T}}\mu(d),$$

причем легко видеть, что $|b(n)|\leqslant d(n)$ для всех натуральных n.

Положим, далее, для $\sigma\neq 1$ и $t>0$

$$Q(\sigma, t)=\int_0^t|\rho(\sigma+it)|^2\,dt.$$

Если $\sigma=1+\delta$, где $\delta>0$, то непосредственное вычисление показывает, что

$$Q(1+\delta, t)\leqslant t\sum_{n>T}\frac{d^2(n)}{n^2}+4\sum_{n>m>T}\frac{d(m)\,d(n)}{(mn)^{1+\delta}\ln\frac{n}{m}}.$$

С другой стороны, известно ([4]), что для $0<\xi<2$ справедливы оценки

$$\sum_{n\geqslant T}\frac{d^2(n)}{n^{1+\xi}}\ll\frac{\left(\frac{1}{\xi}+\ln T\right)^3}{\xi T^{\xi}} \text{ и } \sum_{n>m\geqslant T}\frac{d(m)\,d(n)}{(mn)^{1+\xi}\ln\frac{n}{m}}\ll\xi^{-4},$$

Следовательно,

$$Q(1+\delta, t)\leqslant\frac{t}{T}\delta^{-3}+\delta^{-4}\ll\left(\frac{t}{T}+1\right)\delta^{-4},$$

ибо

$$\frac{\ln^3 T}{T^{2\delta}}\ll\delta^{-3} \text{ для } T\geqslant 1.$$

Но

$$\left|\rho\left(\frac{1}{2}+it'\right)\right|^2 \ll 2\left(B^2 t^{2c}\left|F\left(\frac{1}{2}+it'\right)\right|^2+1\right)$$

для всех $|t'|\leqslant t$;

$$\int_0^t \left|F\left(\frac{1}{2}+it'\right)\right|^2 dt' \leqslant t\sum_{n\leq T}\frac{1}{n}+4\sum_{1\leq m<n\leq T}\frac{1}{(mn)^{\frac{1}{2}}\ln\frac{n}{m}} \ll$$

$$\ll (t+T)\ln T,$$

ибо, как известно ([4]),

$$\sum_{1\leq m<n\leq T}(mn)^{-\frac{1}{2}}\left(\ln\frac{n}{m}\right)^{-1} \ll T\ln T.$$

Следовательно,

$$Q\left(\frac{1}{2}, t\right) \ll B^2 t^{2c}(t+T)\ln T.$$

Аналогичные оценки мы можем получить и для функции

$$Q_1(\sigma, t) = \int_0^t |\rho_1(\sigma+it)|^2\, dt.$$

Введем теперь новую вспомогательную функцию

$$\Phi(s) = (s-1)^{\nu} s^{-\nu}\left(\cos\frac{s}{2T}\right)^{-1}\rho(s),$$

где ν равно порядку полюса функции $f(s)$ в точке $s=1$. Функция $\Phi(s)$ правильна всюду в полосе $\sigma_0<\sigma\leqslant 2$, и для любого $s\neq 1$ внутри этой полосы справедлива оценка

$$c_1|\rho(s)|\exp\left(-\frac{|t|}{2T}\right) \leqslant |\Phi(s)| \leqslant c_2|\rho(s)|\exp\left(-\frac{|t|}{2T}\right),$$

где c_1 и c_2 суть абсолютные постоянные. Поэтому интеграл

$$I(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(\sigma+it)|^2\, dt$$

сходится абсолютно для всех σ внутри интервала $(\sigma_0, 2)$.

Кроме того, замечая, что

$$|\rho(\sigma-it)| = |\rho_1(\sigma+it)|,$$

мы получаем оценку для $I(\sigma)$ при любом $\sigma\neq 1$ в рассматриваемом нами интервале:

$$I(\sigma) \ll \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{T}}\, d\left(Q(\sigma, t)+Q_1(\sigma, t)\right) = \int_0^{\infty} e^{-u}\left(Q(\sigma, Tu)+Q_1(\sigma, Tu)\right) du.$$

В частности, вспоминая оценки для $Q(\sigma, t)$ и $Q_1(\sigma, t)$, мы получаем

$$I\left(\frac{1}{2}\right) \ll B^2 T^{2c+1}\ln T, \quad I(1+\delta) \ll \delta^{-4} \quad (1>\delta>0).$$

С другой стороны, известно ([6]), что для интегралов такого типа как $I(\sigma)$ величина $\ln I(\sigma)$ является выпуклой функцией переменного σ в любом интервале, внутреннем к $(\sigma_0, 2)$. Поэтому, в частности для

данного δ, мы можем написать

$$I(\sigma) \ll I\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1+\delta-\sigma}{\frac{1}{2}+\delta}} (I(1+\delta))^{\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\delta}}$$

для всех значений $\sigma \in \left(\frac{1}{2}, 1+\delta\right)$. Полагаем теперь $\delta = \left(\ln I\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}$ и заметим, что

$$\frac{1+\delta-\sigma}{\frac{1}{2}+\delta} = 2(1-\sigma) + O(\delta) \text{ и } \frac{\frac{1}{2}-\sigma}{\frac{1}{2}+\delta} = 1-2\sigma + O(\delta);$$

следовательно, принимая во внимание оценки для $I\left(\frac{1}{2}\right)$ и $I(1+\delta)$, находим, что

$$I(\sigma) \ll \left(I\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{2(1-\sigma)} (I(1+\delta))^{2\sigma-1} \ll B^{4(1-\sigma)}\,T^{b(1-\sigma)} \ln^4 BT.$$

Но для $\sigma < 1$

$$I(\sigma) \geqslant c_1^2 \int\limits_0^\infty e^{-\frac{|t|}{T}} |\rho(\sigma+it)|^2\, dt \geqslant c_1^2 e^{-1} Q(\sigma, T);$$

следовательно, для этих значений σ

$$Q(\sigma, T) \ll B^{4(1-\sigma)}\,T^{b(1-\sigma)} \ln^4 BT. \tag{8}$$

Перейдем теперь к оценке величины $N_f(\sigma, T)$. Прежде всего заметим, что $N_f(\sigma, T) = 0$ для $\sigma > 1$, ибо $f(s)$ разлагается в ряд Дирихле, коэффициенты которого суть значения вполне мультипликативной функции. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем $\sigma < 1$, ибо для $\sigma = 1$ доказываемая нами оценка будет справедлива в силу того, что $N_f(\sigma, T)$ полунепрерывна снизу, т. е.

$$\lim_{\sigma \to 1-0} N_f(\sigma, T) = N_f(1, T).$$

Далее, заметим, что интересующие нас нули функции $f(s)$ составляют только часть нулей функции

$$h(s) = f(s)\,F(s)\,(2 - f(s)\,F(s)),$$

поэтому достаточно доказать нашу теорему для функции $h(s)$. Эта функция правильна в полуплоскости $\sigma > \sigma_0$, кроме, может быть, точки $s = 1$, где она может иметь полюс порядка 2ν; кроме того, в полуплоскости $\sigma > 1$ наша функция разлагается в ряд Дирихле и

$$\lim_{\sigma \to +\infty} h(\sigma + it) = 1$$

равномерно относительно t.

Все эти свойства $h(s)$ позволяют применить к ней известную теорему Литльвуда [см. ([11]), стр. 53], которая дает тождество

$$2\pi \int\limits_\alpha^\beta \overline{N}(\sigma, T_1, T_2)\, d\sigma = \int\limits_{T_1}^{T} \ln|h(\alpha+it)|\, dt - \int\limits_{T_1}^{T} \ln|h(\beta+it)|\, dt +$$

$$+\int_{\alpha}^{\beta} \arg h(\sigma+iT)\,d\sigma-\int_{\alpha}^{\beta} \arg h(\sigma+iT_1)\,d\sigma,$$

где функция $\arg h(s)$ определяется как мнимая часть $\ln h(s)$, а в свою очередь

$$\ln h(s)=\int_{+\infty}^{s} \frac{h'}{h}(s)\,ds$$

для точек полуплоскости $\sigma>1$; для точек же полосы $\sigma_0<\sigma\leqslant 1$ эта последняя функция определяется с помощью аналитического продолжения вдоль горизонтальных прямых, не проходящих через нули и полюс $h(s)$. $\overline{N}(\sigma, T_1, T_2)$ — число нулей $h(s)$ в прямоугольнике $\sigma\leqslant u\leqslant 1$; $T_1\leqslant t\leqslant T$, причем T_1 и T мы выбираем здесь положительными числами, не равными ординатам нулей $h(s)$; кроме того, T_1 и T подчинены еще условию

$$2{,}9\leqslant T_1\leqslant 3<T;$$

что касается чисел α и β, то α фиксируется между $\frac{1}{2}$ и 1, а число $\beta>3$.

Заметим, далее, что

$$\int_{T_1}^{T} \ln|h(\beta+it)|\,dt\to 0,$$

если T_1 и T будут фиксированы, а $\beta\to+\infty$, ибо, как мы видели выше, $\ln|h(\beta+it)|\to 0$ при $\beta\to+\infty$ равномерно относительно t.

С другой стороны, в силу того, что $h(s)$ разлагается в ряд Дирихле в полуплоскости $\sigma>1$, мы имеем для некоторого положительного A:

$$\arg h(s)=O(e^{-A\sigma})$$

равномерно относительно t.

Поэтому в тождестве Литльвуда два последних слагаемых сходятся абсолютно при $\beta\to+\infty$.

Сверх того, часть этих интегралов, вычисленная между $\sigma=3$ и $\sigma=+\infty$, ограничена при любом T, ибо для $\sigma>3$

$$|\rho(s)|\leqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{d(n)}{n^3}\leqslant 2\sum_{n=2}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}<1,$$

т. е. $\Re h(s)>0$. Поэтому для оценки рассматриваемых интегралов достаточно найти верхнюю границу изменения $\arg h(s)$ на отрезке $s=\sigma+iT$ для $\frac{1}{2}\leqslant\sigma\leqslant 3$.

Как известно, изменение $\arg h(s)$ вдоль кривой, которая не содержит особенностей функции $h(s)$, не превосходит величины $(m+1)\pi$, где m равно числу нулей функции $\Re h(s)$, лежащих на нашей кривой.

Для оценки величины m воспользуемся классическим приемом, который обычно употребляется в аналогичных случаях [см., напри-

мер, ([4])]. В силу тождества (7), мы имеем аналогичные тождества и для $h(s)$, т. е.

$$h(\bar{s}) = \overline{h_1(s)}.$$

Положим теперь

$$2\varphi(s) = h(s+iT) + h_1(s-iT).$$

Эта функция правильна в круге $|s-3| \leqslant R$, где $R = 3 - \sigma_1$; на отрезке действительной оси $[\sigma, 3]$ ее значения совпадают со значениями функции $\Re h(s)$, которые последняя принимает на отрезке $[\sigma_1 + iT,\ 3 + iT]$. Поэтому число m не превышает числа нулей $\varphi(s)$ внутри круга $|s-3| \leqslant 2,5$.

Применяя к обоим названным кругам известную теорему Jensen'a, мы заключаем, что

$$\left(\frac{R}{2,5}\right)^m \ll \frac{B_1^2 (T+2,75)^{2c_1} T^{\frac{3}{2}}}{|\Re h(3+iT)|}.$$

Но, как мы видели выше, величина $|\Re h(s+it)|$ ограничена снизу положительной постоянной вдоль всей прямой $\sigma = 3$; поэтому

$$m \ll \ln B_1 T \text{ для всех } T \geqslant 2,9.$$

Таким образом, два последние слагаемые в формуле Литльвуда имеют порядок $O(\lg B_1 T)$.

Сопоставляя все сказанное выше с неравенством (8), заключаем, что

$$2\pi \int_{\alpha}^{1} N(\sigma, T_1, T)\, d\sigma \ll \int_{T_1}^{T} \ln |h(\alpha + it)|\, dt + \ln B_1 T \ll$$

$$\ll \int_{T_1}^{T} |\rho(\alpha + it)|^2\, dt + \ln B_1 T \ll B^{4(1-\alpha)} T^{b(1-\alpha)} \ln^4 BT + \ln B_1 T,$$

ибо для $\xi > 0$ справедливо

$$\ln(1+\xi) < \xi.$$

Рассмотрим теперь два тождества. Возьмем, во-первых, произвольное $\sigma \geqslant \frac{1}{2} + \delta$, где $\delta = (\ln BT)^{-1}$, и положим $\alpha = \sigma - \delta$. В силу монотонного убывания $N(\sigma, T_1, T)$ при возрастающем σ, мы можем написать

$$N(\sigma, T_1, T) \leqslant \delta^{-1} \int_{\alpha}^{1} N(\sigma, T_1, T)\, d\sigma \ll B^{4(1-\alpha)} T^{b(1-\alpha)} (\ln BT)^5 +$$

$$+ \ln B_1 T \ll \ln BT\ B^{4(1-\sigma)} T^{b(1-\sigma)} \ln^5 B_2 T,$$

ибо B^{δ} и $T^{\delta} \ll 1$. Если же $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2} + \delta$, то эта оценка для $N(\sigma, T_1, T)$ следует из теоремы Jensen'a, в силу которой число нулей функции $f(s)$ в полуполосе $\sigma \geqslant \frac{1}{2}$; $T \leqslant t \leqslant T+1$ есть величина порядка $O(\ln BT)$ для $T \geqslant 2,9$, откуда имеем

$$N(\sigma, T_1, T) \ll T \ln B_1 T \ll B^{4(1-\sigma)} T^{b(1-\sigma)} \ln^5 B_2 T,$$

ибо $b \geqslant 2$.

До сих пор мы предполагали, что T_1 и T не принадлежат множеству ординат нулей функции $h(s)$; если же мы теперь снимем это ограничение с величин T_1 и T, сохраняя только границы их изменения прежними, то прежде всего мы заметим, что всегда можно выбрать два значения $T_1' < T_1$ и $T' > T$ настолько близкими к данным T_1 и T, что:

1) функции $\rho(s)$, $F(s)$ и $h(s)$ сохраняют одинаковый смысл для всех значений переменного T'' в интервале $T < T'' < T'$ и

2) соответствующая функция $h(s)$ не имеет нулей, ординаты которых лежат внутри интервалов $[T_1', T_1]$ и $[T, T']$.

Но в таком случае, опираясь на тот факт, что при фиксированном σ функция $N(\sigma, T_1, T)$ полунепрерывна снизу по переменному T_1 и полунепрерывна сверху по переменному T, а правая часть доказываемой оценки непрерывна по переменному T, мы без труда убеждаемся в справедливости нашей оценки для данных T_1 и T.

Этим доказано первое утверждение нашей теоремы.

Второе утверждение непосредственно следует из первого, если заметить, что для числа «критических» нулей $L(s, \chi)$ справедлива классическая оценка

$$N\left(\frac{1}{2}, 3\right) \ll \ln k;$$

что же касается числа B_2, то, как известно, его можно положить равным

$$B_2 = ck^{\frac{3}{4}},$$

где c — абсолютная постоянная.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $x \geqslant 3$, $3 \leqslant T \leqslant x$, $1 \leqslant k \leqslant x$, l, k — *натуральные числа,* $l < k$, $(l, k) = 1$, $h = \varphi(k)$,

$$\psi(x, k, l) = \sum_{\substack{n \equiv l \pmod k \\ n \leq x}} \Lambda(n).$$

Тогда

$$\psi(x, k, l) = xh^{-1} + E(k)\frac{\chi_1(l)}{h\rho_0} -$$

$$- h^{-1} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

Доказательство. Известно, что

$$\psi(x, k, l) = h^{-1} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) S(x, \chi),$$

где

$$S(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n).$$

Суммирование распространяется на все характеры данного модуля k.

Заменим в $S(x, \chi)$ характер χ тем первообразным характером χ_1, который порождает χ; такая подстановка изменит $S(x, \chi)$ на величину порядка $O(\ln x \ln k)$, следовательно,

$$\psi(x, k, l) = h^{-1} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) S(x, \chi_1) + O(\ln x \ln k). \tag{9}$$

Будем теперь предполагать, что χ — первообразный характер. Применяя известную теорему E. Landau (9), получим

$$S(x, \chi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{a-iT}^{a+iT} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi)\, ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right),$$

где $a = 1 + (\ln x)^{-1}$.

Нетрудно видеть, что последнее тождество не нарушится, если нижний и верхний пределы интеграции сместить в любые точки $a + iT_1$ и $a + iT_2$, где $T_1 \in (-T-1, -T)$ и $T_2 \in (T, T+1)$.

Выберем теперь T_1 и T_2 в соответствии с леммой 1, т. е. так, чтобы

$$\frac{L'}{L}(s, \chi) \ll \ln^2 kT$$

вдоль лучей, идущих вправо от точек $-1 + iT_1$ и $-1 + iT_2$. Далее, известно, что

$$\frac{L'}{L}\left(-\frac{1}{2} + it\right) \ll \ln k(|t| + e).$$

Обе последние оценки для $\frac{L'}{L}(s, \chi)$ позволяют нам первое слагаемое правой части тождества для $S(x, \chi)$ заменить суммой вычетов подинтегральной функции, причем порядок остаточного члена сохраняется прежним. Мы приходим к тождеству

$$S(x, \chi) = E_0 x - \operatorname*{Res}_{s=0} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi) - \sum_{T_1 \leqslant \gamma \leqslant T_2} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^3 x}{T}\right),$$

где, ради сокращения, положено: $E_0 = 1$, если $\chi = \chi_0(n)$, т. е. есть главный характер $\bmod k$, и $E = 0$ в остальных случаях.

Применяя, далее, функциональное уравнение для $\xi(s, \chi)$ и соотношение (4) леммы 1, мы без труда найдем, что

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi) = E(\chi) \frac{1}{\rho_0} + O(\ln kx) + O(\ln^2 k)$$

в случае, когда $\chi(-1) = 1$ и

$$\operatorname*{Res}_{s=0} \frac{x^s}{s} \frac{L'}{L}(s, \chi) = E(\chi) \frac{1}{\rho_0} + O(\ln^2 k)$$

для $\chi(-1) = -1$.

Кроме того, заметим, что в третьем слагаемом правой части последнего тождества для $S(x, \chi)$ мы снова можем заменить величины T_1 и T_2 соответственно на $-T$ и $+T$ и опять порядок остаточного члена не нарушится; следовательно,

$$S(x, \chi) = E_0 x + E(\chi) \frac{1}{\rho_0} - \sum_{|\gamma| \leq T} \frac{x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^3 x}{T}\right),$$

что вместе с тождеством (9) для $\psi(x, k, l)$ полностью доказывает нашу теорему.

Прежде чем доказывать теорему 3, введем новые обозначения.

Постоянные величины τ и c_4 имеют, соответственно, такой же смысл, как и величины γ и c_4 в прежней работе автора (3). При современном состоянии наших знаний можно показать, что $\tau = \frac{3}{4} + \varepsilon$.

Величины b и λ имеют такой же смысл, как в теореме 1 настоящей статьи; ε — произвольное малое положительное число $< \frac{1}{2b}$; $\theta = 1 - \frac{1}{b} + \varepsilon$, $\alpha = \frac{1}{b} - \frac{\varepsilon}{2} > 0$, $\mu = 1 - \alpha b > 0$, $c = c_4 \alpha^{-\tau}$; положительное c' так мало, что $(1 + 2\lambda) c' - \mu c < 0$. Натуральное число $l < k$, $(l, k) = 1$; x — независимое переменное, значения которого $\geqslant 3$; $u = x^\theta$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть натуральное число k подчинено условию*

$$1 \leqslant k \leqslant \exp c' (\ln x)^{1-\tau}.$$

Тогда при $x \to \infty$

$$\frac{\psi(x+u, k, l) - \psi(x, k, l)}{uh^{-1}} + E(k) \frac{(x+u)^{\rho_1} - x^{\rho_1}}{u\rho_1} \chi_1(l) = 1 + o(1),$$

причем второе слагаемое правой части стремится к нулю равномерно относительно величин k и l.

Доказательство. Пусть сначала величины k и T подчинены тем же условиям, что и в теореме 2, а переменная y меняется между x и $2x$. Названная теорема дает

$$\psi(y, k, l) = yh^{-1} + E(k) \frac{\chi_1(l)}{h\rho_0} - h^{-1} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{|\gamma| \leqslant T} \frac{y^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right).$$

В этом тождестве y, в частности, может быть положен равным x; вычитая из тождества для $\psi(y, k, l)$ почленно аналогичное тождество для $\psi(x, k, l)$, мы без труда убеждаемся в том, что

$$\frac{\psi(y, k, l) - \psi(x, k, l)}{uh^{-1}} + E(k) \frac{(x+u)^{\rho_1} - x^{\rho_1}}{u\rho_1} \chi_1(l) - 1 =$$
$$= -u^{-1} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{\substack{|\gamma| \leqslant T \\ \rho \neq \rho_1}} \frac{y^\rho - x^\rho}{\rho} + O\left(\frac{xh \ln^2 x}{Tu}\right). \quad (10)$$

Если теперь положить $y=x+u$, $T=x^\alpha$ и подчинить число k указанным выше условиям, то станет очевидным, что последнее слагаемое имеет порядок

$$O(x^{-\frac{\varepsilon}{2}} \exp \sqrt{\ln x} \ln^2 x) = o(1).$$

Далее заметим, что

$$\rho^{-1}(y^\rho - x^\rho) = \int_x^y v^{\rho-1}\, dv \ll ux^{\beta-1},$$

ибо $\beta < 1$; следовательно,

$$u^{-1} \sum_\chi \bar{\chi}(l) \sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ \rho \neq \rho_1}} \frac{y^\rho - x^\rho}{\rho} \ll h \sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ \rho \neq \rho_1}} x^{\beta-1}. \tag{11}$$

Второй множитель правой части (10) можно теперь выразить через интеграл Стильтьеса от функции $x^{\sigma-1}$:

$$\sum_{\substack{|\gamma| \leq T \\ \rho \neq \rho_1}} x^{\beta-1} = -\int_x^1 x^{\sigma-1}\, d\bar{N}(\sigma, T), \tag{12}$$

где $\bar{N}(\sigma, T)$ равно числу нулей функции $L(s, \chi)$ в прямоугольнике $|t| \leqslant T$, $\sigma \leqslant u \leqslant 1$, исключая $\rho=\rho_1$, если таковое имеется у нашей функции.

К правой части равенства (11) можно применить известную формулу интегрирования по частям интеграла Стильтьеса:

$$-\int_0^1 x^{\sigma-1} d\bar{N}(\sigma, T) = x^{-1}\bar{N}(0, T) + \ln x \int_0^{\sigma_1} \bar{N}(\sigma, T)\, x^{\sigma-1}\, d\sigma, \tag{13}$$

где σ_1 равно наибольшему значению переменной σ, для которого $\bar{N}(\sigma, T) \neq 0$.

Но, в силу элементарных классических оценок,

$$\bar{N}(0, T) \ll T \ln kT \ll x^\alpha \ln x,$$

следовательно,

$$x^{-1}\bar{N}(0, T) + \ln x \int_0^{\frac{1}{2}} \bar{N}(\sigma, T)\, x^{\sigma-1} d\sigma \ll x^{\alpha - \frac{1}{2}} \ln x = o(h^{-1}), \tag{14}$$

ибо число $b \geqslant 2$, т. е. $\alpha < \frac{1}{2}$.

С другой стороны, в силу теоремы 1, мы имеем

$$\overline{N}(\sigma, T) \ll k^{4\lambda(1-\sigma)} T^{b(1-\sigma)} \ln^5 kT \ll k^{2\lambda} T^{b(1-\sigma)} \ln^5 x.$$

В упомянутой выше статье автора [см. ([3]), теорема 1] было показано, что

$$1 - \sigma_1 > c_4 (\ln T)^{-\tau} \geqslant c (\ln x)^{-\tau},$$

ибо для достаточно большого x справедливо неравенство

$$\ln k < (\ln x)^{\tau}.$$

Следовательно,

$$h \int_{\frac{1}{2}}^{\sigma_1} \overline{N}(\sigma, T) x^{\sigma-1} d\sigma \ll \ln^4 x k^{1+2\lambda} x^{\mu(\sigma_1-1)} \ll$$

$$\ll \ln^4 x \exp[(1+2\lambda)c' - \mu c)] (\ln x)^{1-\tau} = o(1). \quad (15)$$

Сопоставляя соотношения (9)—(15), мы убеждаемся в справедливости нашей теоремы.

Следствие 1. Пусть

$$\pi(x, k, l) = \sum_{\substack{p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k) \\ p \leq x}} 1$$

(p пробегает все простые числа $\leqslant x$ и принадлежащие прогрессии $p \equiv l \,(\mathrm{mod}\, k)$).

Тогда, если u и k подчинены тем же условиям, что в теореме 3, имеем

$$\pi(x+u, k, l) - \pi(x, k, l) = \frac{u}{h \ln x} - E(k)\chi_1(l) \frac{(x+u)^{\rho_1} - x^{\rho_1}}{u\rho_1 \ln x} + o\left(\frac{u}{h \ln x}\right),$$

ибо, как следует из классических оценок,

$$\pi(x+u, k, l) - \pi(x, k, l) = \frac{\psi(x+u, k, l) - \psi(x, k, l)}{\ln x} + O(x^{\frac{1}{2}} \ln x).$$

Из теоремы Siegel'я [см. ([8])] следует, в частности, что если $k \ll (\ln x)^A$, где A — любое положительное, то

$$\pi(x+u, k, l) - \pi(x, k, l) = \frac{u}{h \ln x} + o\left(\frac{u}{h \ln x}\right).$$

Поступило
27. II. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чудаков Н. Г., О разности двух соседних простых чисел, Матем. сб., 1 (43) : 6 (1936), 799—813.
[2] Чудаков Н. Г., О нулях L-функций Дирихле, Доклады Ак. Наук СССР, IX (1945), 89—91.
[3] Чудаков Н. Г., О нулях функций $L(s, \chi)$, Матем. сб., т. 19 (61) : 1 (1946), 47—56.
[4] Ingham A. E., On the difference between consecutive primes, Quarterly Journ. of Math., Oxford ser., v. 8, N_0 32 (1937), 255—266.
[5] Fogels E., On average values of arithmetical functions, Publications du séminaire mathématique de l'université de Lettonie à Riga, 15—16 (1940).
[6] Hardy G. H., Ingham A. E. and Polya G., Theorems concerning mean values of analytic functions, Proc. Royal Soc. A 113 (1927), 542.
[7] Page A., Oh the number of the primes in an arithmetic progression, Proc. London Math. Soc., ser. 2, 39 (1935), 116—141.
[8] Siegel C. L., Über d. Classenzahle quadratischen Zahlkörper, Acta Arithmetica, I (1936), 83—86.
[9] Landau E., Über einige Summen, die von den Nullstellen der Riemann'schen Zetafunktion abhängen, Acta mathem., 35 (1912), 271—294.
[10] Titchmarsh, E., On the order of $\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$, Quarterly Journ. Math. Oxford ser. V, 13, No 49 (1942), 11—17.
[11] Titchmarsh E., The Zeta-function of Riemann, Cambridge, 1930.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 47—56

К. А. РОДОССКИЙ

О КОМПЛЕКСНЫХ НУЛЯХ L-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Работа содержит новую оценку числа L-функций Дирихле, имеющих нули вблизи единичной прямой; результаты статьи являются обобщением известной теоремы Ю. В. Линника [1].

Введение

В 1944 г. Ю. В. Линник доказал [1], что число Q L-рядов Дирихле с характерами $\chi \pmod D$, имеющих хоть один нуль в прямоугольнике

$$1 \geqslant \sigma \geqslant 1 - \frac{\psi(D)}{\ln D}, \quad |t| \leqslant \ln^4 D,$$

где $\frac{1}{3}\ln D \geqslant \psi(D) \geqslant \ln^{\lambda}(D)$ и $\lambda > 0$ — малое фиксированное число, удовлетворяет неравенству

$$Q < \exp(A(\lambda)\,\psi(D)),$$

где число A зависит только от λ.

В настоящей работе автор расширяет имеющиеся сведения о распределении нулей L-рядов, обобщая метод Ю. В. Линника.

Чтобы сделать более понятным содержание доказываемой ниже теоремы, приведем одно ее

Следствие. *Во всяком прямоугольнике*

$$1 \geqslant \sigma \geqslant 1 - \varepsilon, \quad |t - T_1| \leqslant \ln^4 D,$$

где $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$, $|T_1| \leqslant D^{\frac{1}{\varepsilon}-1}$ *и* ε *фиксировано, из числа L-рядов с характерами* $\chi \pmod D$ *могут иметь нули не более чем* $D^{A\varepsilon}$ *L-рядов для достаточно больших* D *(A — абсолютная постоянная).*

Аналогичное следствие может быть сделано из результата [1] Ю. В. Линника лишь для $|T_1| = O(\ln^c D)$, где c — постоянная.

§ 1. ТЕОРЕМА. *Пусть* $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi_2), \ldots, L(s, \chi_{\varphi(D)})$ *все L-ряды с характерами* $\chi \pmod D$, $1 > \lambda > 0$ *произвольно и* $\psi(D) = \psi$ — *число, удовлетворяющее условию*

$$\frac{1}{3}\ln D \geqslant \psi(D) \geqslant (\ln D)^{\lambda}. \tag{1}$$

Пусть $Q\left(\frac{\psi(D)}{\ln DT}\right)$ — *число L-рядов, имеющих хоть один нуль в прямо-*

угольнике

$$1-\frac{\psi}{\ln DT}\leqslant\sigma\leqslant 1,\quad |t-T_1|\leqslant \ln^4 DT,\quad T=|T_1|\geqslant \ln^4 D, \tag{2}$$

где T_1 — любое действительное число. Тогда

$$Q\leqslant \exp(A(\lambda)\psi(D)+28\ln\ln DT), \tag{3}$$

где $A(\lambda)$—постоянная, зависящая только от λ.

В процессе доказательства $c_1, c_2, \ldots$ обозначают абсолютные положительные постоянные.

§ 2. ЛЕММА 1. *Пусть $L(s,\chi)$ (χ — неглавный характер* $\mathrm{mod}\, D$) *имеет нуль $\rho_1=\beta_1+it_1$ в прямоугольнике* (2). *Тогда он имеет нуль $\rho_0=\beta_0+it_0$ при*

$$\beta_0\geqslant 1-\frac{\psi}{\ln DT},\quad |t_0-T_1|\leqslant \ln^6 DT$$

и не имеет других нулей при

$$\sigma\geqslant \beta_0+\frac{1}{\ln^2 DT},\quad |t-t_0|\leqslant \ln^4 DT.$$

(Возможно, что $\rho_0=\rho_1$).

Доказательство. Пусть в прямоугольнике

$$1\geqslant\sigma\geqslant\beta_2+\frac{1}{\ln^2 DT},\quad |t_2-t|\leqslant\ln^4 DT.$$

нет нулей. Тогда лемма доказана, так как в качестве ρ_0 можно взять ρ_1. Поэтому остается разобрать случай, когда в этом прямоугольнике есть нули. Возьмем один из них, например, $\rho_2=\beta_2+it_2$, для которого

$$|t_2-T_1|\leqslant|t_1-T_1|+\ln^4 DT<2\ln^4 DT,$$

и построим прямоугольник

$$1\geqslant\sigma\geqslant\beta_2+\frac{1}{\ln^2 DT};\quad |t_2-t|\leqslant\ln^4 DT.$$

Тогда в этом прямоугольнике или нет нулей и лемма доказана, или есть нули. В последнем случае продолжаем этот процесс, выбирая в последнем прямоугольнике нуль $\rho_3=\beta_3+it_3$, для которого

$$|t_3-T_1|<2\ln^4 DT+\ln^4 DT=3\ln^4 DT,$$

и так далее, так что для $\rho_\nu=\beta_\nu+it_\nu$ имеем

$$|t_\nu-T_1|<\nu\ln^4 DT.$$

Каждый раз при продолжении этого процесса мы приближаемся не меньше чем на $\ln^{-2} DT$ к прямой $\sigma=1$, на которой и за которой нет нулей.

Из условий (1) и (2) следует, что $1-\beta_1\leqslant\frac{1}{3}$ и меньше чем через $\frac{1}{3}:\ln^{-2} DT$ шагов мы наверное найдем ρ_ν, которое можно принять за ρ_0. При этом $\nu<\ln^2 DT$ и $|t_\nu-T_1|<\ln^6 DT$, что и требовалось доказать.

§ 3. Обозначим через ρ_k нуль $L(s,\chi)$ и пусть

$$f(s)=\frac{L'}{L}(s,\chi),\quad \chi\neq\chi_0,\quad \chi\neq\chi_1.$$

(χ_0 — главный, χ_1 — исключительный характер).

Мы будем пользоваться леммой Titchmarsh'a:

$$\left| f(s) - \sum_{|s-\rho_k|\leqslant 1} \frac{1}{s-\rho_k} \right| < c_1 \ln D(|t|+2). \tag{4}$$

Положим

$$k_1 = 10c_1, \quad \sigma_0 = \beta_0 + (k_1 \ln DT)^{-1}.$$

ЛЕММА 2. *На прямой* $\sigma = \sigma_0$ *существует точка* $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, *обладающая следующими свойствами*:

1°. $|\tau_0 - t_0| \leqslant \ln DT$;

2°. $|f(s_0)| = P \ln DT$, *где* $c_2 \ln DT \geqslant P \geqslant \frac{k_1}{10}$;

3°. $|f(s_1)| \geqslant \frac{P}{2} \ln DT$ *для* $s_1 = s_0 + r$, $r = (10^6 k_1 \ln DT)^{-1}$;

4°. $|f(s)| \leqslant 2P \ln DT$ *для* $s = \sigma_0 + it$, $|t - t_0| \leqslant (\ln \ln DT)^2$.

Доказательство. Берем точку $s_2 = \sigma_0 + it_0$ и из (4) получаем

$$\Re f(s_2) = \sum_{|s_2-\rho_k|\leqslant 1} \Re \frac{1}{s_2-\rho_k} + \Re U(s_2), \tag{5}$$

где

$$|U(s_2)| < c_1 \ln D(T + \ln^6 DT + 2) < 2c_1 \ln DT.$$

Все слагаемые в сумме (5) положительны, так как

$$\sigma_0 > \beta_0 + \frac{1}{\ln^2 DT}$$

(для достаточно больших D, что подразумевается и для многих других неравенств), но

$$\Re \frac{1}{s_2 - \rho_0} = \frac{1}{\sigma_0 - \beta_0} = k_1 \ln DT,$$

следовательно,

$$|f(s_2)| > k_1 \ln DT - 2c_1 \ln DT = \frac{4}{5} k_1 \ln DT.$$

Оценим $|f(s)|$ сверху в полуполосе $\sigma \geqslant \sigma_0$, $|t - t_0| \leqslant \ln^3 DT$. Заметив, что число нулей $L(s, \chi)$ в критической полосе, лежащих между t и $t+1$, меньше чем $c_3 \ln D(|t|+2)$, получаем

$$|f(s)| < \sum_{|s-\rho_k|\leqslant 1} \left| \frac{1}{s-\rho_k} \right| + c_1 \ln D(|t|+2) < c_4 \ln^2 DT. \tag{6}$$

Рассмотрим новый сегмент

$$\sigma = \sigma_0, \quad |t - t_0| \leqslant (\ln \ln DT)^2.$$

Если на этом сегменте $|f(s)| < 2|f(s_2)|$, то s_2 принимается за s_0. Если же $|f(s)| \geqslant 2|f(s_2)|$, то рассматриваем точку $s_3 = \sigma_0 + it_0'$, где достигается $\max|f(s)|$, строим около нее сегмент

$$\sigma = \sigma_0, \quad |t - t_0'| \leqslant (\ln \ln DT)^2$$

и повторяем рассуждения с точкой s_3 вместо s_2. Этот процесс заканчивается на некотором s_ν (после $\nu - 2$ повторения), так как если

$$|f(s_\nu)| \geqslant 2^{\nu-2} |f(s_2)|,$$

и если

$$\nu - 2 > \ln^{-1} 2 \left(\ln \ln DT + \ln \frac{5}{4k_1} + \ln 2c_4 \right),$$

то, не выходя из сегмента $\sigma = \sigma_0$, $|t - t_0| \leqslant \ln^3 DT$, найдем, что

$$|f(s_\nu)| > 2c_4 \ln^2 DT,$$

что противоречит неравенству (6).

Таким образом, мы находим точку $s_0 = \sigma_0 + i\tau_0$, обладающую свойствами 1°, 2° и 4° леммы. Докажем свойство 3°.

Пусть $|f(s_0)| = P \ln DT = M_0$. Рассмотрим круг

$$|s - s_0| < (10^4 k_1 \ln DT)^{-1}.$$

В этом круге

$$\Re f(s) = \sum_{|s-\rho_k| \leqslant 1} \Re \frac{1}{s - \rho_k} + \Re U(s), \quad |U(s)| < 2c_1 \ln DT,$$

следовательно,

$$\Re f(s) = \sum_{|s-\rho_k| \leqslant 1} \frac{\cos \varphi_k}{r_k} + \Re U(s)$$

с вполне понятными обозначениями. При $s = s_0$

$$\left| \sum_{|s_0-\rho_k| \leqslant 1} \frac{\cos \varphi_k}{r_k} \right| < |\Re f(s_0)| + |\Re U(s_0)| < M_0 + \frac{2k_1}{10} \ln DT.$$

Легко видеть, что $\frac{\cos \varphi_k}{r_k}$ может измениться не больше чем на 50%, когда s движется внутри нашего круга, т. е.

$$\left| \sum_{|s-\rho_k| \leqslant 1} \frac{\cos \varphi_k}{r_k} \right| < 2 \left| \sum_{|s_0-\rho_k| \leqslant 1} \frac{\cos \varphi_k}{r_k} \right| < 2M_0 + \frac{4k_1}{10} \ln DT + 3c_3 \ln DT$$

и так как можно взять $c_1 \geqslant 3c_3$, то

$$|\Re f(s) - \Re f(s_0)| < 3M_0 + \frac{4k_1}{10} \ln DT < 10 M_0,$$

следовательно,

$$|\max \Re f(s) - \Re f(s_0)| < 10 M_0$$

в круге

$$|s - s_0| \leqslant r_2 < r_1 = (10^4 k_1 \ln DT)^{-1}.$$

Беря $r_2 = \frac{r_1}{2}$, на основании теоремы Borel-Carathéodory, получаем

$$|f'(s)| \leqslant \frac{2r_2}{(r_2 - r_1)^2} \cdot 10 M_0 = \frac{40 M_0}{r_1}.$$

Теперь, по теореме Лагранжа,

$$|f(s_1)| \geqslant |f(s_0)| - \left| \int_{s_0}^{s_1} f'(\xi)\, d\xi \right| \geqslant M_0 - \frac{40 M_0}{r_1} |s_1 - s_0| = \frac{M_0}{2}$$

при $|s_1 - s_0| \leqslant r = 0{,}01 r_1 = (10^6 k_1 \ln DT)^{-1}$, что и доказывает свойство 3° леммы.

§ 4. По классической теореме L-рядов, для $\sigma \geqslant \frac{1}{4}$

$$f(s) = \sum_{(\rho_k)} \left(\frac{1}{s - \rho_k} + \frac{1}{\rho_k} \right) + \varphi(s),$$

где суммирование распространено на все нули критической полосы и

$$|\varphi(s)| < c_5 \ln D(|t|+2).$$

Функция $f(s)$ регулярна для $\sigma \geqslant \sigma_0 - r$, $|t-\tau_0| \leqslant \frac{1}{2}\ln^4 DT$ (см. леммы 1 и 2).

Нам понадобится вспомогательная функция $f_1(s)$, регулярная в полуплоскости $\sigma \geqslant \sigma_0 - r$. Составим сумму

$$F(s) = \sum_{|\Im\rho_k - \tau_0| \geqslant \frac{\ln^4 DT}{3}} \left(\frac{1}{s-\rho_k} + \frac{1}{\rho_k}\right),$$

где суммирование распространяется на все нули критической полосы, для которых $|\Im\rho_k - \tau_0| \geqslant \frac{\ln^4 DT}{3}$.

Определим вспомогательную функцию $f_1(s)$ так:

$$f_1(s) = f(s) - (F(s) - F(2+i\tau_0)).$$

Для оценки $f_1(s)$ разберем два случая:

a) $|t-\tau_0| \leqslant (\ln\ln DT)^2$. В этом случае, используя формулу для числа нулей L-ряда в критической полосе, лежащих между $t=n$ и $t=n+1$ (см. вывод формулы (6)), получаем

$$|F(s) - F(2+i\tau_0)| < \sum_{|\Im\rho_k - \tau_0| \geqslant \frac{\ln^4 DT}{3}} \left|\frac{2+i\tau_0 - s}{(2+i\tau_0-\rho_k)(s-\rho_k)}\right| \ll \frac{1}{\ln^2 DT}.$$

Отсюда следует:

$$f_1(s) = f(s) + O\left(\frac{1}{\ln^2 DT}\right) \quad \text{для} \quad \sigma = \sigma_0 - r, \quad |t-\tau_0| \leqslant (\ln\ln DT)^2. \tag{7}$$

b) $|t-\tau_0| > (\ln\ln DT)^2$. Известно, что $f(2+i\tau_0) = O(1)$. Поэтому

$$f(2+i\tau_0) = \sum_{|\Im\rho_k - \tau_0| < \frac{\ln^4 DT}{3}} \left(\frac{1}{2+i\tau_0-\rho_k} + \frac{1}{\rho_k}\right) + F(2+i\tau_0) + \varphi(2+i\tau_0) = O(1),$$

$$F(2+i\tau_0)| < \sum_{|\Im\rho_k - \tau_0| < \frac{\ln^4 DT}{3}} \left|\frac{1}{2+i\tau_0-\rho_k} + \frac{1}{\rho_k}\right| + |\varphi(2+i\tau_0)| + O(1) \ll \ln^5 DT.$$

Далее,

$$|f(s) - F(s)| \ll \ln^5 DT + \ln D(|t|+2).$$

Соединяя эти результаты, получаем оценку:

$$|f_1(s)| < \ln^6 DT + c_5 \ln D(|t|+2) \quad \text{для} \quad \sigma \geqslant \sigma_0 - r,$$
$$|t-\tau_0| > (\ln\ln DT)^2. \tag{8}$$

§ 5. По лемме 2,

$$\max|f(s)| \leqslant 2P\ln DT, \quad \sigma = \sigma_0,$$
$$\max|f(s)| \geqslant \frac{P}{2}\ln DT, \quad \sigma = \sigma_0 + r = \sigma_1,$$
$$|t-\tau_0|^2 \leqslant (\ln\ln DT)^2.$$

Тогда для функции $\Gamma(s-i\tau_0) f_1(s)$

$$\begin{aligned} \max |\Gamma(s-i\tau_0) f_1(s)| &= M_0 \leqslant c_6 P \ln DT, \quad \sigma=\sigma_0, \\ \max |\Gamma(s-i\tau_0) f_1(s)| &= M_1 \geqslant c_7 P \ln DT, \quad \sigma=\sigma_1, \end{aligned} \tag{9}$$

в силу того, что $|\Gamma(s-i\tau_0)| = O\left((|t-\tau_0|+1)^{\sigma-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\pi}{2}|t-\tau_0|\right)\right)$, леммы 2 и неравенств (7) и (8). По тем же причинам следует, что максимумы достигаются при $|t-\tau_0| \leqslant (\ln\ln DT)^2$.

ЛЕММА 3. *Существует точка $s_2=\sigma_2+i\tau_2$, удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $\sigma_2=\sigma_0+\frac{\ln\ln DT}{k_2 \ln DT}$, $\quad k_2=k_2(k_1, \lambda)$,
2. $|\tau_2-\tau_0| \leqslant (\ln\ln DT)^2$,
3. $|f(s_2) \geqslant c_8 (\ln DT)^{1-\frac{\lambda}{2}}$.

Доказательство. В силу сделанного замечания о $\Gamma(s-i\tau_0)$, на $\sigma=\sigma_2$ достигается $\max|\Gamma(s-i\tau_0) f_1(s)| = M_2$ и при этом $|t-\tau_0| \leqslant (\ln\ln DT)^2$.

Применяя теорему Doetsch'а к прямым $\sigma=\sigma_0$, $\sigma=\sigma_1$, $\sigma=\sigma_2$, получаем

$$M_1^{\sigma_2-\sigma_0} \leqslant M_0^{\sigma_2-\sigma_1} M_2^{\sigma_1-\sigma_0}$$

и, на основании (9),

$$M_2 \geqslant c_8' (\ln DT)^{1+\frac{\ln \frac{c_7}{c_6}}{k_2 \ln DT}\cdot 10^6 k_1 \ln DT}.$$

Будем считать $\ln\frac{c_7}{c_6} < 0$ и положим $k_2=\frac{2}{\lambda} k_1 \cdot 10^6 \left|\ln\frac{c_7}{c_6}\right|$; тогда найдем, что

$$M_2 \geqslant c_8' (\ln DT)^{1-\frac{\lambda}{2}}.$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$|f(s_2)| \geqslant c_8 (\ln DT)^{1-\frac{\lambda}{2}}.$$

ЛЕММА 4. *Существует постоянная $k_3=k_3(k_2)$ такая, что для $\delta_1=(DT)^{-k_3}$*

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{s_2}} e^{-\delta_1 n}\right| > c_9 (\ln DT)^{1-\frac{\lambda}{2}}.$$

Доказательство. На основании известной формулы Littlewood'а,

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{s_2}} e^{-\delta n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \delta^{s_2-w}\Gamma(w-s_2) f(w)\, dw.$$

Беря контур интегрирования по отрезкам

$$\Gamma_1(\sigma=\sigma_0,\ |t-\tau_0| \leqslant \ln^2 DT), \quad \Gamma_2(\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant 2,\ |t-\tau_0| \leqslant \ln^2 DT),$$
$$\Gamma_3(\sigma=2,\ |t-\tau_0| \geqslant \ln^2 DT),$$

проходим полюс $w = s_2$ и получаем

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^{s_2}} e^{-\delta n} = f(s_2) + R,$$

где $R = \int\limits_{\Gamma_1} + \int\limits_{\Gamma_2} + \int\limits_{\Gamma_3}$. Оценим эти интегралы, принимая во внимание неравенство (6) и упомянутую выше оценку для $\Gamma(s)$.

$$\left|\int\limits_{\Gamma_1}\right| < \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\tau_0 - \ln^2 DT}^{\tau_0 + \ln^2 DT} \delta^{\frac{\ln\ln DT}{k_2 \ln DT}} \cdot \left|\Gamma\left(-\frac{\ln\ln DT}{k_2 \ln DT} + it - i\tau_0\right)\right| \cdot |f(\sigma_0 + it)|\, dt \ll$$

$$\ll \ln^2 DT \cdot \exp\left(\frac{-k_3 \ln\ln DT}{k_2}\right) \cdot \frac{k_2 \ln DT}{\ln\ln DT} \cdot \ln^2 DT \ll (\ln DT)^{5 - \frac{k_3}{k_2}} = o(1),$$

$$k_3 = 6\, k_2$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma_2}\right| < \delta^{-\frac{4}{3}} \cdot \ln^3 DT \cdot \exp\left(-\frac{\ln^2 DT}{2}\right) \ll (DT)^{\frac{4}{3} k_3 - \frac{1}{2} \ln DT} = o(1),$$

$$\left|\int\limits_{\Gamma_3}\right| = o(1).$$

Следовательно, $R = o(1)$, что и требовалось доказать.

§ 6. Рассмотрим $L(s, \chi)$, имеющий нуль в прямоугольнике (2). Напомним, что $\sigma \geqslant \frac{2}{3}$, $|\tau_2 - T_1| < \ln^7 DT$. Введем число

$$N_\psi = \exp\left(\frac{\lambda}{4} \frac{\ln D}{\psi} \ln\ln DT\right).$$

ЛЕММА 5.

$$\left|\sum_{p \geqslant N_\psi} \frac{\chi(p) \ln p}{p^{s_2}} e^{-\delta_1 p}\right| > c_{10} (\ln DT)^{1 - \frac{\lambda}{2}}.$$

Доказательство. Так как $\sigma_2 \geqslant \frac{2}{3}$, то

$$\sum_{n_1 = 1}^{\infty} \frac{\chi(n_1)\Lambda(n_1)}{n_1^{s_2}} e^{-\delta_1 n_1} = O(1), \quad n_1 = p^k, \quad k > 1.$$

Далее,

$$\left|\sum_{p \leqslant N_\psi} \frac{\chi(p) \ln p}{p^{s_2}} e^{-\delta_1 p}\right| < \sum_{p \leqslant N_\psi} \frac{\ln p}{p^{1 - \frac{\psi}{\ln DT}}} < N_\psi^{\frac{\psi}{\ln DT}} \sum_{p \leqslant N_\psi} \frac{\ln p}{p} \ll N_\psi^{\frac{\psi}{\ln DT}} \ln N_\psi <$$

$$< (\ln DT)^{\frac{\lambda}{4}} \cdot \frac{\lambda}{4} \cdot \frac{\ln D}{\psi} \cdot \ln\ln DT \ll (\ln D)^{1-\lambda} (\ln DT)^{\frac{\lambda}{3}} \ll (\ln DT)^{1 - \lambda + \frac{\lambda}{3}} =$$

$$= (\ln DT)^{1 - \frac{2}{3}\lambda};$$

$$\left|\sum_{p \geqslant N_\psi} \frac{\chi(p) \ln p}{p^{s_2}} e^{-\delta_1 p}\right| > c_9 (\ln DT)^{1 - \frac{\lambda}{2}} - O(1) - O(\ln DT)^{1 - \frac{2}{3}\lambda} > c_{10} (\ln DT)^{1 - \frac{\lambda}{2}}.$$

§ 7. Обозначим

$$S(N)=\sum_{p\leq N}\chi(p)\,p^{-iT_1};$$

тогда справедлива

ЛЕММА 6. *Существует такое число* $N_{1\chi}\in[N_\psi,\ \delta_1^{-2}]$, *что имеет место неравенство*

$$|S(N_1)|>N_{1\chi}^{1-\frac{2\psi}{\ln DT}}(\ln DT)^{-8}.$$

Доказательство. С помощью частного суммирования из леммы 5 получаем

$$\left|\sum_{n\geqslant N_\psi}S(n)\left(\frac{e^{-\delta_1 n}\ln n}{n^{s_2-iT_1}}-\frac{e^{-\delta_1(n+1)}\ln(n+1)}{(n+1)^{s_2-iT_1}}\right)\right|>\frac{c_{10}}{2}(\ln DT)^{1-\frac{\lambda}{2}}.$$

Сумму $\sum\limits_{N_\psi}^{\infty}$ можно заменить суммой $\sum\limits_{N_\psi}^{\delta_1^{-2}}$, так как

$$\left|\sum_{\delta_1^{-2}}^{\infty}\right|<2\sum_{\delta_1^{-2}}^{\infty}n^{\frac{1}{3}}e^{-\delta_1 n}=o(1).$$

Далее, ввиду того, что

$$|e^{-\delta_1}-1+\delta_1|<\delta_1^2,\quad \delta_1<0,1,$$

имеем

$$\left|\sum_{n=N_\psi}^{\delta_1^{-2}}S(n)\left(\frac{\ln n}{n^{s_2-iT_1}}-\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{s_2-iT_1}}+\frac{\delta_1\ln(n+1)}{(n+1)^{s_2-iT_1}}\right)e^{-\delta_1 n}\right|>\frac{\sqrt{\ln DT}}{2},$$

или

$$S_1=\sum_{n=N_\psi}^{\delta_1^{-2}}|S(n)|\cdot\left(\frac{2\ln n\cdot|s_2-iT_1|}{n^{2-\frac{\psi}{\ln DT}}}+\frac{\delta_1\ln n}{n^{1-\frac{\psi}{\ln DT}}}\right)e^{-\delta_1 n}>\frac{\sqrt{\ln DT}}{2}.$$

Предположим теперь, что

$$|S(n)|<n^{1-\frac{2\psi}{\ln DT}}(\ln DT)^{-8}.$$

Тогда

$$S_1<(\ln DT)^{-8}\sum_{n=N_\psi}^{\delta_1^{-2}}\left(\frac{4k_3\ln^8 DT}{n^{1+\frac{\psi}{\ln DT}}}+\frac{\delta_1\ln DT}{n^{\frac{\psi}{\ln DT}}}\right)=O(1),$$

что невозможно. Следовательно, лемма доказана.

§ 8. Обозначим $\frac{\psi}{\ln DT}=\alpha_\psi$. По лемме 6,

$$|S(N_{1\chi})|>N_{1\chi}^{1-2\alpha_\psi}(\ln DT)^{-8}$$

ЛЕММА 7. *Существует больше чем* $Qe^{-6k_3\psi}(\ln DT)^{-10}$ *L-рядов и одно для всех них число* $N_2\in[N_\psi,\ \delta_1^{-2}]$ *такое, что*

$$|S(N_2)|>N_2^{1-2\alpha_\psi}(\ln DT)^{-9}$$

для всех указанных L-рядов.

Доказательство. Пусть число $N_{2\chi}$ удовлетворяет условию

$$N_{2\chi} = N_{1\chi} \pm \theta N_{1\chi}^{1-3\alpha\psi} (\ln DT)^{-8}, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1.$$

На основании определения суммы $S(N)$, имеем

$$|S(N_{2\chi})| > |S(N_{1\chi})| - N_{1\chi}^{1-3\alpha\psi} (\ln DT)^{-8} > N_{1\chi}^{1-2\alpha\psi} (\ln DT)^{-8} -$$
$$- N_{1\chi}^{1-\alpha 3\psi} (\ln DT)^{-8} = N_{1\chi}^{1-2\alpha\psi} (\ln DT)^{-8} (1 - N_{1\chi}^{-\alpha\psi}) > N_{1\chi}^{1-2\alpha\psi} (\ln DT)^{-9} \cdot 2.$$

Далее,

$$N_{2\chi}^{1-2\alpha\psi} = (N_{1\chi} \pm \theta N_{1\chi}^{1-3\alpha\psi} (\ln DT)^{-8})^{1-2\alpha\psi} = N_{1\chi}^{1-2\alpha\psi} (1 \pm \theta N_{1\chi}^{-3\alpha\psi} (\ln DT)^{-8})^{1-2\alpha\psi},$$

т. е. $N_{1\chi}^{1-2\alpha\psi} > N_{2\chi}^{1-2\alpha\psi} \cdot \frac{1}{2}$ и, следовательно,

$$|S(N_{2\chi})| > N_{2\chi}^{1-2\alpha\psi} (\ln DT)^{-9}.$$

Разделим сегмент $[N_\psi, \delta_1^{-2}]$ на сегменты

$$\left[N_\psi, \frac{\delta_1^{-2}}{2^m}\right], \left[\frac{\delta_1^{-2}}{2^m}, \frac{\delta_1^{-2}}{2^{m-1}}\right], \ldots, \left[\frac{\delta_1^{-2}}{2^{k+1}}, \frac{\delta_1^{-2}}{2^k}\right], \ldots, \left[\frac{\delta_1^{-2}}{2}, \frac{\delta_1^{-2}}{1}\right],$$

число которых $m \ll \ln^2 DT$. Следовательно, имеется больше чем $\frac{Q}{\ln^2 DT}$ L-рядов с числами $N_{1\chi} \in \left[\frac{\delta_1^{-2}}{2^{k+1}}, \frac{\delta_1^{-2}}{2^k}\right]$. Каждому $N_{1\chi}$ соответствует зона чисел $N_{2\chi} \in \left[\frac{\delta_1^{-2}}{2^{k+1}}, \frac{\delta_1^{-2}}{2^k}\right]$. Общая протяженность этих зон больше

$$Q \cdot (\ln DT)^{-2} \left(\frac{\delta_1^{-2}}{2^{k+1}}\right)^{1-3\alpha\psi} (\ln DT)^{-8}$$

и они расположены на сегменте длины $\frac{\delta_1^{-2}}{2^{k+1}}$. Следовательно, они будут перекрываться хотя бы в одной точке N_2 в количестве, большем чем

$$\frac{Q}{(\ln DT)^{10}} \left(\frac{\delta_1^{-2}}{2^{k+1}}\right)^{1-3\alpha\psi} : \frac{\delta_1^{-2}}{2^{k+1}} > Q \cdot e^{-6k_3\psi} (\ln DT)^{-10},$$

что и требовалось доказать.

§ 9. Выбираем теперь целое положительное число ν такое, что

$$N_2^\nu = N_3 \in [D, \delta_1^{-2}].$$

На основании леммы 7 для наших L-рядов, имеем

$$|S(N_2, \chi)|^\nu = \left|\sum_{n_1 \leqslant N_3} \chi(n_1) \xi(n_1)\right| > N_2^{\nu(1-2\alpha\psi)} (\ln DT)^{-9\nu} = N_3^{1-2\alpha\psi} (\ln DT)^{-9\nu},$$

где

$$\xi(n_1) = \sum_{p_1 \ldots p_\nu = n_1} (p_1 \ldots p_\nu)^{-iT_1}.$$

ЛЕММА 8. *Для* $n_1 \leqslant N_3$, $|\xi(n_1)| < \exp\left(\frac{9}{\lambda}\psi\right)$.

Доказательство. Если $N_2 \geqslant D$, то полагаем $\nu = 1$; в худшем случае $N_2 = N_\psi$. Тогда

$$D^2 \geqslant N_\psi^\nu \geqslant D, \quad \nu \leqslant \frac{8\psi}{\lambda \ln\ln DT},$$

$$|\xi(n_1)| < \sum_{p_1\ldots p_\nu = n_1} 1 < \nu^\nu < \exp\left(\frac{9}{\lambda}\psi\right).$$

§ 10. Доказательство теоремы. Сумма (по всем χ_a, о которых шла речь в лемме 7)

$$\sum_{\chi_a}\Big|\sum_{n_1\leqslant N_3}\chi_a(n_1)\xi(n_1)\Big|^2 > \frac{Q}{(\ln DT)^{10}}e^{-6k_3\psi}N_3^{2-4a\psi}(\ln DT)^{-18\nu} >$$

$$> \frac{Q}{(\ln DT)^{28}}e^{-6k_3\psi}N_3^2 e^{-8k_3\psi}e^{-\frac{144}{\lambda}\psi} > \frac{Q}{(\ln DT)^{28}}e^{-\left(14k_3+\frac{72}{\lambda}\right)\psi}N_3^2.$$

С другой стороны, так как $N_3 \geqslant D$, то

$$\sum_{\chi}\Big|\sum_{n_1<N_3}\chi(n_1)\xi(n_1)\Big|^2 = \sum_{n\leqslant N_3}\sum_{n_1\leqslant N_3}\xi(n)\overline{\xi(n_1)}\sum_{\chi}\chi(n)\overline{\chi(n_1)} <$$

$$< \varphi\sum_{n\leqslant N_3}\sum_{\substack{n_1\leqslant N_3\\ n_1\equiv n\,(\mathrm{mod}\,D)}} e^{\frac{5}{\lambda}\psi} < e^{\frac{10}{\lambda}\psi}N_3^2.$$

Сравнение дает:

$$Q(\ln DT)^{-28}e^{-\left(14k_3+\frac{144}{\lambda}\right)\psi}N_3^2 < e^{\frac{18}{\lambda}\psi}N_3^2,$$

т. е.

$$Q < e^{\left(14k_3+\frac{162}{\lambda}\right)\psi+28\ln\ln DT},$$

что и требовалось доказать.

Приложение доказанной теоремы к изучению распределения простых чисел дано в отдельной статье.

Поступило
27.II.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Линник Ю. В., Об L-рядах Дирихле и суммах по простым числам, Матем. сб., 15 (57) : 1 (1944), 3—12.

[2] Siegel C. L., On the zeros of the Dirichlet L-functions, Ann. of Math., v. 46, N 3 (1945), 409—422.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 57—78

А. РЕНЬИ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧЕТНЫХ ЧИСЕЛ В ВИДЕ СУММЫ ПРОСТОГО И ПОЧТИ ПРОСТОГО ЧИСЛА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе доказывается, что всякое четное число есть сумма простого и «почти простого» (имеющего ограниченное число простых множителей) числа. Estermann доказал это ранее только условно (при допущении гипотезы Римана). Доказательство основывается, помимо метода Виго Бруна, на одной новой теореме о L-рядах. Устанавливается также существование бесконечного множества простых p, для которых $p+2$ «почти простые».

В переписке Эйлера с Гольдбахом, относящейся к 1742 г., были высказаны следующие предположения:

I. *Всякое нечетное число* ($\geqslant 9$) *есть сумма трех нечетных простых.*

II. *Всякое четное число* ($\geqslant 6$) *есть сумма двух простых.*

Первое предположение было доказано И. М. Виноградовым (1) в 1937 г. Второе не доказано до сих пор, но за последнее время было найдено много интересных подходов к этой проблеме.

Из I прямо следует, что всякое четное число есть сумма четырех простых.

Н. Г. Чудаков (2) показал, пользуясь методом И. М. Виноградова, что почти все четные числа представимы в виде суммы двух простых. Заметим, что первый результат такого рода был получен Л. Шнирельманом: он установил (3), что множество четных чисел, представимых в виде суммы двух простых, имеет положительную плотность.

Другие результаты касаются представления всех без исключения четных чисел, но в форме несколько более общей по сравнению с формулировкой Гольдбаха. Начало этим исследованиям положил Виго Брун в 1920 г.

Виго Брун (4), пользуясь элементарным методом эратосфенова «решета», доказал, что всякое четное число может быть представлено суммой двух нечетных «почти простых» чисел, т. е. чисел, имеющих ограниченное число простых множителей, а именно $\leqslant 9$.

Метод Виго Бруна был уточнен рядом авторов, постепенно снижавших число простых множителей. Лучшие результаты были достигнуты А. А. Бухштабом (5) и В. А. Тартаковским (6); они получили 4 вместо 9.

Заметим, что второе предположение Гольдбаха до сих пор не удалось доказать даже с помощью известной гипотезы Римана, которая позволяет решить большое количество нерешенных проблем теории чисел.

Такой «условный» результат получил Th. Estermann (7); он показал, что всякое достаточно большое четное число есть сумма простого и почти простого числа (последнее содержит не более 6 простых множителей) в предположении, что гипотеза Римана верна для всех L-функций Дирихле. В этом направлении наилучший результат был без всяких дополнительных гипотез получен Бухштабом (8), который показал, что всякое четное число может быть представлено в виде $2N = p + \Pi$, где все простые сомножители Π превосходят $(\log N)^{\alpha}$, причем $\alpha > 0$—произвольная постоянная.

За последнее время Ю. В. Линник доказал ряд теорем о нулях L-функций [см. (9) и (10)]; близкие, хотя несколько более слабые, результаты получили также P. Turán (11) и C. L. Siegel (12).

Во многих случаях [см. особенно (10)] эти результаты оказались способными заменить собою гипотезу Римана. Поэтому естественно возник вопрос о возможности применения таких результатов к теореме Estermann'а. В настоящей статье мы покажем, что это действительно возможно*. Будет доказана следующая теорема:

ТЕОРЕМА 1. *Всякое четное число может быть представлено в виде*

$$2N = p + P,$$

где p — простое, а P — почти простое число, т. е. такое, число простых множителей которого не превосходит некоторой абсолютной постоянной K.

Что касается значения K, то для простоты доказательства мы не будем стараться получить наилучшее (т. е. наименьшее) его значение, которого можно добиться нашим методом. Все же мы дадим для K некоторую грубую оценку.

Доказательство теоремы 1 будет основано на методе Виго Бруна. Одновременно доказывается и теорема 2, которую можно рассматривать как некоторый шаг в направлении известной гипотезы о существовании бесконечного множества простых чисел — «близнецов».

ТЕОРЕМА 2. *Существует бесконечная последовательность простых чисел p таких, что числа $P = p + 2$ почти простые, т. е. количество их простых множителей не превосходит постоянной K.*

Как было замечено выше, идея доказательства теоремы 1 заключается в замене гипотезы Римана в доказательстве Estermann'а некоторой теоремой о распределении (в среднем) нулей L-функций. Понадобившаяся для этого новая теорема (теорема 3) получена путем обобщения и комбинирования двух методов Ю. В. Линника — метода «большого решета» (13), который обобщается в лемме 1, и метода, примененного Ю. В. Линником в статье (9).

---

* Краткое изложение результатов опубликовано ранее (18).

Имея в виду применения этой теоремы в дальнейшем, мы сформулируем здесь один ее частный случай.

ТЕОРЕМА 3b. *Пусть $A \geqslant c_1$ — некоторое достаточно большое число*. Тогда для всех простых p в промежутке $A \leqslant p < 2A$, за исключением не более $A^{\frac{1}{4}}$ таких p, и для всякого неглавного характера $\chi(n)$, принадлежащего модулю p, $L(s, \chi) \neq 0$ в области $s = \sigma + it$, $\sigma \geqslant 1 - \delta$, $|t| < \log^8 p$, где $\delta > 0$ — некоторая абсолютная постоянная.*

Помимо теоремы 3 мы пользуемся также результатами E. C. Titchmarsh'a [14], A. Page'a [15] и C. L. Siegel'я [16].

В качестве оценки снизу для числа представлений $2N$ в виде $2N = p + P$ (p — простое, P — почти простое) мы получаем всего лишь $O\left(\frac{N}{\log^3 N}\right)$, а не $O\left(\frac{N}{\log^2 N}\right)$. Такой слабый с этой точки зрения результат получается потому, что мы пользуемся суммой $\sum \log p e^{-p\frac{\log 2N}{2N}}$ вместо суммы $\sum \log p$, т. е. фактически рассматриваем только p, меньшие $\frac{N}{(\log N)^{\frac{1}{2}}}$. Делается это для того, чтобы вместо классических формул типа Римана-Адамара можно было применить интегральную формулу J. E. Littlewood'a [17]:

$$\sum_{1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) e^{-nt} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{L'}{L}(s) \Gamma(s) t^{-s} ds, \tag{1}$$

имеющую то преимущество, что она дает в теореме 3 сравнительно «низкий» прямоугольник, свободный от нулей. Впрочем, уточнение нашего результата в этом направлении не представит принципиальных трудностей.

Пользуюсь случаем выразить свою искреннюю признательность Ю. В. Линнику, привлекшему мое внимание к рассматриваемой проблеме и помогавшему в моей работе своими ценными указаниями.

Глава 1

Применение метода Виго Бруна

1. Пусть N — целое положительное, p — простое; положим

$$a_p = \log p \cdot \exp\left(-p \frac{\log 2N}{2N}\right); \tag{1.1}$$

обозначим, далее,

$$H_0(2N) = \sum_{\substack{3 \leqslant p < 2N \\ (2N-p, \Delta_0)=1}} a_p, \tag{1.2}$$

где

$$\Delta_0 = \prod_{2 \leqslant p \leqslant (2N)^{\frac{1}{R}}} p \tag{1.3}$$

* В дальнейшем $c_1, c_2, \ldots$ означают положительные постоянные.

и пусть

$$H(2N) = \sum_{\substack{3 \leq p < 2N \\ (2N-p, D_0)=1 \\ p \equiv v_1 \bmod Q_0}} a_p, \tag{1.4}$$

где

$$D_0 = \prod_{\substack{p_T \leq p \leq (2N)^{\frac{1}{R}} \\ (p, 2N)=1}} p, \quad Q_0 = \prod_{\substack{2 \leq p \leq p_T \\ (p, 2N)=1}} p, \tag{1.5}$$

v_1 таково, что $(v_1(2N-v_1), Q_0) = 1$, T и R — постоянные, p_T означает T-е простое число.

Если (1.4) содержит член a_p, то, очевидно, $(2N-p, D_0 Q_0) = 1$. Таким образом, (1.4) содержит, помимо членов, входящих в (1.2), только такие члены, для которых $p/2N$. Но число простых делителей $2N$ не превосходит $\frac{\log 2N}{\log 2}$, так что, принимая во внимание неравенство $a_p < \log 2N$, имеем

$$H_0(2N) > H(2N) - \frac{\log^2 2N}{\log 2}. \tag{1.6}$$

В дальнейшем мы докажем, что $H(2N) > c_1 \frac{N}{\log^2 N}$.

Из (1.6) вытекает, что $H_0(2N) > \frac{c_2 N}{\log^2 N}$ при $N \geqslant c_3$. Но это означает, что существует такое простое p (в действительности из (1.6) следует, что существует $O\left(\frac{N}{\log^3 N}\right)$ такого рода простых чисел), при котором $P = 2N - p$ делится только на простые, бо́льшие $(2N)^{\frac{1}{R}}$. Следовательно, число простых делителей P меньше R, что и доказывает теорему 1.

2. Следуя В. Бруну, мы берем две постоянные $1 < h < h_0$ и обозначаем $\tau = \log h_0$. Через p_T мы обозначаем наименьшее простое, для которого при $w > p_T$

$$\sum_{w \leq p \leq w^h} \frac{1}{p-1} \leqslant \tau \quad \text{и} \quad \prod_{w \leq p \leq w^h} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) > \frac{1}{h_0}.$$

Полагаем, далее, $Y = (2N)^{\frac{1}{R}}$. Значение постоянной R будет выбрано в последней главе.

Определим множество E целых чисел, не делящихся на квадраты, следующим образом: в E входят числа $Q = p_1 p_2 \ldots p_r Q_0$, где $p_1 > p_2 > \ldots > p_r$, причем $(p_i, 2N) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, r$, Q_0 определено формулой (1.5) и

$$p_T < p_i \leqslant Y^{\frac{1}{h^{\left[\frac{i}{2}\right]}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, r); \tag{1.7}$$

здесь $r \leqslant 2m+1$, где m есть наименьшее целое такое, что $Y^{\frac{1}{h^{m+1}}} \leqslant p_T$.

Само Q_0 также должно принадлежать множеству E.

Обозначим

$$P(x, Q) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \equiv l \bmod Q}} a_p = \frac{x}{\varphi(Q) \log x} + R_Q(x), \tag{1.8}$$

где $(l, Q) = 1$.

Следуя Бруну, получаем

$$H(2N) \geqslant \sum_{Q \in E} \mu\left(\frac{Q}{Q_0}\right) P(2N, Q), \tag{1.9}$$

где $\mu(n)$ — функция Мебиуса. Отсюда

$$H(2N) \geqslant \frac{\omega N}{\varphi(Q_0) \log N} \cdot \prod_{p_T < p \leqslant Y} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) - \sum_{Q \in E} |R_Q(2N)|, \tag{1.10}$$

где

$$\omega = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h_0 \cdot \tau^2 k^2)^k}{2k!}.$$

Возьмем $h_0 = e^{\frac{1}{4}} = 1{,}28\ldots$ и $h = 1{,}25$. Тогда получим $\omega \geqslant 0{,}75$. Следовательно,

$$H(2N) > \frac{c_4 N}{\log^2 N} - \sum_{Q \in E} |R_Q(2N)|. \tag{1.11}$$

Остается только оценить остаточный член в (1.11). Это будет сделано в следующих главах, где будет показано, что

$$\sum_{Q \in E} |R_Q(2N)| < \frac{5N}{\log^3 N}$$

и, следовательно,

$$H(2N) > \frac{c_1 N}{\log^2 N} \text{ для } N \geqslant c_{43}.$$

Как было уже замечено, это доказывает теорему 1.

Глава 2

Обобщение «большого решета»

1. ЛЕММА 1. *Пусть даны произвольная последовательность целых чисел* $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_Z \leqslant X$, *неотрицательная функция* $g(n)$, *число* $q < \sqrt{X}$, *не делящееся на целый квадрат, и число* A *такое, что* $2 \leqslant A \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{X}{q}}$. *Положим*

$$k = \frac{\log q}{\log A} + 1, \tag{2.1}$$

$$m = \max_{1 \leqslant j \leqslant Z} g(n_j), \tag{2.2}$$

$$S = \sum_{j=1}^{Z} g(n_j), \quad \lambda = \frac{S}{X}; \tag{2.3}$$

$$s_u = \sum_{n_j \equiv u \bmod q} g(n_j), \quad 0 \leqslant u \leqslant q-1. \tag{2.4}$$

Если p — простое, $(p, q)=1$, $A \leqslant p < 2A$, то, положив

$$s_r = \sum_{n_j \equiv r \bmod pq} g(n_j), \quad 0 \leqslant r \leqslant pq-1, \tag{2.5}$$

получим, очевидно,

$$S_u = s_u + s_{u+q} + s_{u+2q} + \ldots + s_{u+(p-1)q}. \tag{2.6}$$

Тогда для всех простых p таких, что $(p, q)=1$, $A \leqslant p < 2A$, за исключением не более $\frac{12\pi}{5}\left(\frac{m}{\lambda}\right)^3 A^{-\frac{1}{2}}$, и для всех вычетов $r \bmod pq$, за исключением не более $(pq)^{1-\frac{1}{9k}}$, имеет место неравенство

$$\left| s_r - \frac{S_u}{p} \right| \leqslant \frac{S}{(pq)^{1+\frac{1}{9k}}}, \quad 0 \leqslant u \leqslant q-1,$$

где $u \equiv r \bmod q$.

Доказательство леммы 1. Обозначим

$$S(t) = \sum_{j=1}^{Z} g(n_j)\, e^{2\pi i n_j t} \tag{2.7}$$

и рассмотрим

$$I_{pq}(\delta_p) = \int_{-\delta_p}^{\delta_p} \sum_{y=0}^{p-1} \sum_{\nu=0}^{q-1} \left| S\left(\frac{y}{p} + \frac{\nu}{q} + t\right)\right|^2 dt, \tag{2.8}$$

где

$$\delta_p = \frac{1}{2\pi X} \cdot \frac{\lambda}{m} \frac{1}{(pq)^{\frac{1}{6k}}}. \tag{2.9}$$

Очевидно, $\delta_p \leqslant \frac{1}{2\pi X}$. Возводя в квадрат выражения в (2.8) и меняя порядок суммирования, получим

$$I_{pq}(\delta_p) = \sum_{j=1}^{Z} \sum_{j'=1}^{Z} g(n_j)\, g(n_{j'}) \left(\sum_{y=0}^{p-1} e^{2\pi i (n_j - n_{j'})\frac{y}{p}} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{q-1} e^{2\pi i (n_j - n_{j'})\frac{\nu}{q}} \right) \cdot \int_{-\delta_p}^{\delta_p} e^{2\pi i (n_j - n_{j'}) t}\, dt. \tag{2.10}$$

Отсюда

$$I_{pq}(\delta_p) = 2pq \sum_{\substack{n_j - n_{j'} \equiv 0 \bmod pq \\ n_j \neq n_{j'}}} g(n_j)\, g(n_{j'}) \frac{\sin 2\pi\, |(n_j - n_{j'})|\, \delta_p}{2\pi\, |(n_j - n_{j'})|} + 2pq\, \delta_p \sum_{j=1}^{Z} g^2(n_j). \tag{2.11}$$

Пользуясь неравенством $\sin \alpha > \alpha - \frac{\alpha^3}{6}$, справедливым при $0 < \alpha \leqslant 1$ $\left(\text{мы можем им пользоваться, так как } \delta_p \leqslant \frac{1}{2\pi X}\right)$, получим

$$I_{pq}(\delta_p) \geqslant 2\delta_p\, pq \left(1 - \frac{4\pi^2\delta_p^2 X^2}{6}\right) \sum_{r=0}^{pq-1} s_r^2. \tag{2.12}$$

Отсюда, в силу очевидного неравенства $s_r \leqslant \frac{mX}{pq}$, следует

$$I_{pq}(\delta_p) \geqslant 2\delta_p\, qp \sum_{r=0}^{pq-1} s_r^2 - \frac{4\pi^2\delta_p^3 X^4 m^2}{3}. \tag{2.13}$$

Аналогично, полагая

$$I_q(\delta_p) = \int_{-\delta_p}^{\delta_p} \sum_{\nu=0}^{q-1} \left| S\left(\frac{\nu}{q} + t\right)\right|^2 dt, \tag{2.14}$$

будем иметь

$$I_q(\delta_p) \leqslant 2pq\,\delta_p \sum_{n_j - n_{j'} \equiv 0 \bmod q} g(n_j)\, g(n_{j'}) \tag{2.15}$$

и точно так же

$$I_q(\delta_p) \leqslant 2\delta_p\, q \sum_{u=0}^{q-1} S_u^2. \tag{2.16}$$

Рассмотрим теперь на единичной окружности $\exp(2\pi i t)$ систему интервалов

$$\frac{y}{p} + \frac{\nu}{q} - \delta_p \leqslant t \leqslant \frac{y}{p} + \frac{\nu}{q} + \delta_p,$$

где $0 \leqslant y \leqslant p-1$, $1 \leqslant \nu \leqslant q-1$, а p пробегает простые числа такие, что $(p, q) = 1$, $A \leqslant p < 2A$. Легко видеть, что эти интервалы не перекрываются, так как при $(p-p')^2 + (\nu-\nu')^2 + (y-y')^2 \neq 0$

$$\left|\left(\frac{y}{p} + \frac{\nu}{q}\right) - \left(\frac{y'}{p'} + \frac{\nu'}{q'}\right)\right| \geqslant \frac{1}{pp'q} \geqslant \frac{1}{4A^2 q} \geqslant \frac{1}{X} > \delta_p + \delta_{p'}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\substack{A \leqslant p < 2A \\ (p,q)=1}} [I_{pq}(\delta_p) - I_q(\delta_p)] \leqslant \int_0^1 |S(t)|^2\, dt = \sum_{j=1}^{Z} g^2(n_j) \leqslant m^2 X. \tag{2.17}$$

С другой стороны, из (2.6) вытекает, что

$$\sum_{j=0}^{p-1} s_{u+jq} - \frac{S_u^2}{p} = \sum_{j=0}^{p-1} \left(s_{u+jq} - \frac{S_u}{p}\right)^2. \tag{2.18}$$

Следовательно, из (2.13), (2.16) и (2.18) мы получаем

$$I_{pq}(\delta_p) - I_q(\delta_p) \geqslant 2\delta_p\, pq \sum_{\substack{r=0 \\ u \equiv r \bmod q}}^{pq-1} \left(s_r - \frac{S_u}{p}\right)^2 - \frac{4\pi^2\delta_p^3 X^4 m^2}{3}. \tag{2.19}$$

Рассмотрим, теперь, некоторое исключительное простое p, для которого существует более $(pq)^{1-\frac{1}{9k}}$ вычетов r по модулю pq таких, что

$$\left| s_r - \frac{S_u}{p} \right| > \frac{S}{(pq)^{1+\frac{1}{9k}}},$$

где $u \equiv r \bmod q$. Отсюда следует, что для такого исключительного p

$$\sum_{\substack{r=0 \\ u \equiv r \bmod q}} \left(s_r - \frac{S_u}{p}\right)^2 \geqslant \frac{S^2}{(pq)^{1+\frac{1}{3k}}}, \tag{2.20}$$

или, подставляя значение δ_p из (2.9), получим из (2.19) и (2.20)

$$I_{pq}(\delta_p) - I_q(\delta_p) > \frac{5}{6\pi} \frac{X\lambda^3}{m(pq)^{\frac{1}{2k}}} \geqslant \frac{5}{12\pi} \frac{X\lambda^3}{mA^{\frac{1}{2}}}. \tag{2.21}$$

Очевидно, $I_{pq}(\delta_p) - I_q(\delta_p) > 0$ для любого p, и, следовательно, сумма $\sum [I_{pq}(\delta_p) - I_q(\delta_p)]$, распространенная на все исключительные p, будет, согласно (2.17), меньше m^2X.

Таким образом, если $v(A)$ есть число таких исключительных p, то, в силу (2.21) и (2.17),

$$\frac{5}{12\pi} \cdot \frac{X\lambda^3}{mA^{\frac{1}{2}}} v(A) \leqslant m^2 X,$$

или

$$v(A) \leqslant \frac{12\pi}{5} \left(\frac{m}{\lambda}\right)^3 A^{\frac{1}{2}}, \tag{2.22}$$

что и доказывает лемму 1.

2. В качестве применения леммы 1 докажем лемму 2, но предварительно введем некоторые новые определения.

Известно, что всякий характер, принадлежащий модулю D, не делящемуся на квадраты, может быть разложен, и притом единственным образом, в произведение характеров, принадлежащих модулям простых множителей числа D. Так, например, если $D = pq$, $(p, q) = 1$, то, каков бы ни был характер $\chi_D(n)$, принадлежащий модулю $D = pq$,

$$\chi_D(n) = \chi_p(n)\chi_q(n), \tag{2.23}$$

где $\chi_p(n)$, $\chi_q(n)$—характеры, принадлежащие соответственно модулям p и q.

Если в (2.23) $\chi_p(n)$ не является главным характером, то мы скажем, что характер $\chi_D(n)$ *примитивен относительно* p. Очевидно, что если $\chi_D(n)$ примитивен относительно всякого простого множителя числа D, то $\chi_D(n)$ примитивен в обычном смысле.

ЛЕММА. 2. *Пусть* $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_Z \leqslant X$ — *произвольная последовательность целых чисел,* $q \leqslant \sqrt{X}$ — *число, не делящееся на квадраты,* A — *любое число, удовлетворяющее неравенствам* $2 \leqslant A \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\frac{X}{q}}$, $g(n)$— *произвольная неотрицательная функция,*

$$m = \max g(n_j); \tag{2.24}$$

пусть, далее, $\chi(n)$ — *какой-нибудь характер, принадлежащий модулю* $D = pq$, *где* $(p, q) = 1$, $A \leqslant p < 2A$, *примитивный относительно* p, *а* p —

не исключительное простое в смысле леммы 1; *пусть, наконец,*

$$k = \frac{\log q}{\log A} + 1;$$

тогда

$$\left| \sum_{j=1}^{Z} \chi_D(n_j)\, g(n_j) \right| \leqslant \frac{3mX}{D^{\frac{1}{9k}}}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Полагая $\chi_D(n) = \chi_p(n)\,\chi_q(n)$, будем иметь, в обозначениях леммы 1,

$$\sum_{j=1}^{Z} \chi_D(n_j)\, g(n_j) = \sum_{u=0}^{q-1} \chi_q(u) \cdot \sum_{\substack{r \equiv u \bmod q \\ 0 \leqslant r \leqslant pq-1}} \chi_p(r)\, s_r. \tag{2.26}$$

Допустим, что p не принадлежит к числу исключительных в смысле леммы 1. Разобьем слагаемые в правой части (2.26) на две группы: для неисключительных вычетов с $u \equiv r \bmod q$ будем иметь

$$s_r = \frac{S_u}{p} + \frac{\vartheta_r S}{(pq)^{1+\frac{1}{9k}}} \quad (0 < |\vartheta_r| < 1). \tag{2.27}$$

Для исключительных же вычетов применим тривиальную оценку

$$s_r \leqslant \frac{mX}{D}. \tag{2.28}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{Z} \chi_D(n_j)\, g(n_j) = \sum_{u=0}^{q-1} \chi_q(u) \sum_{r \equiv u \bmod q}^{(1)} \chi_p(r) \left[\frac{S_u}{p} + \frac{\vartheta_r S}{D^{1+\frac{1}{9k}}} \right] + \eta \frac{mX}{D^{\frac{1}{9k}}}, \tag{2.29}$$

где $\sum^{(1)}$ обозначает сумму, распространенную на неисключительные вычеты, и $|\eta| < 1$. Прибавляя и вычитая сумму

$$\sum_{u=0}^{q-1} \chi_q(u) \sum_{r \equiv u \bmod q}^{(2)} \chi_p(r) \frac{S_u}{p}, \tag{2.30}$$

распространенную на исключительные вычеты (на что указывает индекс (2) при $\sum$), получим, в силу очевидных неравенств

$$S_u \leqslant \frac{mX}{q}, \quad S \leqslant mX, \tag{2.31}$$

соотношение

$$\left| \sum_{j=1}^{Z} \chi(n_j)\, g(n_j) - \frac{1}{p} \sum_{u=0}^{q-1} \chi_q(u)\, S_u \cdot \sum_{\substack{r \equiv u \bmod q \\ 0 \leqslant r \leqslant pq-1}} \chi_p(r) \right| \leqslant \frac{3mX}{D^{\frac{1}{9k}}}. \tag{2.32}$$

Но

$$\sum_{r \equiv u \bmod q} \chi_p(r) = 0 \tag{2.33}$$

в силу того, что числа $r \equiv u \bmod q$, $0 \leqslant r \leqslant pq-1$, образуют полную систему вычетов, а характер $\chi_p(n)$, по предположению, не является главным. Отсюда непосредственно следует лемма 2.

Глава 3

Метод Ю. В. Линника

1. ЛЕММА А. *Пусть*

$$L(s, \chi) = \sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{3.1}$$

— L-ряд с неглавным характером, принадлежащим модулю D. Если $L(s, \chi)$ имеет нуль в области

$$\sigma \geqslant 1 - d, \quad |t| \leqslant \log^3 D,$$

где $s = \sigma + it$ и $\frac{1}{3} > d > \frac{1}{(\log D)^{\frac{4}{5}}}$, и если

$$S_\chi(N) = \sum_{p \leq N} \chi_p(p) \log p, \tag{3.2}$$

то существует число N_1 в интервале

$$(\log D)^{\frac{1}{20d}} < N_1 < D^{2K_3}, \tag{3.3}$$

где K_3 — некоторая абсолютная постоянная, такое, что

$$|S_\chi(N_1)| > N_1^{1-280d}. \tag{3.4}$$

Эта лемма в точности повторяет лемму VI статьи Ю. В. Линника ([9]) с $d = \frac{\psi(D)}{\log D}$ и $\lambda = \frac{1}{5}$. Комбинируя лемму А с леммой 2 предыдущего параграфа, мы получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть q — число, не делящееся на квадраты, A — какое угодно число $\geqslant c_4$; положим*

$$k = \frac{\log q}{\log A} + 1$$

и допустим, что $k \leqslant \log^3 A$. Тогда для всех простых p таких, что $(p, q) = 1$, $A \leqslant p < 2A$, за исключением не более $A^{\frac{3}{4}}$, L-ряд, принадлежащий модулю $D = pq$ и образованный характером, примитивным относительно p, не имеет нулей в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{d_1}{k+1}, \quad |t| < \log^3 D,$$

где

$$d_1 = \frac{1}{7500 K_3}$$

(K_3 — постоянная, фигурирующая в лемме А).

Заметим, что теорема 3 не дает никаких сведений о нулях L-рядов с главными характерами или, что то же, о нулях самой ζ-функции, потому что главный характер не может быть примитивным относительно какого-либо простого делителя своего модуля.

Доказательство. Пусть $U(A)$ означает число «неправильных» простых чисел, т. е. таких, для которых существует хотя бы один

L-ряд, образованный характером, примитивным относительно p, принадлежащий модулю $D = pq$ и имеющий нуль в области

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{d_1}{k+1} = 1 - d, \quad |t| < \log^3 D.$$

Согласно лемме 2, можно найти число N_1 в интервале $(\log D)^{\frac{1}{20d}} < N_1 < D^{2K_3}$ такое, что

$$|S_\chi(N_1)| \geqslant N_1^{1-280d}. \tag{3.5}$$

Очевидно, условия леммы A выполнены, так как, в силу $k \leqslant \log^3 A$, мы имеем

$$\frac{1}{(\log D)^{\frac{4}{5}}} < d < \frac{1}{3}, \text{ если } A \geqslant c_5. \tag{3.6}$$

Все эти N_1 лежат в более широком интервале:

$$(k \log A)^{\frac{1}{20d}} < N_1 < 2^{2K_3} A^{2K_3 k}. \tag{3.7}$$

Разобьем этот интервал на части

$$(A^{2K_3 k} \cdot 2^{2K_3 - l}, \quad A^{2K_3 k} \cdot 2^{2K_3 - l - 1}), \quad l = 0, 1, 2, \ldots, [\log^5 A].$$

Очевидно, что по крайней мере один из таких подинтервалов — обозначим его через $(B, 2B)$ — будет содержать более $\frac{U(A)}{\log^5 A}$ чисел N_1.

При $A \geqslant c_6$ будем иметь

$$B \leqslant A^{2K_3(k+1)}. \tag{3.8}$$

Интервал $(B, 2B)$ разобьем, в свою очередь, на подинтервалы длины B^{1-300d}. Число их не превзойдет $B^{300d} < A^{\frac{2}{25}}$ и один из этих подинтервалов будет содержать не менее

$$\frac{U(A)}{A^{\frac{2}{25}} \log^5 A} > \frac{U(A)}{A^{\frac{1}{12}}} \tag{3.9}$$

чисел N_1, если только $A \geqslant c_7$. Ввиду того, что при $0 < N_1 - N_2 < N_1^{1-300d}$ и $|S(N_1)| < N_1^{1-280d}$

$$|S_\chi(N_1) - S_\chi(N_2)| < (N_1 - N_2) \log N_1, \tag{3.10}$$

будем иметь

$$|S_\chi(N_2)| > N_3^{1-300d}, \tag{3.11}$$

если только $A \geqslant c_8$.

Таким образом, более чем для $U(A) \cdot A^{-\frac{1}{12}}$ «неправильных» простых p можно вместо различных N_1 выбрать одно и то же значение — именно, левый конец выбранного подинтервала. Обозначив это значение через N_2, будем иметь (3.11) для каждого из числа $U(A) \cdot A^{-\frac{1}{12}}$ таких p.

5*

Возьмем теперь целое $\nu \geqslant 1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$A^{(k+1)K_3} < N_2^{\nu} < A^{2(k+1)K_3}. \tag{3.12}$$

Тогда будет иметь место неравенство

$$\nu \leqslant \frac{2(k+1)K_3 \log A}{\log N_2}. \tag{3.13}$$

и, следовательно, неравенство

$$\nu \leqslant \frac{1}{180} \frac{\log A}{\log \log A}. \tag{3.14}$$

Определим последовательность целых чисел n_j $(j = 1, 2, \ldots, Z)$ и неотрицательную функцию $g(n)$ следующим образом: последовательность состоит из чисел, являющихся произведением в точности ν (не обязательно различных) простых, каждое из которых $\leqslant N_2$. Если

$$n_j = p_1 p_2 \ldots p_\nu \tag{3.15}$$

— числа, образующие эту последовательность, то значение $g(n_j)$ определяем по формуле

$$g(n_j) = G(n_j) \prod_1^{\nu} \log p_i, \tag{3.16}$$

где $G(n_j)$ — число представлений числа n_j в виде (3.15), когда $p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ пробегают независимо друг от друга все простые значения $\leqslant N_2$. Тогда для всякого характера χ будем иметь

$$\Big(\sum_{p \leqslant N_2} \chi(p) \log p\Big)^{\nu} = \sum_{j=1}^{Z} \chi(n_j)\, g(n_j) \tag{3.17}$$

и, в частности,

$$\Big(\sum_{p \leqslant N_2} \log p\Big)^{\nu} = \sum_{j=1}^{Z} g(n_j) = S. \tag{3.18}$$

Воспользуемся теперь леммой 2. Мы покажем, что всякое «неправильное» простое, для которого было выбрано одно и то же число N_2, является также исключительным с точки зрения леммы 1.

Сначала нам придется оценить

$$m = \max_{1 \leqslant j \leqslant Z} g(n_j) \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{S}{X}.$$

В силу (3.13) и (3.14), после некоторых выкладок получаем

$$m \leqslant A^{\frac{1}{36}}. \tag{3.19}$$

С другой стороны,

$$\frac{S}{X} = \frac{\Big(\sum\limits_{p \leqslant N_2} \log p\Big)^{\nu}}{N^{\nu}} > \frac{1}{e^{\nu}} > A^{-\frac{1}{180}}, \text{ если } A \geqslant c_{11}. \tag{3.20}$$

Отсюда $\frac{1}{\lambda} < A^{\frac{1}{180}}$, так что число исключительных (в смысле леммы 1) простых не превзойдет

$$\frac{12\pi}{5} A^{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}}. \tag{3.21}$$

Допустим теперь, что какое-нибудь из простых чисел, для которых мы имели

$$|S_\chi(N_2)|^\gamma = \left|\sum_1^Z \chi(n_j) g(n_j)\right| \geqslant N_2^{\gamma(1-300d)} = X^{1-300d}, \tag{3.22}$$

не является исключительным в смысле леммы 1. Тогда, согласно лемме 2, для рассматриваемого характера будем иметь

$$\left|\sum_{j=1}^Z \chi(n_j) g(n_j)\right| < \frac{3X}{A^{\frac{1}{12}}}. \tag{3.23}$$

Сравнивая (3.22) с (3.23), получим

$$X^{1-300d} < \frac{3X}{A^{\frac{1}{12}}}, \tag{3.24}$$

или, в силу (3.12),

$$A^{75} < 3A^{72},$$

что явно невозможно при $A \geqslant c_{12}$.

Итак, все $U(A) \cdot A^{-\frac{1}{12}}$ «неправильных» простых принадлежат к числу $< \frac{12\pi}{5} A^{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}}$ исключительных простых в смысле леммы 1. Таким образом, при $A \geqslant c_{14}$

$$U(A) < A^{\frac{3}{4}}.$$

Тем самым доказана теорема 3, если взять $c_5 = \max(c_6, c_7, \ldots, c_{14})$.

Глава 4

Сводка некоторых результатов из теории L-рядов

1. Обозначим, как в гл. 1,

$$P(x, Q) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l \bmod Q}} \log p \cdot e^{\frac{-p \log x}{x}}, \text{ где } (l, Q) = 1. \tag{4.1}$$

В терминах сумм $P(x, Q)$ результаты E. Titchmarsh'a ([14]), A. Page'a ([15]) и C. L. Siegel'a ([16]) могут быть сформулированы следующим образом:

ЛЕММА B. *Для всех* $Q \leqslant \exp(c_{15}\sqrt{\log x})$, *за исключением кратных некоторого* Q_1, *которое может встретиться, и для* $(Q, l) = 1$ *имеет место*

$$P(x, Q) = \frac{x}{\log x \cdot \varphi(Q)} + O\left(xe^{-c_{16}\sqrt{\log x}}\right). \tag{4.2}$$

При $Q_1 \mid Q$ *к* (4.2) *нужно еще добавить член*

$$O\left(\frac{x^{1-\frac{c(\varepsilon)}{Q_1(\varepsilon)}}}{\varphi(Q)}\right), \tag{4.3}$$

где $\varepsilon > 0$ *произвольно, а* $c(\varepsilon)$ *зависит только от* ε.

O-оценки в (4.2) *и* (4.3) *справедливы равномерно относительно* $Q \leqslant \exp(c_{15}\sqrt{\log x})$. Q_1 *обозначает модуль (если он существует), для которого существует нуль Siegel'я* $\sigma > 1 - \frac{c_{17}}{\sqrt{\log x}}$, *принадлежащий некоторому действительному примитивному характеру* $\bmod Q_1$.

Доказательство леммы В не требует никаких новых методов и может быть предоставлено читателю.

2. Нам понадобится еще такая элементарная оценка:

ЛЕММА С.

$$P(x, Q) < \frac{c_{18}x}{\varphi(Q)} \tag{4.4}$$

равномерно относительно $Q < \sqrt{x}$.

Лемма С следует очевидным образом из теоремы 2 Titchmarsh'a доказанной методом Бруна.

3. Обозначим

$$K_\chi(x) = \sum_{p \leq x} \chi(p) \log p \cdot e^{\frac{-p\log x}{x}}. \tag{4.5}$$

Легко доказывается следующая

ЛЕММА 3. *Если* $\chi(n)$ — *неглавный характер* $\bmod Q$ *и* $L(s, \chi)$ *не имеет нулей в области* $\sigma \geqslant 1 - \delta$, $|t| < \log^3 Q$, *то*

$$|K_\chi(x)| < \frac{c_{19}}{\delta} x^{1-\frac{\delta}{4}} \tag{4.6}$$

равномерно при $\exp(\log x)^{\frac{2}{5}} < Q < \sqrt{x}$.

Эта лемма может быть выведена хорошо известным путем из лемм 2 и 10 Page'a ([15]) и лемм 12 и 15 Titchmarsh'a ([14]) посредством формулы Littlewood'a ([17]):

$$\sum_{1}^{\infty} \chi(n) \Lambda(n) e^{-\frac{n}{Y}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} \frac{L'}{L}(s, \chi) \Gamma(s) Y^s \, ds, \tag{4.7}$$

где $Y = \frac{r}{\log x}$. Сочетание теоремы 3 и леммы 3 приводит к следующей лемме.

ЛЕММА 4. *Пусть* q_1 — *число, не делящееся на квадраты,* $A \geqslant c_{20}$, p_1 — *простое, для которого* $(p_1, q_1) = 1$ *и* $A \leqslant p_1 < 2A$. *Тогда, если*

$$e^{(\log x)^{\frac{2}{5}}} \leqslant Aq \leqslant \frac{\sqrt{x}}{2} \tag{4.8}$$

и

$$k_1 = \frac{\log q_1}{\log \frac{p_1}{2}} + 1 \geqslant \frac{\log q_1}{\log A} + 1 = k, \tag{4.9}$$

где $k_1 < \log^3 A$, *то для всех таких* p_1, *за исключением не более* $A^{\frac{1}{4}}$ *и всякого характера* $\chi(n)$, *принадлежащего модулю* $p_1 q_1$ *и примитивного относительно* p_1, *будем иметь*

$$|K_\chi(x)| < c_{21} x^{1 - \frac{\delta_2}{k_1 + 1}}, \tag{4.10}$$

где $\delta_2 = (4.10^4 \cdot K_3)^{-1}$.

Лемма 4 легко получается, если заметить, что лемма 1 применима при $\delta = \frac{\delta_1}{k_1 + 1} = \frac{1}{7500 K_3 (k_1 + 1)}$ и, в силу (4.8) и (4.9),

$$\frac{1}{\delta} = 7500 K_3 (k_1 + 1) < \log^3 x.$$

Глава 5

Некоторые элементарные свойства множества E

1. Определение множества E было дано в гл. 1.

ЛЕММА 5. *Если Q входит в E, а $\nu(Q)$ есть число простых делителей Q, то при* $N \geqslant c_{22}$

$$\nu(Q) < 10 \log \log 2N.$$

Доказательство следует непосредственно из определения множества E,

2. Введем некоторые обозначения. Если $Q = p_1 p_2 \ldots p_r Q_0$ $(p_r > p_2 > \ldots > p_r)$ принадлежит E, то полагаем

$$Q = p_1 q_1, \quad q_1 = p_2 q_2, \ldots, q_{r-1} = p_r q_r, \quad q_r = Q_0.$$

Числа $q_1, q_2, \ldots, q_r$ назовем «диагональными делителями» числа Q.

ЛЕММА 6. *Если Q входит в E, то в E входят все диагональные делители Q.*

Доказательство очевидно.

3. ЛЕММА 7. *Если Q входит в E, p_1 есть наибольший простой делитель Q и если выполняется неравенство*

$$p_1 < Y^{\frac{1}{h^m}} \quad (m \geqslant 0),$$

то

$$Q < Q_0 Y^{\frac{2m+9}{h^m}}.$$

Доказательство. Имеем

$$p_i < p_1 < Y^{\frac{1}{h^m}} \quad \text{при } i = 2, 3, \ldots, 2m+1$$

и

$$p_{2m+i} < Y^{\frac{1}{h^m+\left[\frac{i}{2}\right]}} \quad \text{при } i=2, 3, \ldots$$

Следовательно,

$$q_1 < Q_0 p_1^{2m} Y^{\frac{8}{h^m}} < Q_0 Y^{\frac{2m+8}{h^m}},$$

откуда

$$Q < Q_0 Y^{\frac{2m+9}{h^m}}$$

и лемма 7 доказана.

Следствие. *Подмножество множества E, состоящее из чисел $Q=p_1q_1$, удовлетворяющих неравенству*

$$p_1 < Y^{\frac{1}{h^m}},$$

содержит не более

$$Y^{\frac{2m+9}{h^m}}$$

чисел.

В частности, при $m=0$ мы получаем, что само E содержит не более Y^9 чисел.

4. ЛЕММА 8. *Подмножество множества E, состоящее из чисел $Q=p_1q_1$, удовлетворяющих неравенству*

$$p_1 < q_1^{\frac{1}{k}},$$

содержит не более

$$Y^{\frac{c_{23}k}{h^{\frac{k}{2}}}}$$

чисел, где c_{23}—абсолютная постоянная.

Доказательство. Предположим, что

$$Y^{\frac{1}{h^{m+1}}} < p_1 \leqslant Y^{\frac{1}{h^m}} \quad (m \geqslant 0).$$

Отсюда следует, как в лемме 7, что

$$q_1 < Q_0 p_1^{2m} Y^{\frac{8}{h^m}} < p^{2m+T+8},$$

так как $Q_0 < p_1^T$. Таким образом, если $p_1 < q_1^{\frac{1}{k}}$, то

$$p_1^k < p_1^{2m+T+8}$$

и, следовательно, $k < 2m+T+8$; а так как $p_1 < Y^{\frac{1}{h^m}}$ и $q_1 < p_1^{2m+T+8}$, то мы получаем

$$Q < Y^{\frac{2m+T+9}{h^m}} < Y^{\frac{c_{23}k}{h^{\frac{k}{2}}}}$$

при достаточно большой постоянной c_{23} (выбор c_{23} зависит только от значения T, выбранного в главе 1). Отсюда получается наша лемма.

5. Нам понадобится еще следующая элементарная

ЛЕММА 9. *Пусть p^* — последовательность простых чисел, обладающая тем свойством, что всякий интервал $(A, 2A)$ содержит не более $A^{\frac{3}{4}}$ чисел из этой последовательности. Тогда*

$$\sum_{p^*>B} \frac{1}{p^*-1} < \frac{c_{24}}{\sqrt[4]{B}}.$$

Доказательство получается немедленно.

ЛЕММА 10.

$$\sum_{n \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} < c_{25} \log x.$$

Доказательство нетрудно [см. ([14])].

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей оценкой:

ЛЕММА 11.

$$\varphi(n) > \frac{c_{26} n}{\log n}.$$

Эта оценка следует из формулы Mertens'а для $\prod_{p \leqslant n}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Глава 6

Доказательство основной теоремы

1. В этой главе мы встретимся с характерами, принадлежащими различным модулям. Условимся поэтому указывать модуль нижним индексом характера. Через χ_D^0 будем обозначать главный характер $\bmod D$, а через $\sum_{(D)}$ — суммирование по всем характерам, принадлежащим модулю D. Кроме того, положим $x = 2N$.

2. Нам нужно оценить остаточный член формулы (1.11). Начнем с формулы

$$P(x, Q) = \frac{1}{\varphi(Q)} \sum_{(Q)} \bar{\chi}_Q(l) K_{\chi_Q}(x), \quad (l, Q) = 1, \tag{6.1}$$

которая легко следует из (4.1) и (4.5). Рассмотрим какое-нибудь $Q = p_1 p_2 \ldots p_r Q_0$ множества E. Из леммы 5 вытекает, что если $Q > \exp(\log x)^{\frac{2}{5}}$, то

$$p_1 > Q^{\frac{1}{\nu(Q)}} > 2\exp(\log x)^{\frac{1}{3}} \quad \text{для } x \geqslant c_{27}. \tag{6.2}$$

С другой стороны,

$$q_1 < p_1^{\nu(Q)} < p_1^{10 \log\log x},$$

следовательно,

$$k_1 = \frac{\log q_1}{\log \frac{p_1}{2}} + 1 < 11 \log\log x. \tag{6.3}$$

Применим лемму 4 к (6.2) при фиксированном q_1; нам достаточно рассмотреть интервалы $(A, 2A)$, где $A = 2^k B$, $k = 1, 2, \ldots$ и

$$B = \exp((\log x)^{\frac{1}{3}}). \tag{6.4}$$

Рассмотрим сначала только $Q \in E$, удовлетворяющие неравенству

$$Q > \exp(\log x)^{\frac{2}{5}},$$

которое назовем «условием 1». Далее, мы предположим, что если p_1 есть наибольший простой делитель Q и $Q = p_1 q_1$, то p_1 не является исключительным (в смысле леммы 4) по отношению к q_1. Это мы назовем «условием 2». Если оба условия удовлетворены, то применим к (6.1) разложение (2.23) и отделим в (6.1) члены, соответствующие примитивным характерам относительно p_1. Принимая во внимание, что $(l, Q) = 1$ и, значит, $\chi^0_{p_1}(l) = 1$, а также, что $\chi^0_{p_1}(p) = 1$, за исключением $p = p_1$, мы получаем, пользуясь леммой 4,

$$P(x, Q) = \frac{1}{\varphi(p_1)} P(x, q_1) + O(x^{1 - \frac{\delta_2}{k_1 + 1}}). \tag{6.5}$$

Если $q_1 = p_2 q_2$ снова удовлетворяет условиям 1 и 2, то процесс может быть продолжен. Мы получим

$$P(x, Q) = \frac{1}{\varphi(p_1, p_2)} P(x, q_2) + O(x^{1 - \frac{\delta_2}{k_1 + 1}}) + O\left(\frac{x^{1 - \frac{\delta_2}{k_2 + 1}}}{\varphi(p_1)}\right), \tag{6.6}$$

где $k_2 = \dfrac{\log q_2}{\log \frac{p_2}{2}} + 1$ и так далее, до тех пор пока, после s таких приведений одно из условий 1 и 2 не нарушится.

Если нарушится условие 1, т. е. будет $q_s < \exp(\log x)^{\frac{2}{5}}$, то мы воспользуемся леммой B и при условии $Q_1 \nmid q_{s+1}$ получим

$$P(x, Q) = \frac{x}{\varphi(Q) \log x} + O\left(\sum_{r=1}^{s} \frac{x^{1 - \frac{\delta_2}{k_r + 1}}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_{r-1}}\right)}\right) + O\left(\frac{x e^{-c_{18}\sqrt{\log x}}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_s}\right)}\right); \tag{6.7}$$

если же $Q_1 \mid q_{s+1}$, то к (6.7) придется еще добавить член

$$O\left(\frac{x^{1 - \frac{c(\varepsilon)}{Q_1^{\varepsilon}}}}{\varphi(Q)}\right). \tag{6.8}$$

Здесь $q_1, q_2, \ldots, q_s$ обозначают диагональные делители Q и

$$k_r = \frac{\log q_r}{\log \frac{p_r}{2}} + 1, \tag{6.9}$$

Если нарушилось условие 2, т. е. простое число p_{s+1} является исключительным по отношению к q_{s+1}, то лемма C даст нам

$$P(x, Q) = O\left(\frac{x}{\varphi(Q)}\right) + O\left(\sum_{r=1}^{s} \frac{x^{1-\frac{\delta_2}{k_r+1}}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_{r-1}}\right)}\right). \qquad (6.10)$$

Итак, оценка сумм в (1.11) сводится к оценке членов следующих четырех типов:

$$\text{I)}\ \frac{x}{\varphi(Q)}, \quad \text{II)}\ \frac{xe^{-c_{16}\sqrt{\log x}}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_s}\right)}, \quad \text{III)}\ \frac{x^{1-\frac{c(\varepsilon)}{Q_1^{\varepsilon}}}}{\varphi(Q)}, \quad \text{IV)}\ \frac{x^{1-\frac{\delta_2}{k_r+1}}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_{r-1}}\right)}.$$

3. Мы будем суммировать отдельно члены каждого из этих типов.

Начнем с типа I. Фиксируя $\frac{Q}{q_s}$ и q_{s+1} и суммируя по всем возможным (т. е. по всем исключительным относительно q_{s+1}) значениям p_{s+1}, мы получим оценку

$$c_{28}\frac{x}{\varphi\left(\frac{Qq_{s+1}}{q_s}\right)} \cdot \sum_{p_{s+1} \geqslant 2\exp(\log x)^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{p_{s+1}}. \qquad (6.11)$$

Применяя к (6.2) лемму 9 с $B = 2\exp(\log x)^{\frac{1}{3}}$, мы получим, что (6.11) не превосходит

$$\frac{c_{29}x(\log x)^{\frac{1}{3}}}{\varphi\left(\frac{Qq_{s+1}}{q_s}\right)e^{\frac{1}{4}(\log x)^{\frac{1}{3}}}}. \qquad (6.12)$$

Суммируя по $\frac{Qq_{s+1}}{q_s}$ и применяя лемму 10, получим для суммы членов типа I оценку

$$R_{\text{I}} < \frac{c_{30}x(\log x)^{\frac{5}{3}}}{e^{\frac{1}{4}(\log x)^{\frac{1}{3}}}} < \frac{x}{(\log x)^3} \quad \text{для } x \geqslant c_{31}. \qquad (6.13)$$

4. Рассмотрим теперь сумму членов типа II. Фиксируя $\frac{Q}{q_s}$, получим

$$\frac{c_{32}x\exp\left((\log x)^{\frac{2}{5}} - c_{16}\sqrt{\log x}\right)}{\varphi\left(\frac{Q}{q_s}\right)}, \qquad (6.14)$$

потому что суммирование распространено только на q_{s+1}, меньшие $\exp((\log x)^{\frac{2}{5}})$. Суммирование по $\frac{Q}{q_s}$ и применение леммы 10 дает

$$R_{\text{II}} < \frac{x}{(\log x)^3} \quad \text{для } x \geqslant c_{33}. \qquad (6.15)$$

5. При фиксированном $\frac{Q}{q_s}$ суммирование членов типа III должно быть распространено на значения q_{s+1}, кратные числа Q_1, которое может встретиться. В силу лемм 10 и 11, получим

$$\frac{c_{34}\log^2 x}{\varphi\left(\frac{Q}{q_s}\right)} \frac{x^{1-\frac{c(\varepsilon)}{Q_1^{\varepsilon}}}}{Q_1}. \qquad (6.16)$$

Суммирование по $\frac{Q}{q_{\rm x}}$ дает оценку

$$R_{\rm III} < c_{35}\, x \log^3 x \exp\left(-\frac{c(\varepsilon)}{Q_1^{\varepsilon}} \log x - \log Q_1\right). \tag{6.17}$$

Хотя мы не знаем возможного значения Q_1, но мы можем оценить правую часть (6.17), взяв ее максимальное значение при $1 \leqslant Q_1 < \infty$ а это эквивалентно отысканию минимума для

$$c(\varepsilon)\, Q_1^{-\varepsilon} \log x + \log Q_1.$$

Дифференцированием легко находим, что этот минимум, равный

$$\frac{1}{\varepsilon} \log\log x + \frac{1}{\varepsilon} \log(e\varepsilon c(\varepsilon)), \tag{6.18}$$

достигается при $Q_1 = (\varepsilon \cdot c(\varepsilon) \cdot \log x)^{\frac{1}{\varepsilon}}$. По теореме Siegel'я, в качестве ε можно взять любое положительное число. Взяв $\varepsilon = \frac{1}{8}$, мы получим для суммы членов типа III оценку

$$R_{\rm III} < \frac{x}{\log^3 x} \quad \text{при } x \geqslant c_{36}. \tag{6.19}$$

6. Теперь остается только оценить сумму членов типа IV. Фиксируем $\frac{Q}{q_{r-3}}$ и рассмотрим сначала те члены типа IV, для которых $k_r \leqslant 2$. Для числа таких членов примем тривиальную оценку: их не больше числа всех элементов множества E, т. е., в силу следствия из леммы 7, не больше $x^{\frac{9}{R}}$. Таким образом, для суммы таких членов имеем оценку

$$\frac{c_{37}}{\varphi\left(\frac{Q}{q_{r-1}}\right)}\, x^{1-\left(\frac{\delta_2}{2}-\frac{9}{R}\right)}.$$

Суммируя по $\frac{Q}{q_{r-1}}$, получаем для суммы этих членов оценку

$$R_{\rm IV}^{(1)} < c_{38}\, x^{1-\left(\frac{\delta_2}{2}-\frac{9}{R}\right)} \log x \quad \text{для } x \geqslant c_{39}.$$

Взяв $R > \frac{27}{\delta_2}$, будем иметь

$$R_{\rm IV}^{(1)} < \frac{x}{\log^3 x} \quad \text{для } x \geqslant c_{40}. \tag{6.20}$$

7. Рассмотрим теперь те члены типа IV, для которых

$$2\nu \leqslant k_r < 2\nu + 2, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \left[\frac{11}{2} \log\log x\right].$$

Так как $k_r \geqslant 2\nu$ при $q_r > \exp(\log x)^{\frac{2}{5}}$ и $\nu \leqslant \frac{11}{2} \log\log x$, то

$$p_r < 2 q_r^{\frac{1}{2\nu-1}} < q_r^{\frac{1}{\nu}}.$$

Фиксируем $\frac{Q}{q_{r-1}}$. Суммируя по всевозможным значениям ν и применяя лемму 8, получим, что сумма таких членов не превосходит

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{Q}{q_{r-1}}\right)}\, x^{\frac{c_{23}\nu}{Rh^{\frac{\nu}{2}}}}\, x^{1-\frac{\delta_2}{2\nu+4}}. \tag{6.21}$$

Выбираем окончательно значение R:

$$R=\frac{450c_{23}}{\delta_2}=18\cdot 10^6 K_3 c_{23}$$

$\left(\text{при этом, очевидно, выполняется более раннее предположение: } R>\frac{27}{\delta_2}\right)$. Тогда для всякого $\nu\geqslant 1$

$$\frac{c_{23}\nu}{Rh^{\frac{\nu}{2}}}<\frac{\delta_2}{2(2\nu+4)}.$$

Итак, из (6.21) получается оценка

$$\frac{1}{\varphi\left(\frac{Q}{q_{r-1}}\right)}\,x^{1-\frac{\delta_2}{4(\nu+2)}}. \tag{6.22}$$

Суммируя по ν и $\frac{Q}{q_{r-1}}$, находим

$$R_{\mathrm{IV}}^{(2)}<c_{41}\log x\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{11}{2}\log x\right]} x^{1-\frac{\delta_2}{4(\nu+2)}}. \tag{6.23}$$

Заменяя здесь все слагаемые наибольшим (т. е. последним) слагаемым, получаем для суммы всех таких членов оценку

$$R_{\mathrm{IV}}^{(2)}<\frac{x}{\log^2 x}\quad \text{для}\quad x\geqslant c_{42}. \tag{6.24}$$

Итак, для $x\geqslant c_{43}$ при $R=18\cdot 10^6 K_3\cdot c_{23}$, собирая вместе результаты (6.13) — (6.24), получаем

$$\sum_{Q\in E}|R_Q(x)|<R_{\mathrm{I}}+R_{\mathrm{II}}+R_{\mathrm{III}}+R_{\mathrm{IV}}^{(1)}+R_{\mathrm{IV}}^{(2)}<\frac{5x}{\log^3 x} \tag{6.25}$$

и, следовательно,

$$H(2N)>\frac{c_1 N}{\log^2 N}$$

для $N\geqslant c_{43}$. Как замечено в гл. 1, это доказывает теорему 1.

8. Чтобы доказать теорему 2, мы исходим из выражения

$$H_0(N)=\sum_{\substack{3\leq p\leq N\\ (p+2,\,\Delta_0)=1}} a_p. \tag{6.26}$$

Все остальное остается без изменений и мы получаем аналогичным путем

$$H_0(N)>\frac{c_1 N}{\log^2 N}$$

для $N\geqslant c_{43}$. Таким образом, число простых $p\leqslant N$, для которых $p+2$ «почти просто», превосходит $\frac{c_1 N}{\log^3 N}$. Это доказывает теорему 2.

9. Нечетные числа могут быть, очевидно, представлены в виде суммы простого и почти простого числа так же, как и четные числа. Без существенных изменений получается

ТЕОРЕМА 1а. *Всякое нечетное число может быть представлено в виде $2N+1=p+2P$, где p — простое, а P — нечетное «почти простое» число, т. е. P имеет лишь ограниченное число простых делителей.*

Теорема 2 также может быть без труда обобщена:

ТЕОРЕМА 2а. *Существует бесконечно много простых p, для которых $p+m$ «почти просты». Здесь m есть произвольное фиксированное (положительное или отрицательное) число.*

Эти теоремы допускают, очевидно, дальнейшие обобщения, но здесь мы ограничились формулировками лишь простейших случаев, наиболее близких к классическим гипотезам теории чисел.

Поступило
31.III.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Новый метод в аналитической теории чисел, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, X, 1937.

[2] Чудаков Н. Г., О плотности совокупности четных чисел, не представимых как сумма двух нечетных простых, Изв. Ак. Наук СССР, 1 (1938), 25—40.

[3] Шнирельман Л. Г., Об аддитивных свойствах чисел, Успехи матем. наук, VII (1940), 7—46.

[4] Viggo Brun, Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach, Videnskapselskapets Skrifter, I, No 3, Kristiania, 1920.

[5] Бухштаб А. А., О разложении четных чисел на сумму двух слагаемых с ограниченным числом простых множителей, Доклады Ак. Наук СССР, XXIX (1940), 544—548.

[6] Тартаковский В. А., Метод избирательного «приближенного решета». Доклады Ак. Наук СССР, XXIII (1939), 127—130.

[7] Estermann Th., Eine neue Darstellung und neue Anwendungen der Viggo Brunnschen Methode, J. reine u. ang. Math., 168 (1932), 106—116.

[8] Бухштаб А. А., Об одном аддитивном представлении целых чисел, Матем. сборник, т. 10 (52):1—2 (1942), 87—91.

[9] Линник Ю. В., Об L-рядах Дирихле и суммах по простым числам, Матем. сб., 15 (57):1 (1944), 3—12.

[10] Линник Ю. В., О возможности обойти расширенную гипотезу Римана при изучении простых чисел в прогрессиях, Доклады Ак. Наук СССР, XLIV, № 4 (1944), 147—150.

[11] Turan P., Über die Wurzeln der Dirichletschen L-Functionen, Acta Sc. Math., Szeged., X, No. 3—4 (1943), 188—201.

[12] Siegel C. L., On the zeros of the Dirichlet L-functions, Ann. of Math., v. 46, No. 3 (1945), 409—422.

[13] Линник Ю. В., «Большое решето», Доклады Ак. Наук СССР, XXX, № 4 (1941), 290—292.

[14] Titchmarsh F. C., A divisor problem, Rend. del circolo matem. di Palermo, LIV (1930), 414—429.

[15] Page A., On the number of primes in an arithmetic progression, Proc. London Math. Soc. (2), T. 39 (1935), 116—141.

[16] Siegel C. L., Über d. Classenzahle quadratischen Zahlkörper, Acta Arithmetica I (1936), 83—86.

[17] Littlewood J. E., On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k})$, Proc. London Math. Soc., 27 (1928), 351—172.

[18] Реньи А., О представлении четных чисел в виде суммы простого и почти простого числа, Доклады Ак. Наук СССР, LVI, 5 (1947), 455—458.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 79—96

Е. А. АНФЕРТЬЕВА

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЧЕРЕЗ ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ НЕКОТОРОГО СПЕЦИАЛЬНОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе исследуется специальный ряд Дирихле, коэффициентами которого служат некоторые арифметические функции. Для этого ряда Дирихле автор получает представления через определенные интегралы, аналогичные известным соотношениям для дзета-функции.

Настоящая работа продолжает изложение результатов, полученных автором [5] ранее для функции

$$\varphi_\nu(s) = \zeta(s+\nu)\,\zeta(s-\nu).$$

Напомним, что автор рассматривает функцию комплексной переменной $s = \tau + it$, представляемой для всех значений $\mathrm{Re}(s) > \nu + 1$ абсолютно сходящимся рядом Dirichlet

$$\varphi_\nu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\nu(n)}{n^s} = \zeta(s+\nu)\,\zeta(s-\nu), \tag{I}$$

где

$$a_\nu(n) = \frac{\sum\limits_{d\delta=n} d^{2\nu}}{n^\nu}, \quad \nu \neq 0, \quad -\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2} \tag{II}$$

(сумма распространена на все делители числа n), $\zeta(\sigma)$ — известная функция Riemann'a и для функции $\varphi_\nu(s)$ имеет место следующее функциональное уравнение:

$$\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\varphi_\nu(s) = \pi^{2s-1}\Gamma\left(\frac{1-s-\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s+\nu}{2}\right)\varphi_\nu(1-s). \tag{III}$$

В предлагаемой статье автор получает для функции $\varphi_\nu(s)$ интегральные представления, аналогичные известным формулам Римана [2] и Римана-Зигеля [3] для ζ-функции.

§ 1. Выражение через определенные интегралы функции $\varphi_\nu(s) = \zeta(s+\nu)\,\zeta(s-\nu)$ на прямой $s = \frac{1}{2} + it$

Обозначим

$$w(t) = \xi\left(\frac{1}{2} + it\right), \tag{1}$$

где

$$\xi(s)=\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\frac{(s+\nu)(s-\nu)[1-(s+\nu)][1-(s-\nu)]}{2}\zeta(s+\nu)\zeta(s-\nu).$$

Рассмотрим функцию

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_\nu(n)K_\nu(2\pi nx),$$

где $K_\nu(y)$ — цилиндрическая функция.

Вычислим интеграл

$$I=4\int_0^\infty\psi(x)x^{s-1}dx=4\int_0^\infty\sum_{n=1}^{\infty}a_\nu(n)\cdot K_\nu(2\pi nx)\cdot x^{s-1}dx. \qquad (2)$$

Воспользовавшись соотношениями

$$a_\nu(n)=O(n^{\nu+\varepsilon}),$$

$$|K_\nu(2\pi nx)|=O\left(\frac{1}{\sqrt{nx}}e^{-2\pi nx}\right),$$

получим неравенство

$$|\psi(x)|<c\sum_{n=1}^{\infty}n^{\nu+\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-2\pi nx}=c\frac{e^{-2\pi x}}{\sqrt{x}}\sum_{n=1}^{\infty}n^{\nu+\varepsilon-\frac{1}{2}}e^{-2\pi(nx-x)}<c_1\frac{e^{-2\pi x}}{\sqrt{x}},$$

доказывающее абсолютную сходимость ряда. Из той же оценки для функции $K_\nu(2\pi nx)$ [4] вытекает абсолютная сходимость интеграла

$$\int_0^\infty K_\nu(2\pi nx)x^{s-1}dx.$$

Теперь в выражении (2) мы имеем право поменять порядок суммирования и интегрирования, после чего получим

$$I=\sum_{n=1}^{\infty}a_\nu(n)\int_0^\infty K_\nu(2\pi nx)x^{s-1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_\nu(n)\frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)}{(\pi n)^s},$$

и так как

$$\varphi_\nu(s)=\zeta(s+\nu)\zeta(s-\nu)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_\nu(n)}{n^s},$$

то окончательно имеем

$$4\int_0^\infty\psi(x)x^{s-1}dx=\frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)}{\pi^s}\varphi_\nu(s). \qquad (3)$$

Умножим обе части «формулы преобразования» [1]

$$\frac{\pi}{\sin\pi\nu}\left[\frac{\zeta(2\nu)\pi^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)x^\nu}-\frac{\zeta(-2\nu)\pi^\nu}{\Gamma(1+\nu)x^{-\nu}}\right]+4\psi(x)=$$

$$=\frac{1}{x}\left\{\frac{\pi}{\sin\pi\nu}\left[\frac{\zeta(2\nu)\pi^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)x^{-\nu}}-\frac{\zeta(-2\nu)\pi}{\Gamma(1+\nu)x^\nu}\right]+4\psi\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

на x^s и проинтегрируем по x в пределах от 0 до 1, считая

$\operatorname{Re}(s) > \nu > 0$. Тогда, полагая

$$L(\nu) = -\frac{\pi}{\sin \pi\nu} \cdot \frac{\zeta(-2\nu)\,\pi^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)},$$

будем иметь

$$\frac{L(-\nu)}{1-s-\nu} + \frac{L(\nu)}{1+s+\nu} + 4\int_0^1 \psi(x)\,x^s\,dx = \frac{L(-\nu)}{s+\nu} + \frac{L(\nu)}{s-\nu} + 4\int_0^1 \varphi\left(\frac{1}{x}\right) x^{s-1}\,dx.$$

В силу известной теоремы об аналитическом продолжении, эта формула может быть продолжена для всех значений s; заменив s на $s-1$, получим

$$\frac{L(-\nu)}{s-\nu} + \frac{L(\nu)}{s+\nu} + 4\int_0^1 \psi(x)\,x^{s-1}\,dx = \frac{L(-\nu)}{s-1+\nu} + \frac{L(\nu)}{s-1-\nu} + 4\int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{s-2}\,dx,$$

или, прибавив к обеим частям равенства $4\int_1^\infty \psi(x)\,x^{s-1}\,dx$,

$$4\int_0^1 \psi(x)\,x^{s-1}\,dx + 4\int_1^\infty \psi(x)\,x^{s-1}\,dx =$$

$$= -\frac{L(-\nu)}{s-\nu} - \frac{L(\nu)}{s+\nu} - \frac{L(-\nu)}{1-(s+\nu)} - \frac{L(\nu)}{1-(s-\nu)} +$$

$$+ 4\int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{s-2}\,dx + 4\int_1^\infty \psi(x)\,x^{s-1}\,dx.$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^1 \psi\left(\frac{1}{x}\right) x^{s-2}\,dx = \int_1^\infty \psi(x)\,x^{-s}\,dx,$$

мы можем предыдущее соотношение переписать в виде

$$4\int_0^\infty \psi(x)\,x^{s-1}\,dx = -\frac{L(-\nu)}{s-\nu} - \frac{L(\nu)}{s+\nu} - \frac{L(-\nu)}{1-(s+\nu)} -$$

$$- \frac{L(\nu)}{1-(s-\nu)} + 4\int_1^\infty \psi(x)\,(x^{s-1} + x^{-s})\,dx,$$

или, ввиду формулы (3), в виде

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)}{\pi^s}\,\zeta(s+\nu)\,\zeta(s-\nu) = -\frac{L(-\nu)}{s-\nu} - \frac{L(\nu)}{s+\nu} -$$

$$- \frac{L(-\nu)}{1-(s+\nu)} - \frac{L(\nu)}{1-(s-\nu)} + 4\int_1^\infty \psi(x)\,(x^{s-1} - x^{-s})\,dx.$$

Положив здесь $s = \frac{1}{2} + it$, после несложных преобразований по-

лучим

$$w(t)=\frac{\pi}{\sin \pi\nu}\Big[-\frac{\zeta(2\nu)\pi^{-\nu}(1-2\nu)}{\Gamma(1-\nu)}\Big\{\Big(\frac{1}{2}+\nu\Big)^2+t^2\Big\}+$$
$$+\frac{\zeta(-2\nu)\pi^{\nu}(1+2\nu)}{\Gamma(1+\nu)}\Big\{\Big(\frac{1}{2}-\nu\Big)^2+t^2\Big\}\Big]+$$
$$+8\Big\{\Big(\frac{1}{2}-\nu\Big)^2+t^2\Big\}\Big\{\Big(\frac{1}{2}+\nu\Big)^2+t^2\Big\}\int_1^\infty x^{-\frac{1}{2}}\psi(x)\cos(t\ln x)\,dx,$$

где

$$w(t)=\xi\Big(\frac{1}{2}+it\Big),$$
$$\xi(s)=\Gamma\Big(\frac{s+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s-\nu}{2}\Big)\frac{(s^2-\nu^2)[(1-s)^2-\nu^2]}{\pi^s}\varphi_\nu(s).$$

Эта формула аналогична известной формуле Римана для функции $\zeta(s)$. Аналогичный результат известен для квадрата $\zeta(s)$.

§ 2. Обобщение формулы Римана-Зигеля

Исходя из известного соотношения

$$\int_0^\infty K_\nu(ax)x^{\sigma-1}\,dx=\frac{2^{\sigma-2}\Gamma\Big(\frac{\sigma+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\sigma-\nu}{2}\Big)}{a^\sigma},\quad \mathrm{Re}(\sigma)>0,$$

мы найдем, следуя Mellin'у, что

$$K_\nu(ax)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\Gamma\Big(\frac{s+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s-\nu}{2}\Big)\frac{2^{\sigma-2}}{(ax)^\sigma}\,d\sigma.$$

Умножим обе части этого равенства на x^{s-1} и проинтегрируем по x от 1 до ∞:

$$\int_1^\infty K_\nu(ax)x^{s-1}\,dx=\int_1^\infty x^{s-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\frac{2^{\sigma-2}}{(xa)^\sigma}\Gamma\Big(\frac{\sigma+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\sigma-\nu}{2}\Big)\,d\sigma\,dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\frac{\Gamma\Big(\frac{\sigma+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\sigma-\nu}{2}\Big)2^{\sigma-2}}{a^\sigma}\int_1^\infty x^{s-\sigma-1}\,dx\,d\sigma.$$

Перестановка порядка интегрирования произведена здесь на законном основании, ибо интеграл, взятый вдоль прямой $\mathrm{Re}(\sigma)=\frac{3}{2}$, будет сходиться, в силу неравенства

$$\Big|\int_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\frac{\Gamma\Big(\frac{\sigma+\nu}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{\sigma-\nu}{2}\Big)}{a^\sigma}x^{-\sigma-1}d\sigma\Big|<\frac{k}{x^{\frac{5}{2}}}\int_0^\infty|t|^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}|t|}dt,$$

где k — постоянная, а интеграл $\int\limits_1^\infty x^{s-\sigma-1}\,dx$ абсолютно сходится при условии $\mathrm{Re}(\sigma) > \mathrm{Re}(s)$ и равен $\frac{1}{\sigma - s}$; следовательно, имеем

$$\int\limits_0^\infty K_\nu(ax)\,x^{s-1}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)2^{\sigma-2}}{a^\sigma}\cdot\frac{d\sigma}{\sigma - s},$$

$$0 < \mathrm{Re}(s) < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg a < \frac{\pi}{2}.$$

Положим $a = 2\pi\varepsilon n$, где $\varepsilon = e^{\frac{\pi i}{4}}$; тогда

$$\int\limits_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon n x)\,x^{s-1}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)}{(n\pi)^\sigma(\sigma - s)}\,d\sigma.$$

Умножим обе части этого равенства на $a_\nu(n)$ и просуммируем по n от 1 до ∞; справа поменяем порядок суммы и интеграла, что будет законно ввиду абсолютной сходимости интеграла и ряда. Тогда, принимая во внимание, что

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{a_\nu(n)}{n^\sigma} = \varphi_\nu(\sigma) = \zeta(\sigma - \nu)\,\zeta(\sigma + \nu),$$

получим

$$4\varepsilon\sum_{n=1}^\infty a_\nu(n)\int\limits_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon n x)\,x^{s-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i} \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\varepsilon^{s-\sigma}}{\pi^\sigma(\sigma - s)}\,\varphi_\nu(\sigma)\,d\sigma. \quad (1)$$

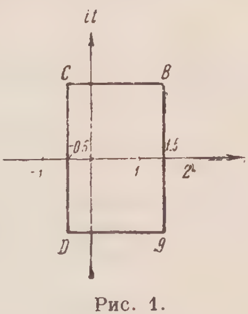


Рис. 1.

Функцию, стоящую под знаком интеграла,

$$\omega(\sigma) = \frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\zeta(s+\nu)\,\zeta(s-\nu)}{\pi^\sigma(\sigma - s)}\cdot\varepsilon^{s-\sigma}$$

проинтегрируем по прямоугольнику, вершины которого лежат в точках

$$A\left(\frac{3}{2} - it\right), \quad B\left(\frac{3}{2} + it\right), \quad C\left(-\frac{1}{2} + it\right), \quad D\left(-\frac{1}{2} - it\right).$$

Ввиду наличия оценки $|\omega(\sigma)| = O(|t|^{3\sigma-2-2s}e^{-\pi|t|})$, интегралы вдоль BC и DA в пределе при $t \to \infty$ обратятся в нули.

Из формулы Cauchy в пределе при $t \to \infty$ получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\varphi_\nu(\sigma)\,\varepsilon^{s-\sigma}}{\pi^\sigma(\sigma-s)}\,d\sigma=$$

$$=R_{\sigma=s}+R_{\sigma=\nu}+R_{\sigma=-\nu}+R_{\sigma=1-\nu}+R_{\sigma=1+\nu}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\frac{1}{2}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\varepsilon^{s-\sigma}}{\pi^\sigma\,\sigma-s)}\,d\sigma, \qquad (2)$$

где $R_{s=\mu}$ обозначает вычет подинтегральной функции в полюсе $s=\mu$.

Преобразуем интеграл, стоящий в правой части равенства (2), положив $\sigma=1-\sigma_1$ и используя функциональное уравнение для $\varphi_\nu(\sigma)$:

$$\Gamma\left(\frac{1-\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\sigma-\nu}{2}\right)\varphi_\nu(1-\sigma)=\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\pi^{1-2\sigma}\varphi_\nu(\sigma).$$

Мы получим

$$\int\limits_{-\frac{1}{2}-\infty i}^{-\frac{1}{2}+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\varphi_\nu(\sigma)\,\varepsilon^{s-\sigma}}{\pi^\sigma(\sigma-s)}\,d\sigma=$$

$$=-\int\limits_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\bar{\varepsilon}^{1-s-\sigma}\varphi_\nu(\sigma)}{\pi^\sigma[\sigma-(1-s)]}\,d\sigma \quad \left(\bar{\varepsilon}=e^{-\frac{\pi i}{4}}\right). \qquad (3)$$

Для вычетов же весьма просто получаются следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
R_{\sigma=s}&=\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\varepsilon^{s-\sigma}\pi^{-s}\varphi_\nu(\sigma),\\
R_{\sigma=\nu}&=\frac{\Gamma(\nu)\,\zeta(2\nu)}{\pi^\nu(s-\nu)}\,\varepsilon^{s-\nu},\\
R_{\sigma=-\nu}&=\frac{\Gamma(-\nu)\,\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}(s+\nu)}\,\varepsilon^{s+\nu},\\
R_{\sigma=1-\nu}&=\frac{\Gamma(\nu)\,\zeta(2\nu)}{\pi^\nu(1-s-\nu)}\,\bar{\varepsilon}^{1-s-\nu},\\
R_{\sigma=1+\nu}&=\frac{\Gamma(-\nu)\,\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}(1-s+\nu)}\,\bar{\varepsilon}^{1-s+\nu}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Внося выражения (3) и (4) в формулу (2), получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\varphi_\nu(\sigma)}{\pi^\sigma(\sigma-s)}\,d\sigma=\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\varepsilon^{s-\sigma}\pi^{-s}\varphi_\nu(\sigma)-$$

$$-\frac{\Gamma(\nu)\,\zeta(2\nu)}{\pi^\nu(\nu-s)}\,\varepsilon^{s-\nu}+\frac{\Gamma(-\nu)\,\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}(\nu+s)}\,\varepsilon^{s+\nu}-$$

$$-\frac{\Gamma(\nu)\,\zeta(2\nu)}{\pi^\nu[\nu-(1-s)]}\,\bar{\varepsilon}^{1-s-\nu}+\frac{\Gamma(-\nu)\,\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}[\nu+(1-s)]}\,\bar{\varepsilon}^{1-s-\nu}-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}-\infty i}^{\frac{3}{2}+\infty i}\frac{\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\varphi_\nu(\sigma)\,\bar{\varepsilon}^{1-s-\sigma}}{\pi^\sigma[\sigma-(1-s)]}d\sigma,$$

или, принимая во внимание (1),

$$\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\varepsilon^{s-\sigma}\pi^{-\sigma}\zeta(s-\nu)\zeta(s+\nu)=$$
$$=\frac{\Gamma(\nu)\zeta(2\nu)}{\pi^\nu(\nu-s)}\varepsilon^{s-\nu}-\frac{\Gamma(-\nu)\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}(\nu+s)}\varepsilon^{s+\nu}+$$
$$+4\varepsilon^s\sum_{n=1}^{\infty}a_\nu(n)\int\limits_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)x^{s-1}\,dx+$$
$$+\frac{\Gamma(\nu)\zeta(2\nu)}{\pi^\nu[\nu-(1-s)]}\bar{\varepsilon}^{1-s-\nu}-\frac{\Gamma(-\nu)\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}[\nu+(1-s)]}\bar{\varepsilon}^{1-s+\nu}+$$
$$+4\bar{\varepsilon}^{1-s}\sum_{n=1}^{\infty}a_\nu(n)\int\limits_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)x^{s-1}\,dx,\quad 0<\mathrm{Re}(s)<1. \tag{5}$$

Положив

$$\rho_\nu(s)=\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\varepsilon^{s-\sigma}\pi^{-\sigma}\zeta(s+\nu)\zeta(s-\nu),$$

мы можем написать формулу (5) в виде

$$\rho_\nu(s)=u(\varepsilon,s)+u(\bar{\varepsilon},1-s),$$

где

$$u(\varepsilon,s)=\frac{\Gamma(\nu)\zeta(2\nu)}{\pi^{-\nu}(\nu-s)}\varepsilon^{s-\nu}-\frac{\Gamma(-\nu)\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}(\nu+s)}\varepsilon^{s+\nu}+$$
$$+4\varepsilon^s\sum_{n=1}^{\infty}a_\nu(n)\int\limits_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)x^{s-1}\,dx,\quad 0<\mathrm{Re}(s)<1. \tag{6}$$

Преобразуем функцию $u(\varepsilon, s)$, выразив все входящие в нее слагаемые через интегралы, взятые вдоль прямой, параллельной биссектрисе координатного угла и пересекающей ось OX между 0 и 1.

В известном интеграле

$$\int\limits_0^\infty J_\nu(y)y^{\sigma-1}\,dy=\frac{2^{\sigma-1}\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-\sigma}{2}+1\right)},\quad -\nu<\mathrm{Re}(\sigma)<\frac{3}{2},$$

вместо переменной интегрирования y введем переменную t посредством соотношения $y=tx$ и заменим σ на $2-s$; тогда получим

$$x^{s-1}=\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-s}{2}\right)}x\int\limits_0^\infty J_\nu(tx)t^{1-s}\,dt.$$

Умножив обе части этого равенства на $K_\nu(2\pi\varepsilon nx)$ и проинтегрировав по x от 1 до ∞, найдем

$$\int_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)\,x^{s-1}\,dx=\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s-\nu}{2}\right)}\int_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)\cdot x\int_0^\infty J_\nu(tx)\,t^{1-s}\,dt\,dx,$$

или

$$\int_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)\,x^{s-1}\,dx=\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s-\nu}{2}\right)}\int_0^\infty t^{1-s}\int_1^\infty xK_\nu(2\pi\varepsilon nx)\,J_\nu(tx)\,dx\,dt.$$

Перестановка порядка интегрирования совершенно законна, так как

$$\int_0^\infty J_\nu(tx)\,t^{1-s}\,dt=\frac{2^{1-s}\Gamma\left(1-\frac{s-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)x^{2-s}},$$

а интеграл от функции

$$\int_1^\infty xK_\nu(2\pi\varepsilon nx)\,J_\nu(tx)\,dx,$$

умноженной на t^{1-s}, абсолютно сходится, что легко установить, если принять во внимание выражение этой функции, полученное ниже [формула (*)].

Таким образом,

$$\int_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)\,x^{s-1}\,dx=\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s-\nu}{2}\right)}\int_0^\infty t^{1-s}\int_1^\infty xK_\nu(2\pi\varepsilon nx)\,J_\nu(tx)\,dx\,dt.$$

Для вычисления интеграла, стоящего в скобках, в известном равенстве

$$\int_1^\infty K_\nu(bz)\,I_\nu(az)\,zdz=z\,\frac{aJ_{\nu+1}(az)\,K_\nu(bz)-bJ_\nu(az)\,K_{\nu+1}(bz)}{a^2+b^2}\Bigg|_1^\infty$$

положим $b=2\pi\varepsilon n,\quad a=t\quad (\varepsilon=e^{\frac{\pi i}{4}})$; тогда

$$\int_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)\,J_\nu(tx)\,x\,dx=\frac{(2\pi\varepsilon n)\,J_\nu(t)\,K_{\nu+1}(2\pi\varepsilon n)-tJ_{\nu+1}(t)\,K_\nu(2\pi\varepsilon n)}{t^2+(2\pi\varepsilon)^2 n^2},$$

ибо при $x\to\infty$ $K_\nu(x)$ обращается в 0. Следовательно,

$$\int_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)^{s-1}\,dx=$$

$$=\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s-\nu}{2}\right)}\int_0^\infty\frac{(2\pi\varepsilon n)\,J_\nu(t)\,K_{\nu+1}(2\pi\varepsilon n)-tJ_{\nu+1}(t)\,K_\nu(2\pi\varepsilon n)}{t^2+(2\pi n)^2\,i}\,t^{1-s}\,dt.$$

Введем обозначение:

$$N(2\pi t,\,2\pi\varepsilon n)=\begin{vmatrix}J_\nu(2\pi t) & K_\nu(2\pi\varepsilon n)\\ 2\pi t\,J_{\nu+1}(2\pi t) & 2\pi\varepsilon n\,K_{\nu+1}(2\pi\varepsilon n)\end{vmatrix}.$$

После несложных преобразований получим, что

$$\int_1^\infty K_\nu(2\pi\varepsilon nx)\, x^{s-1}\, dx =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\sin\pi\frac{s-\nu}{2}}{2\pi^{s+1}} \int_0^\infty \frac{N(2\pi t, 2\pi\varepsilon n)}{t^2+in^2}\, t^{1-s}\, dt, \quad -\frac{1}{2} < \mathrm{Re}(s) < 2. \quad (7)$$

Проинтегрируем функцию $\omega(u) = \frac{N(2\pi u, 2\pi\varepsilon n)}{u^2+in^2}\, u^{1-s}$ по прямоугольнику с вершинами в точках

$$A(t-i\xi), \quad B(-t-i\xi), \quad C(-t), \quad D(t) \quad \left(0 < \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

причем точку 0 вырежем полуокружностью малого радиуса ε, что необходимо ввиду многозначности интегрируемой функции в точке $u=0$.

С помощью известной формулы Darboux (модуль интеграла меньше длины дуги, умноженной на модуль наибольшего значения подинтегральной функции, принимаемого ею на контуре интегрирования), непосредственно устанавливается, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{AD} \omega(u)\, du = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} \int_{BC} \omega(u)\, du = 0.$$

Точно так же

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\smile_\varepsilon} \omega(u)\, du = 0,$$

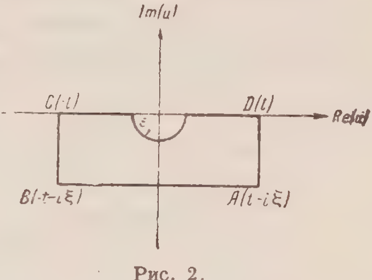


Рис. 2.

так как подинтегральная функция на полуокружности малого радиуса ε ограничена, а длина дуги стремится к 0.

Таким образом, в пределе при $t\to\infty$ из формулы Cauchy получим

$$\int_{AB} \frac{N(2\pi u, 2\pi\varepsilon n)}{u^2+in^2}\, u^{1-s}\, du = \int_{DO} \frac{N(2\pi u, 2\pi\varepsilon n)}{u^2+in^2}\, u^{1-s}\, du + \int_{OC} \frac{N(2\pi u, 2\pi\varepsilon n)}{u^2+in^2}\, u^{1-s}\, du, \quad (8)$$

где под AB и DOC мы разумеем уже бесконечные прямые и

$$N(2\pi u, 2\pi\varepsilon n) = \begin{vmatrix} J_\nu(2\pi u) & K_\nu(2\pi\varepsilon n) \\ 2\pi u\, J_{\nu+1}(2\pi u) & 2\pi\varepsilon n K_{\nu+1}(2\pi\varepsilon n) \end{vmatrix}.$$

На прямой интегрирования DO $\arg x = 0$ и, следовательно, $u = x$; далее, при интегрировании, пройдя по нижней полуплоскости, $\arg x$ изменится на $-\pi i$; таким образом, на прямой OC $u = e^{-\pi i}x$.

Ввиду того что функция $J_\nu(2\pi z)$ может быть представлена как произведение z^ν на некоторую функцию от z^2:

$$J_\nu(2\pi z) = z^\nu f(z^2),$$

мы получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J_\nu(2\pi e^{-i\pi}x) &= e^{-i\pi\nu} J_\nu(2\pi x), \\ 2\pi(e^{-i\pi}x) J_{\nu+1}(2\pi e^{-i}x) &= 2\pi x J_{\nu+1}(2\pi x)\, e^{-i\pi\nu}, \end{aligned} \quad (**)$$

на основании которых

$$N(2\pi e^{-\pi i}x,\ 2\pi\varepsilon n) = e^{-i\pi\nu} N(2\pi x,\ 2\pi\varepsilon n).$$

Тогда соотношение (8) примет вид

$$\int\limits_{\infty - i\xi}^{-\infty - i\xi} \frac{N(2\pi u,\ 2\pi\varepsilon n)}{u^2 + in^2} u^{1-s}\, du = \int\limits_{\infty}^{0} \frac{N(2\pi x,\ 2\pi\varepsilon n)}{x^2 + in^2} x^{1-s}\, dx +$$

$$+ e^{(s-\nu)\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{N(2\pi x,\ 2\pi\varepsilon n)}{x^2 + in^2} x^{1-s}\, dx,$$

или

$$\int\limits_{\infty - i\xi}^{-\infty - i\xi} \frac{N(2\pi u,\ 2\pi\varepsilon n)}{u^2 + in^2} u^{1-s}\, du = 2i \sin \frac{s-\nu}{2}\pi \cdot e^{\frac{s-\nu}{2}\pi i} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{N(2\pi x,\ 2\pi\varepsilon n)}{x^2 + in^2} x^{1-s}\, dx. \quad (9)$$

Положим в интеграле левой части $u = \bar{\varepsilon} x$ $\left(\bar{\varepsilon} = e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)$. При этом преобразовании каждое x получается поворотом u на угол $\frac{\pi}{4}$ в положительном направлении; значит, при такой замене переменной прямая интегрирования повернется на угол $\frac{\pi}{4}$ в положительном направлении и, вследствие того, что $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$, будет пересекать ось Ox между 0 и 1, т. е.

$$\int\limits_{\infty - i\xi}^{-\infty - i\xi} \frac{N(2\pi u,\ 2\pi\varepsilon n)}{u^2 + in^2} u^{1-s}\, du = \int\limits_{0 \swarrow 1} \frac{N(2\pi\bar{\varepsilon} x,\ 2\pi\varepsilon n)}{x^2 - n^2} \bar{\varepsilon}^{-s} x^{1-s}\, dx. \quad (10)$$

Таким образом, из соотношения (7), принимая во внимание формулы (9) и (10), получим, после некоторых преобразований

$$4\varepsilon^s \int\limits_{1}^{\infty} K_\nu(2\pi\varepsilon n x)\, x^{s-1}\, dx = \frac{\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)}{\pi i} \int\limits_{0 \swarrow 1} \frac{N(2\pi\bar{\varepsilon} x,\ 2\pi\varepsilon n)}{x^2 - n^2} x^{1-s}\, dx. \quad (11)$$

На основании известного равенства

$$\int\limits_{0}^{\infty} J_\nu(ax)\, x^{s-1}\, dx = \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2} + 1\right) a^s}, \qquad -\nu < \operatorname{Re}(s) < \frac{3}{2},$$

можно написать

$$\int\limits_{0}^{\infty} J_{\nu+1}(ax)\, x^{-s}\, dx = \frac{2^{1-s} a^{s-1} \pi}{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)(s+\nu) \sin\frac{s-\nu}{2}} \quad (12)$$

$$\left(-\frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < \nu + 2\right).$$

Проинтегрируем функцию $J_{\nu+1}(2\pi u)\, u^{-s}$ по прямоугольнику с вершинами в точках:

$$A(t-i\xi),\quad B(-t-i\xi),\quad C(-t),\quad D(t),$$

причем точку 0 вырежем полуокружностью малого радиуса ε.

По формуле Darboux

$$\left|\int\limits_{AB} J_{\nu+1}(2\pi t)\, t^{-s}\, dt\right| < c t^{-\frac{1}{2}-\mathrm{Re}(s)},$$

где c — постоянное число; устремляя $t\to\infty$, получим в пределе

$$\lim_{t\to\infty}\int\limits_{AB} J_{\nu+1}(2\pi t)\, t^{-s}\, dt = 0,\qquad \lim_{t\to\infty}\int\limits_{CB} J_{\nu+1}(2\pi t)\, t^{-s}\, dt = 0.$$

По той же формуле Darboux получим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\smile\varepsilon} J_{\nu+1}(2\pi u)\, u^{-s}\, du = 0,$$

ибо на полуокружности малого радиуса ε подинтегральная функция ограничена, а длина дуги стремится к 0.

На прямой OD $\arg x = 0$; пройдя по окружности малого радиуса ε, u на прямой OC приобретет приращение аргумента $-\pi i$, т. е. $u = e^{-\pi i} x$.

Рис. 3

Принимая во внимание соотношение (**), получим

$$J_{\nu+1}(2\pi e^{-\pi i}x) = e^{-\pi i(\nu+1)} J_{\nu+1}(2\pi x);$$

из формулы Cauchy в пределе при $t\to\infty$ получим

$$\int\limits_{\infty-i\xi}^{-\infty-i\xi} J_{\nu+1}(2\pi u)\, u^{-s}\, du = e^{\frac{s-\nu}{2}\pi i}\, 2i\sin\frac{s-\nu}{2}\pi \int\limits_{0}^{\infty} J_{\nu+1}(2\pi x)\, x^{-s}\, dx.$$

Вместо интеграла, стоящего справа, внесем его выражение из формулы (12), предварительно заменив там a на 2π; тогда

$$\int\limits_{\infty-i\xi}^{-\infty-i\xi} J_{\nu+1}(2\pi u)\, u^{-s}\, du = \frac{e^{\frac{s-\nu}{2}\pi i}\,\pi^{s-1}\, 2\pi i}{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)(s+\nu)}.$$

Положим в интеграле $u = \bar{\varepsilon} x$: Это равносильно повороту контура интегрирования на угол $\frac{\pi}{4}$ в положительном направлении и, таким образом, прямая AB перейдет в прямую, параллельную биссектрисе 1-го и 3-го координатных углов, идущую сверху вниз и пересекающую ось Ox между 0 и 1 (на основании выбора ξ). Получим

$$\int\limits_{0\swarrow 1} J_{\nu+1}(2\pi\bar{\varepsilon}x)\, x^{-s}\, dx = \frac{e^{\frac{s-\nu}{2}\pi i}\,\pi^{s-1}\cdot 2\pi i}{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)(s+\nu)\,\bar{\varepsilon}^{1-s}}$$

или

$$\frac{\varepsilon^{s}}{s+\nu} = \frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\pi^{-s}\bar{\varepsilon}^{1-3\nu}}{2\pi i}\int\limits_{0\swarrow 1} \pi J_{\nu+1}(2\pi\bar{\varepsilon}x)\, x^{-s}\, dx; \qquad (13)$$

аналогично,

$$\frac{\varepsilon^s}{s-\nu}=\frac{\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\pi^{-s}\bar{\varepsilon}^{1+3\nu}}{2\pi i}\int\limits_{0\swarrow 1}\pi J_{1-\nu}(2\pi\bar{\varepsilon}x)\,x^{-s}\,dx.$$

Положим

$$\rho_\varepsilon(\sigma)=\Gamma\left(\frac{\sigma+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\sigma-\nu}{2}\right)\zeta(s+\nu)\zeta(s-\nu)\pi^{-\sigma};$$

тогда, внося в формулу (6) для функции $u(\varepsilon, s)$ выражение (13) и соотношение (11), окончательно получим

$$\rho_\nu(\sigma)=u(\varepsilon,\sigma)+u(\bar{\varepsilon},\ 1-\sigma),$$

где

$$u(\varepsilon, s)=\Gamma\left(\frac{s+\varepsilon}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\pi^{-s}\left\{-\frac{\Gamma(\nu)\zeta(2\nu)}{\pi^\nu 2\pi i}\bar{\varepsilon}^{1+3\nu}\cdot\int\limits_{0\swarrow 1}J_{1-\nu}(2\pi\bar{\varepsilon}x)\,x^{-s}\,dx-\right.$$
$$-\frac{\Gamma(-\nu)\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}2\pi i}\bar{\varepsilon}^{1-3\nu}\int\limits_{0\swarrow 1}J_{1+\nu}(2\pi\bar{\varepsilon}x)\,x^{-s}\,dx+$$
$$\left.+\frac{\varepsilon^{2\nu}}{\pi i}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{0\swarrow 1}\frac{N(2\pi\bar{\varepsilon}x,\,2\pi\varepsilon n)}{x^2-n^2}\,x^{1-s}\,dx\right\}. \tag{14}$$

Это разложение можно преобразовать к виду

$$\pi^{-s}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\zeta(s+\nu)\zeta(s-\nu)=$$
$$=\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\pi^{-s}\int\limits_{0\swarrow 1}\omega(\bar{\varepsilon},x)\,x^{-s}\,dx+$$
$$+\Gamma\left(\frac{1-s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s-\nu}{2}\right)\pi^{s-1}\int\limits_{0\swarrow 1}\omega(\varepsilon,x)\,x^{s-1}\,dx, \tag{15}$$

где

$$\omega(\bar{\varepsilon},\ x)=\frac{1}{2\pi i}\left\{-\frac{\Gamma(\nu)\zeta(2\nu)}{\pi^\nu}\bar{\varepsilon}^{1+3\nu}\pi J_{1-\nu}(2\pi\bar{\varepsilon}x)-\right.$$
$$\left.-\frac{\Gamma(-\nu)\zeta(-2\nu)}{\pi^{-\nu}}\bar{\varepsilon}^{1-3\nu}J_{1+\nu}(2\pi\bar{\varepsilon}x)+2x\varepsilon^{2\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N(2\pi\bar{\varepsilon}x,\,2\pi\varepsilon n)}{x^2-n^2}\right\},$$

$$N(2\pi\bar{\varepsilon}x,\ 2\pi\varepsilon n)=\begin{vmatrix}J_\nu(2\pi\bar{\varepsilon}x) & K_\nu(2\pi\varepsilon n)\\ 2\pi\bar{\varepsilon}xJ_{\nu+1}(2\pi\bar{\varepsilon}x) & 2\pi\varepsilon nK_{\nu+1}(2\pi\varepsilon n)\end{vmatrix}.$$

Полученная формула аналогична известной формуле Riemann'а-Siegel'я для функции $\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$.

Заметим, что подобные интегральные представления, когда интегрирование производится по прямым, параллельным биссектрисам координатных углов и пересекающим ось между 0 и 1, известны также для квадрата функции Riemann'а ([6]) и для рядов Dirichlet

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s},$$

где через $\chi(n)$ обозначен собственный характер по нечетному модулю ([7]).

§ 3. Третье интегральное представление функции $\varphi_\nu(s)$

Рассмотрим хорошо известное равенство

$$\frac{1}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\pi\, d\sigma}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\left(\frac{n}{y}\right)^\sigma}, \quad a>0;$$

умножим обе части этого равенства на $\frac{a_\nu(n)\, n^{s-1}}{y^s}$ и просуммируем по n от 1 до ∞; тогда получим

$$\frac{1}{y^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_\nu(n)\, n^{s-1}}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_\nu(n)}{n^{\sigma-s-1}}\frac{d\sigma}{y^{s-\sigma}}, \tag{1}$$

где считаем

$$1<a<2, \quad 0<\operatorname{Re}(s)<1-\nu. \tag{2}$$

Перемена порядка суммирования и интегрирования будет здесь законна, ибо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_\nu(n)}{n^{\sigma-s+1}}$ сходится абсолютно на прямой $\operatorname{Re}(\sigma)=a$, ввиду условия (2); также и интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\cdot\frac{a_\nu(n)}{n^{\sigma-s+1}\, y^{s-\sigma}}\,d\sigma$$

сходится абсолютно, что видно из неравенства

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\pi\, d\sigma}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\; y^{s-\sigma}}\right|<$$

$$<y^{a-\operatorname{Re}(s)}\, a_\nu(n)\, n^{\operatorname{Re}(s)-a}\int_0^\infty\frac{dt}{\sqrt{e^{\pi t}+e^{-\pi t}-2\cos\pi a}}.$$

Таким образом, из соотношения (1) получаем

$$\frac{1}{y^s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_\nu(n)\, n^{s-1}}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(\sigma-s+1)\, d\sigma}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot y^{s-\sigma}}$$

$$(1<a<2, \quad 0<\operatorname{Re}(s)<1-\nu). \tag{3}$$

Функцию, стоящую под знаком интеграла,

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\cdot\frac{\varphi_\nu(\sigma-s+1)}{y^{s-\sigma}}=\frac{\pi\zeta(\sigma-s+1-\nu)\,\zeta(\sigma-s+1+\nu)}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot y^{s-\sigma}}$$

проинтегрируем по прямоугольнику с вершинами в точках:

$$A(a-it), \qquad B(a+it), \qquad C(b+it), \qquad D(b-it),$$

где $0<b<1-2\nu$.

Ввиду наличия равномерной относительно τ оценки

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}} = O\left(e^{-\frac{\pi|t|}{2}}\right), \quad \sigma = \tau + it$$

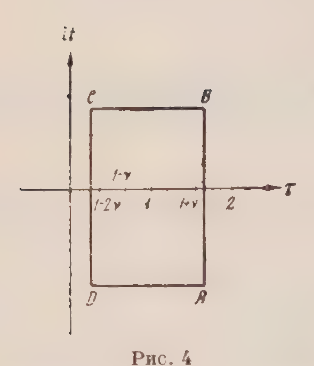


Рис. 4

для всех τ, лежащих в промежутке $b \leqslant \tau \leqslant a$, в пределе при $t \to \infty$ интегралы вдоль CB и DA будут стремиться к нулю, и по теореме Cauchy получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}} \frac{\varphi_\nu(\sigma - s + 1)}{y^{s-\sigma}} d\sigma =$$

$$= R_{s+\nu} + R_{s-\nu} + \frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i} \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}} \frac{\varphi_\nu(\sigma - s + 1)}{y^{s-\sigma}} d\sigma, \tag{4}$$

где через $R_{s+\nu}$ и $R_{s-\nu}$ обозначены вычеты функции $\varphi_\nu(\sigma - s + 1)$, которые она имеет в полюсах $\sigma = s + \nu$ и $\sigma = s - \nu$.

Простое вычисление этих вычетов приводит к выражениям:

$$\left.\begin{aligned} R_{s+\nu} &= \frac{\pi}{y^{-\nu}\cdot 2\sin\frac{s+\nu}{2}\pi}\zeta(1+2\nu), \\ R_{s-\nu} &= \frac{\pi}{y^{\nu}\cdot 2\sin\frac{s-\nu}{2}\pi}\zeta(1-2\nu). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подставим вместо интеграла, стоящего слева в формуле (4), его выражение (3) в виде бесконечного ряда; тогда, приняв во внимание формулы (5), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\nu(n)\, n^{s-1}}{1 + \left(\frac{n}{y}\right)^2} - \frac{\pi y^{s+\nu}\zeta(1+2\nu)}{2\sin\pi\frac{s-\nu}{2}} -$$

$$- \frac{\pi y^{s-\nu}\zeta(1-2\nu)}{2\sin\pi\frac{s+\nu}{2}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i} \frac{\pi\varphi_\nu(\sigma - s + 1)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot y^{-\sigma}} d\sigma. \tag{6}$$

Составим интеграл

$$I = 2\pi x^{1-s}\int_0^\infty \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_\nu(n)\, n^{s-1}}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2} - \frac{\pi y^{s-\nu}\zeta(1-2\nu)}{2\sin(s+\nu)\frac{\pi}{2}} -\right.$$

$$\left. - \frac{\pi y^{s+\nu}\zeta(1+2\nu)}{2\sin(s-\nu)\frac{\pi}{2}}\right]\cdot\left[\frac{\cos\nu\pi M_{2\nu}(2\pi\sqrt{xy}) - \sin\nu\pi J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})}{y^s}\right]. \tag{7}$$

На основании равенства (6),

$$I = \pi x^{1-s}\int_0^\infty \frac{\cos\nu\pi M_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy}) - \sin\nu\pi J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})}{y^s}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(\sigma - s + 1)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot y^{-\sigma}} d\sigma\, dy.$$

Произведем оценку подинтегрального выражения при малых y. Рассмотрим

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\cdot\frac{\varphi_\nu(\sigma-s+1)}{y^{-\sigma}}\,d\sigma$$

или

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{\pi}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}}\cdot\frac{\varphi_\nu(\sigma-s+1)}{z^{\sigma}}\,d\sigma,$$

где $z=\frac{1}{y}$. При больших z $|S|<\frac{N}{z^b}$, т. е. при малых y S будет величиной порядка y^b.

В силу того, что при малых x имеют место приближенные соотношения

$$J_\nu(x)\sim\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(1+\nu)},\quad J_{-\nu}(x)\sim\frac{x^{-\nu}}{2^{-\nu}\Gamma(1-\nu)},\quad K_\nu(x)\sim\frac{\pi\cdot 2^{\nu-1}x^{-\nu}}{\sin\pi\nu\cdot\Gamma(1-\nu)},$$

сходимость при малых y будет зависеть от того члена в приближенном выражении для функции

$$\frac{\cos\nu\pi\, M_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})-\sin\nu\pi\, J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})}{y^s}=$$

$$=\frac{1}{y^s}\left[\frac{2}{\pi}\cos\nu\pi\, K_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})+\frac{J_{-2\nu}(4\pi\sqrt{xy})-J_{-2\nu}(4\pi\sqrt{xy})}{2\sin\nu\pi}\right], \qquad (*)$$

который будет содержать $y^{-s-\frac{\nu}{2}}$. Поэтому для сходимости при малых y необходимо, чтобы $\mathrm{Re}(s)+\frac{\nu}{2}-b<1$, что выполняется при $\mathrm{Re}(s)<1-\frac{\nu}{2}$ (по условию $0<b<1-2\nu$).

На основании асимптотических разложений, имеющих место для функций $K_\nu(x)$, $J_\nu(x)$ при больших значениях аргумента:

$$K_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,e^{-x}\cos\pi\nu\left[1+O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+O\left(\frac{1}{x^2}\right)+O\left(\frac{\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{x}\right)\right],$$

получим, что

$$K_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})\sim\frac{e^{-4\pi\sqrt{xy}}}{\sqrt[4]{y}}\left[1+O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)\right],$$

$$J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})\sim\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{xy}-\nu\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[4]{y}}\left[1+O\left(\frac{1}{y}\right)+\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{\sin\left(4\pi\sqrt{xy}-\nu\pi+\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{y}}\right)\right].$$

Следовательно, функция (*) при больших y будет иметь порядок

$$\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{xy}-\nu\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[4]{y}\cdot y^s},$$

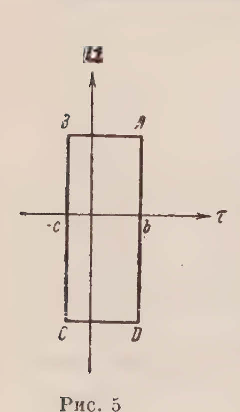


Рис. 5

если принимать во внимание только главный член в указанных асимптотических разложениях.

Произведем теперь оценку выражения

$$S=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(\sigma-s+1)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot y^{-\sigma}}\,d\sigma$$

при больших y. Для этого проинтегрируем функцию, стоящую под знаком интеграла, по прямоугольнику с вершинами в точках

$$A(b+it),\quad B(-c+it),\quad C(-c-it)\quad D(b-it),$$

где $c>0$.

В силу упоминавшихся ранее оценок, интегралы вдоль отрезков AB и CD в пределе при $t\to\infty$ обратятся в 0. По теореме Cauchy будем иметь

$$S=R_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-c-\infty i}^{-c+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(\sigma-s+1)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot y^{-\sigma}}\,d\sigma,$$

где R_0 — вычет подинтегральной функции относительно полюса $s=0$ — величина постоянная относительно y, равная $\varphi_\nu(1-s)$.

В полученном соотношении произведем замену переменной σ на $-t$; тогда

$$S=R_0+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(-t-s+1)}{2\sin\frac{\pi t}{2}\cdot y^{t}}\,dt.$$

Но

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-\infty i}^{c+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(-t-s+1)}{2\sin\frac{\pi t}{2}\cdot y^{t}}\,dt\right|<\frac{M}{y^c},$$

вследствие чего при больших y имеет место следующее соотношение:

$$S=\mathrm{const}+O\left(\frac{1}{y^c}\right),\quad c>0.$$

Итак, необходимо, чтобы сходился интеграл

$$\int\limits_A^\infty\frac{\cos\left(4\pi\sqrt{xy}-\nu\pi-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt[4]{y}\cdot y^s}\,dy,$$

что будет выполняться, если $\mathrm{Re}(s)>-\frac{1}{4}$.

Перестановка порядка интегрирования, в данном случае законная, даст

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(\sigma-s+1)}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}}x^{1-s}\cdot\int\limits_0^\infty\frac{\cos\nu\pi\, M_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})-\sin\nu\pi J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})}{y^{s-\sigma}}\,dy\,d\sigma.$$

Для вычисления интеграла

$$N=\int\limits_0^\infty[\cos\nu\pi M_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})-\sin\nu\pi J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})]\frac{dy}{y^{s-\sigma}},$$

приняв во внимание, что

$$\cos\nu\pi\cdot M_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})-\sin\nu\pi J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})=$$
$$=\frac{2}{\pi}\cos\nu\pi K_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})+\frac{J_{-2\nu}(4\pi\sqrt{xy})-J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})}{2\sin\nu\pi},$$

используем известные соотношения:

$$\int\limits_0^\infty K_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})\,y^{l-1}\,dy=\frac{\Gamma(l+\nu)\Gamma(l-\nu)}{(2\pi)^{2l}x^l\cdot 2},$$

$$\int\limits_0^\infty J_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})\,y^{l-1}\,dy=\frac{\Gamma(l+\nu)\Gamma(l-\nu)\sin\pi(l-\nu)}{(2\pi)^{2l}x^l\pi},$$

$$\int\limits_0^\infty J_{-2\nu}(4\pi\sqrt{xy})\,y^{l-1}\,dy=\frac{\Gamma(l+\nu)\Gamma(l-\nu)\sin\pi(l+\nu)}{(2\pi)^{2l}x^l\pi},$$

заменив в них $1-l$ на $s-\sigma$. После простого преобразования получим, что

$$N=\frac{2\Gamma(\sigma-s+1+\nu)\Gamma(\sigma-s+1-\nu)\cos\frac{\sigma-s+1+\nu}{2}\pi\cdot\cos\frac{\sigma-s+1-\nu}{2}\pi}{(2\pi)^{2(\sigma-s+1)}x^{\sigma-s+1}\pi}.$$

Подставляя значение вычисленного интеграла в выражение интеграла I, будем иметь

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{2\pi\varphi_\nu(\sigma-s+1)\Gamma(\sigma-s+1+\nu)\Gamma(\sigma-s+1-\nu)\Phi(\sigma,s,\nu)\,d\sigma}{\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot(2\pi)^{2(\sigma-s+1)}x^\sigma},$$

где

$$\Phi(\sigma,s,\nu)=\cos\frac{\sigma-s+1+\nu}{2}\pi\cdot\cos\frac{\sigma-s+1-\nu}{2}\pi.$$

Преобразуем подинтегральное выражение, приняв во внимание функциональное уравнение для $\varphi_\nu(\tau)$:

$$\frac{\varphi_\nu(\tau)}{\varphi_\nu(1-\tau)}=\frac{\pi^{2\tau}2^{2\tau-2}}{\cos\frac{\tau-\nu}{2}\pi\cdot\cos\frac{\tau+\nu}{2}\pi\cdot\Gamma(\tau-\nu)\Gamma(\tau+\nu)},$$

в котором положим $\tau=1-(s-\sigma)$, после чего окончательно получим следующее выражение для интеграла I:

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(s-\sigma)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot x^\sigma}\,d\sigma.$$

Проинтегрируем подинтегральную функцию в последнем выражении по прямоугольнику, вершины которого находятся в точках

$$A(b+it),\quad B(-b+it),\quad C(-b-it),\quad D(b-it).$$

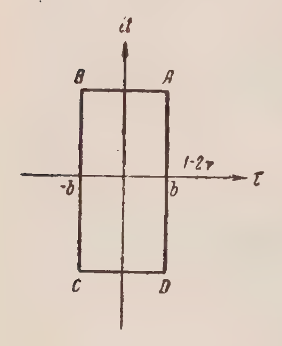


Рис. 6

Единственный полюс функции внутри контура будет $s=0$ с вычетом, равным $\varphi_\nu(s)$.

Ввиду наличия равномерной относительно τ оценки

$$\varphi_\nu(s-\sigma)=O\{|t|^{2(1-\tau-\sigma)+\varepsilon}\},$$

$$\sin\frac{\pi\sigma}{2}=O(e^{\frac{\pi|t|}{2}}),\quad \sigma=\tau+ti,$$

$$-b\leqslant\tau\leqslant b,$$

интегралы вдоль прямых AB и CD в пределе при $t\to\infty$ обратятся в 0. Таким образом, в пределе из формулы Couchy получим

$$I-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(s-\sigma)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}x^\sigma}\,d\sigma=\varphi_\nu(s),$$

или

$$\varphi_\nu(s)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{b-\infty i}^{b+\infty i}\frac{\pi\varphi_\nu(\sigma+s)}{2\sin\frac{\pi\sigma}{2}\cdot x^{-\sigma}}\,d\sigma+I.$$

Выражение для первого интеграла, стоящего в правой части последней формулы, мы получим из формулы (6), если заменим там $1-\sigma$ через s; выражение для интеграла I возьмем из формулы (7); таким образом, получаем окончательный результат:

$$\zeta(s+\nu)\zeta(s-\nu)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_\nu(n)\,n^{-s}}{1+\left(\frac{n}{x}\right)^s}-\frac{\pi x^{1+s-\nu}}{2\cos\frac{s+\nu}{2}\pi}\zeta(1-2\nu)-\frac{\pi x^{1-s-\nu}}{2\cos\frac{s-\nu}{2}\pi}\zeta(1+2\nu)+$$

$$+2\pi x^{1-s}\int\limits_0^\infty\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n_\nu(n)\,n^{s-1}}{1+\left(\frac{n}{y}\right)^2}-\frac{\pi y^{s+\nu}\zeta(1-2\nu)}{2\sin\frac{s+\nu}{2}\pi}-\frac{\pi y^{s-\nu}\zeta(1+2\nu)}{2\sin\frac{s-\nu}{2}\pi}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\cos\nu\pi M_{2\nu}(4\pi\sqrt{xy})\sin J\nu\pi\,2\nu(4\pi\sqrt{xy})}{y^s}\right.dy\qquad(x>0,\ 0<\mathrm{Re}(s)<1-\nu).$$

Поступило
16.XI.1946

ЛИТЕРАТУРА

[1] Watson S., Treatise of the Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922.
[2] Riemann B., Gesammelte mathematische Werke, Leipzig, 1876.
[3] Siegel C. L., Über Riemanns Nachlass zur analytischen Zahlentheorie, Quellen und Studien zur Gesch. der Math., Astronom. und Phys. II, 1 (1932), 45—80.
[4] Кузьмин Р. О., О корнях рядов Дирихле, ИМЕН, 10 (1934), 1471—1491.
[5] Анфертьева Е. А., О формулах суммирования и аналитических тождествах, связанных с одним классом арифметических функций, Труды Ленинградск. политехн. инст., 3 (1941), 1—20.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

12 (1948), 97—100

Б. В. ГНЕДЕНКО

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ С. Н. БЕРНШТЕЙНА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе излагается одно характеристическое свойство нормального распределения вероятностей на плоскости.

С. Н. Бернштейном была доказана ([1]) следующая изящная теорема: *Пусть x и y будут две независимые случайные величины, имеющие равные дисперсии. Для того чтобы величины*

$$u = x + y, \quad v = x - y$$

также были между собой независимы, необходимо и достаточно, чтобы каждая величина x, y подчинялась закону Гаусса.

При доказательстве этой теоремы предполагалось также, что x и y имеют необращающиеся в нуль плотности распределения.

Цель настоящей заметки состоит в доказательстве следующего несколько более общего предложения.

ТЕОРЕМА. *Пусть на плоскости имеется невырожденное* распределение вероятностей. Для того чтобы это распределение было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы можно было двумя различными способами выбрать на этой плоскости такие оси координат XOY и UOV, в которых распределения вероятностей координат x и y точек плоскости, а также координат u и v, были бы независимыми.*

Доказательство. Пусть x, y и u, v связаны между собой соотношениями

$$\left.\begin{aligned} u &= \alpha x + \beta y, \\ v &= a x + b y. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Требование теоремы о различии систем координат XOY и UOV состоит в том, что из рассмотрения исключаются такие линейные преобразования (1), в которых

$$u = \alpha x, \quad v = by,$$

или

$$u = \beta y, \quad v = ax.$$

Докажем прежде всего, что ни одно из чисел α, β, a, b не может обратиться в нуль. Предположим обратное; пусть, например, $\beta = 0$, а x и y, а также u и v независимы.

* Т. е. не сосредоточенные на какой-либо одной прямой.

Обозначим через $f_\xi(t)$ характеристическую функцию величины ξ. Тогда из (1) и условий независимости заключаем, что

$$f_u(t) = f_x(\alpha t),$$
$$f_v(\tau) = f_x(a\tau) \cdot f_y(b\tau),$$
$$f_u(t) \cdot f_v(\tau) = f_x(\alpha t + a\tau) \cdot f_y(b\tau).$$

Отсюда вытекает, что

$$f_x(\alpha t + a\tau) \cdot f_y(b\tau) = f_x(\alpha t) \cdot f_x(a\tau) \cdot f_y(b\tau).$$

Положим $\alpha t = -a\tau$; тогда

$$f_y(b\tau) = f_x(-a\tau) \cdot f_x(a\tau) \cdot f_y(b\tau).$$

В некоторой области $|\tau| < T$ $f_y(b\tau) \neq 0$. Для этих значений τ, как это следует из предыдущего равенства, должно быть $|f_x(a\tau)| = 1$. Известно [(2), теорема 12], что это равенство возможно только в том случае, когда $P\{x = \text{const}\} = 1$ и, значит, распределение вероятностей вырождается. Условием теоремы такая возможность исключена.

Изменим обозначения, положив в (1)

$$\alpha x = X, \quad \beta y = Y,$$
$$U = u, \quad V = \frac{\alpha}{\beta} v, \quad c = \frac{\alpha b}{a\beta}.$$

При этом независимость величин X и Y, а также U и V сохраняется. Равенства (1) в новых обозначениях принимают вид

$$U = X + Y,$$
$$V = X + cY.$$

Если распределение вероятностей нормально, то известно, что можно выбрать оси координат XOY так, что величины X и Y становятся независимыми. В случае нормального распределения для независимости величин U и V достаточно, чтобы

$$R(U, V) = E(U - EU)(V - EV) = 0.$$

Легко видеть, что

$$R(U, V) = E(X - EX)^2 + cE(Y - EY)^2 = \sigma_x^2 + c\sigma_y^2.$$

Таким образом, если c выбрано так, что

$$\sigma_x^2 = -c\sigma_y^2,$$

то величины U и Y становятся независимыми.

Для доказательства обратного предложения воспользуемся аппаратом характеристических функций. Согласно предположению,

$$f_u(t) \cdot f_v(\tau) = f_x(t + \tau)\, f_y(t + c\tau). \tag{2}$$

Докажем, что функции $f_x(t)$, $f_y(t)$, $f_u(t)$, $f_v(t)$ ни при одном значении t не обращаются в нуль. Предположим обратное: пусть, например, $f_u(t)$ обращается в нуль при некотором $t = t_0$. Тогда, в силу (2), при любом τ

$$f_x(t_0 + \tau) \cdot f_y(t_0 + c\tau) = 0.$$

Отсюда, в частности, положив $\tau = -\frac{1}{c} t_0$, находим, что

$$f_x\left(\frac{c-1}{c} t_0\right) = 0.$$

Положив в (2) $\tau = 0$, $t = \frac{c-1}{c} t_0$, находим, что

$$f_u\left(\frac{c-1}{c} t_0\right) = 0.$$

Повторив эти рассуждения, заключаем, что

$$f_u(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = \left(\frac{c-1}{c}\right)^k t_0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$f_x(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = \left(\frac{c-1}{c}\right)^k t_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Подобным же образом находим, что

$$f_u(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = -(c-1)^k t_0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

и

$$f_y(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = -(c-1)^k t_0 \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Если $c > 0$, то либо $\frac{c-1}{c}$ (при $c > 1$), либо $c - 1$ (при $c < 1$) по абсолютной величине меньше 1. Из предыдущего вытекает, что в этом случае для сходящейся к нулю последовательности значений t функция $f_u(t)$ обращается в нуль. Для характеристической функции это невозможно.

Пусть теперь $c < 0$ и t_0 — наименьший по абсолютной величине нуль по крайней мере одной из функций $f_u(t)$ и $f_v(t)$. Из (2) находим, что:

а) если $f_u(t_0) = 0$, то либо $f_x(t_0) = 0$, либо $f_y(t_0) = 0$;

б) если $f_v(t_0) = 0$, то либо $f_x(t_0) = 0$, либо $f_y(ct_0) = 0$.

Если $f_x(t_0) = 0$, то положим $t = -c\tau$, $t + \tau = \tau(1 - c) = t_0$. Из (2) заключаем, что в этом случае

$$f_u\left(-\frac{c}{1-c} t_0\right) f_v\left(\frac{1}{1-c} t_0\right) = 0. \tag{3}$$

Если $f_y(t_0) = 0$ то, положив $t + c\tau = t_0$, $t = -\tau$, находим из (2), что

$$f_u\left(\frac{t_0}{1-c}\right) \cdot f_v\left(\frac{-t_0}{1-c}\right) = 0. \tag{4}$$

Наконец, если $f_y(ct_0) = 0$, то положив $t + c\tau = ct_0$, $t = -\tau$, находим

$$f_u\left(\frac{c}{1-c} t_0\right) \cdot f_v\left(-\frac{c}{1-c} t_0\right) = 0. \tag{5}$$

Равенства (3), (4), (5) противоречат предположению о t_0, так как и $\frac{c}{1-c}$, и $\frac{1}{1-c}$ по абсолютной величине меньше 1.

Положим

$$\psi_\xi(t) = \ln f_\xi(t).$$

В этом обозначении равенство (2) перепишется в виде

$$\psi_u(t) + \psi_v(\tau) = \psi_x(t + \tau) + \psi_y(t + c\tau). \tag{6}$$

Придавая t и τ произвольные приращения h и h_1, находим, что

$$\psi_u(t+h)+\psi_v(\tau+h_1)=\psi_x(t+\tau+h+h_1)+\psi_y(t+c\tau+h+ch_1), \quad (7)$$

$$\psi_u(t+h)+\psi_v(\tau)=\psi_x(t+\tau+h)+\psi_y(t+c\tau+h), \quad (8)$$

$$\psi_u(t)+\psi_v(\tau+h_1)=\psi_x(t+\tau+h_1)+\psi_y(t+c\tau+ch_1). \quad (9)$$

Сложив равенства (6) и (7) и вычтя из них (8) и (9), получаем

$$F_x(t+\tau, h, h_1)+F_y(t+c\tau, h, h_1)=0, \quad (10)$$

где

$$F_x(t+\tau, h, h_1)=\psi_x(t+\tau+h+h_1)-\psi_x(t+\tau+h)-$$
$$-\psi_x(t+\tau+h_1)+\psi_x(t+\tau)$$

и

$$F_y(t+c\tau, h, h_1)=\psi_y(t+c\tau+h+ch_1)-\psi_y(t+c\tau+h)-$$
$$-\psi_y(t+c\tau+ch_1)-\psi_y(t+c\tau).$$

Равенство (10), очевидно, возможно только тогда, когда функции $F_x(z,h,h_1)$ и $F_y(z, h, h_1)$ зависят лишь от h и h_1, т. е.

$$F_x(t+\tau, h, h_1)=-F_y(t+c\tau, h, h_1)=\gamma(h, h_1).$$

Положив $\gamma(h, h)=c_1(h)$ и $\gamma\left(h, \frac{h}{c}\right)=-c_2(h)$, находим, что

$$\Delta_h^2\psi_x(z)=c_1(h)$$

и

$$\Delta_h^2\psi_y(z)=c_2(h).$$

Известно, что эти уравнения имеют единственное решение

$$\psi_x(z)=\frac{c_1(h)}{2h^2}z^2+B_1(h)z+A_1(h)$$

и

$$\psi_y(z)=\frac{c_2(h)}{2h^2}z^2+B_2(h)z+A_2(h).$$

Теорема доказана.

Поступило
10.III.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса, Труды Ленингр. политехн. института, № 3 (1941), 21—22.

[2] Хинчин А. Я., Предельные законы для сумм независимых случайных величин, М.—Л., 1938.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 101—110

В. И. БИТЮЦКОВ

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СОБЫТИЙ, ОБРАЗУЮЩИХ СЛОЖНУЮ ЦЕПЬ ВТОРОГО ПОРЯДКА *

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Локальная предельная теорема Лапласа распространяется на случай последовательности событий, связанных в сложную цепь второго порядка.

А. А. Марков в 1907 и 1911 гг. в своих работах (²) и (³) распространил (в схеме Бернулли) интегральную предельную теорему Лапласа на случай простых цепей и сложных цепей второго порядка.

В 1927 г. Pepper (¹) доказал (в схеме Бернулли) локальную предельную теорему Лапласа для простых цепей.

Задача настоящей статьи заключается в распространении локальной предельной теоремы Лапласа на случай последовательности событий, связанных в сложную цепь второго порядка.

1. Введем обозначения:

а) Пусть $p^{(1)}$ — вероятность появления события E в первом испытании.

б) Условная вероятность появления события E во втором испытании, при известном результате первого испытания, принимает одно из двух значений: $p_1^{(2)}$ и $p_0^{(2)}$ в зависимости от появления в первом испытании события E или непоявления его (т. е. появления противоположного события F).

в) Условная вероятность появления события E в k-м испытании ($k \geqslant 3$), если установлен результат двух предыдущих испытаний

$$EE, \quad EF, \quad FE, \quad FF,$$

принимает соответственно значения

$$p_{11}, \quad p_{10}, \quad p_{01}, \quad p_{00}.$$

Эти величины остаются неизменными и по выяснении результатов прочих испытаний, предшествующих рассматриваемому.

Будем предполагать, что все вероятности p_{ij} подчинены неравенствам $0 < p_{ij} < 1$. К введенным вероятностям присоединим еще вероят-

---

* Пользуюсь случаем выразить свою глубокую благодарность А. Н. Колмогорову, поставившему передо мной эту задачу и сделавшему ряд ценных замечаний, которыми я воспользовался.

ности появления противоположного события F:

$$q^{(1)} = 1 - p^{(1)}, \quad q_1^{(2)} = 1 - p_1^{(2)}, \quad q_0^{(2)} = 1 - p_0^{(2)}, \quad q_{11} = 1 - p_{11},$$

$$q_{10} = 1 - p_{10}, \quad q_{01} = 1 - p_{01}, \quad q_{00} = 1 - p_{00}.$$

Кроме того, введем величины

$$p, \quad q = 1 - p, \quad p_1, \quad q_1 = - p_1, \quad p_0, \quad q_0 = 1 - p_0$$

таким образом, чтобы выполнялись следующие условия:

$$p = pp_1 + qp_0,$$
$$p_1 = p_1 p_{11} + q_1 p_{01},$$
$$p_0 = p_0 p_{10} + q_0 p_{00}.$$

Отсюда имеем

$$p\, q_1 = qp_0, \tag{1}$$
$$p_1 q_{11} = q_1 p_{01}, \tag{2}$$
$$p_0 q_{10} = q_0 p_{00}. \tag{3}$$

(Заметим, между прочим, что p, p_1 и p_0 являются пределами при $n \to \infty$ соответственно для вероятностей $p^{(n)}$, $p_1^{(n)}$ и $p_0^{(n)}$, где $p^{(n)}$ обозначает вероятность появления события E в n-м испытании, $p_1^{(n)}$ обозначает условную вероятность появления события E в n-м испытании, если в $(n-1)$-м испытании появилось событие E и, наконец, $p_0^{(n)}$ обозначает условную вероятность появления события E в n-м испытании, если в $(n-1)$-м испытании появилось противоположное событие F).

2. Выведем выражение для $P(m, n)$—вероятности точно m появлений события E в n испытаниях.

Пусть $P_{XY}^{ZU}(m, n)$, где X, Y, Z и U принимают значения E или F, есть вероятность точно m появлений события E в n испытаниях в предположении, что в первых двух испытаниях появляются последовательно X и Y, а в двух последних (из рассматриваемых n) Z и U. Очевидно, что $P(m, n)$ равно сумме шестнадцати вероятностей:

$$\left.\begin{array}{llll} P_{EE}^{EE}(m, n), & P_{FE}^{EE}(m, n), & P_{EF}^{EE}(m, n), & P_{FF}^{EE}(m, n), \\ P_{EE}^{FE}(m, n), & P_{FE}^{FE}(m, n), & P_{EF}^{FE}(m, n), & P_{FF}^{FE}(m, n), \\ P_{EE}^{EF}(m, n), & P_{FE}^{EF}(m, n), & P_{EF}^{EF}(m, n), & P_{FF}^{EF}(m, n), \\ P_{EE}^{FF}(m, n), & P_{FE}^{FF}(m, n), & P_{EF}^{FF}(m, n), & P_{FF}^{FF}(m, n). \end{array}\right\} \tag{4}$$

Рассмотрим подробнее вероятность $P_{EF}^{EF}(m, n)$. Предположим, что событие E появляется в следующем порядке;

$$\begin{array}{rl} e_1 & \text{появлений } E, \\ f_1 & \text{появлений } F, \\ e_2 & \text{появлений } E, \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ f_{k-1} & \text{появлений } F, \\ e_k & \text{появлений } E, \\ f_k & \text{появлений } F \end{array} \tag{A}$$

(в рассматриваемом случае $e_1=f_k=1$). Ясно, что

$$\sum_{s=1}^{k} e_s=m \quad \text{и} \quad \sum_{s=1}^{k} f_s=n-m.$$

Пусть i есть число не равных единице e_s; j — число не равных единице f_s. Тогда вероятность этой фиксированной комбинации равна

$$p^{(1)}q_1^{(2)}p_{11}^{m-k-i}q_{11}^{i}p_{01}^{i}q_{01}^{k-i-1}p_{10}^{k-j-1}q_{10}^{j}p_{00}^{j}q_{00}^{n-m-k-j}. \tag{B}$$

Мы видим, что эта вероятность зависит только от значений k, i и j. Сумма всех e_s, не равных единице, равна $m-k+i$; число $m-k+i$ можно представить в виде суммы i положительных чисел e, не равных единице, $C_{m-k+i-i-1}^{i-1}=C_{m-k-1}^{i-1}$ различными способами.

Сумма f_s, не равных единице, равна $n-m-k+j$; это число можно представить в виде суммы j положительных чисел f, не равных единице, $C_{n-m-k+j-j-1}^{j-1}=C_{n-m-k-1}^{j-1}$ различными способами.

Наконец, те e_s и f_s, которые равны единице, можно разместить в последовательности (A) C_{k-1}^{k-i-1} (для e_s) и C_{k-1}^{k-j-1} (для f_s) различными способами.

Итак, для фиксированных k, i и j имеется

$$C_{m-k-1}^{i-1}\cdot C_{n-m-k-1}^{j-1}\cdot C_{k-1}^{k-i-1}\cdot C_{k-1}^{k-j-1}$$

различных последовательностей вида (A), вероятность каждой из которых дается выражением (B). Заметим, что k может принимать все значения от 2 до m, i — от 0 до k, j — от 0 до k. Складывая вероятности последовательностей вида (A) для всевозможных значений k, i и j, получим

$$P_{EF}^{EF}(m,\,n)=\sum_{k=2}^{m}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} p^{(1)}q_1^{(2)}\cdot C_{m-k-1}^{i-1}\,p_{11}^{m-k-i}q_{11}^{i}\cdot C_{k-1}^{k-i-1}\,p_{01}^{i}\cdot$$
$$\cdot\, q_{01}^{k-i}\cdot C_{k-1}^{k-j-1}p_{10}^{k-j-1}q_{10}^{j}\cdot C_{n-m-k-1}^{j-1}p_{00}^{j}q_{00}^{n-m-k-j}.$$

Аналогичным образом подсчитываются все вероятности (4).

Если ввести обозначение

$$A(m,\,n)=\sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{k} C_{m-k}^{i}\,p_{11}^{m-k-i}q_{11}^{i}\cdot C_{k}^{i}\,p_{01}^{i}\,q_{01}^{k-i}\cdot$$
$$\cdot\, C_{k}^{j}\,p_{10}^{k-j}q_{10}^{j}\,C_{n-m-k}^{j}\,p_{00}^{j}\,q_{00}^{n-m-k-j}, \tag{5}$$

то имеют место следующие асимптотические равенства:

$P_{EE}^{EE}(m,\,n)\sim p^{(1)}p_1^{(2)}p_{01}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{EE}^{FE}(m,\,n)\sim p^{(1)}p_1^{(2)}q_{11}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{EE}^{EF}(m,\,n)\sim p^{(1)}p_1^{(2)}q_{11}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{EE}^{FF}(m,\,n)\sim p^{(1)}p_1^{(2)}q_{11}q_{10}A(m,\,n)$,
$P_{EF}^{EE}(m,\,n)\sim p^{(1)}q_1^{(2)}p_{01}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{EF}^{FE}(m,\,n)\sim p^{(1)}q_1^{(2)}q_{11}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{EF}^{EF}(m,\,n)\sim p^{(1)}q_1^{(2)}q_{11}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{EF}^{FF}(m,\,n)\sim p^{(1)}q_1^{(2)}q_{11}q_{10}A(m,\,n)$,
$P_{FE}^{EE}(m,\,n)\sim q^{(1)}p_0^{(2)}p_{01}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{FE}^{FE}(m,\,n)\sim q^{(1)}p_0^{(2)}q_{11}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{FE}^{EF}(m,\,n)\sim q^{(1)}p_0^{(2)}q_{11}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{FE}^{FF}(m,\,n)\sim q^{(1)}p_0^{(2)}q_{11}q_{10}A(m,\,n)$,
$P_{FF}^{EE}(m,\,n)\sim q^{(1)}q_0^{(2)}p_{01}p_{00}A(m,\,n)$
$P_{FF}^{FE}(m,\,n)\sim q^{(1)}q_0^{(2)}q_{11}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{FF}^{EF}(m,\,n)\sim q^{(1)}q_0^{(2)}q_{11}p_{00}A(m,\,n)$,
$P_{FF}^{FF}(m,\,n)\sim q^{(1)}q_0^{(2)}q_{11}q_{10}A(m,\,n)$.

Складывая, получим

$$P(m, n) = [p^{(1)}p_{01}p_{00} + p^{(1)}q_{11}p_{00} + p^{(1)}q_{11}p_{00} + p^{(1)}q_{11}q_{10} + q^{(1)}p_{01}p_{00} + q^{(1)}q_{11}p_{00} + q^{(1)}q_{11}p_{00} + q^{(1)}q_{11}q_{10}]\, A(m, n) = [p^{(1)}p_{00}(q_{11} + p_{01}) + p^{(1)}q_{11}(q_{10} + p_{00}) + q^{(1)}p_{00}(q_{11} + p_{01}) + q^{(1)}q_{11}(q_{10} + p_{00})]\, A(m, n) = [p_{00}(q_{11} + p_{01}) + q_{11}(q_{10} + p_{00})]\, A(m, n),$$

или

$$P(m, n) = (q_{11} + p_{01})(q_{10} + p_{00}) \left[\frac{q_{11}}{q_{11} + p_{01}} + \frac{p_{00}}{q_{10} + p_{00}} \right] \cdot A(m, n),$$

но по (2) и (3),

$$q_1 = \frac{q_{11}}{q_{11} + p_{01}} \quad \text{и} \quad p_0 = \frac{p_{00}}{q_{10} + p_{00}}.$$

Следовательно,

$$P(m, n) = (q_1 + p_0)(q_{11} + p_{01})(q_{10} + p_{00})\, A(m, n). \tag{6}$$

3. Вычислим теперь выражение

$$A(m, n) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{k} C_{m-k}^{i}\, p_{11}^{m-k-i} q_{11}^{i} \cdot C_k^i\, p_{01}^i\, q_{01}^{k-i} \cdot C_k^j\, p_{10}^{k-j} q_{10}^{j} \cdot C_{n-m-k}^{j}\, p_{00}^{j}\, q_{00}^{n-m-k-j}. \tag{5}$$

Предположим, что

$$m = np + x\sqrt{2npq},$$

где $x = o(n^a)$, $0 < a < \frac{1}{6}$, и вычислим выражение (5) для

$$k = mq_1 + \beta_1 \sqrt{2mp_1q_1}, \tag{7}$$

$$k = (n-m)\, p_0 + \beta_2 \sqrt{2(n-m)\, p_0 q_0}, \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} i &= (m-k)\, q_{11} + \alpha_1 \sqrt{2(m-k)\, p_{11} q_{11}}, \\ i &= kp_{01} + \alpha_2 \sqrt{2kp_{01} q_{01}}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

$$\left.\begin{aligned} j &= kq_{10} + \alpha_3 \sqrt{2kp_{10} q_{10}}, \\ j &= (n-m-k)\, p_{00} + \alpha_4 \sqrt{2(n-m-k)\, p_{00} q_{00}}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $\beta_r = o(m^{\frac{1}{6}})$ и $\alpha_s = o(k^{\frac{1}{6}})$.

Найдем, применяя формулу Стирлинга, первый из сомножителей выражения (5):

$$C_{m-k}^{i}\, p_{11}^{m-k-i} q_{11}^{i} = \frac{(m-k)!}{i!\,(m-k-i)!}\, p_{11}^{m-k-i} q_{11}^{i} = \sqrt{\frac{m-k}{2\pi\,(m-k-i)\, i}} \cdot \frac{(m-k)^{m-k}\, p_{11}^{m-k-i}\, q_{11}^{i}}{(m-k-i)^{m-k-i}\, i^{i}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right].$$

Имеем

$$\sqrt{\frac{m-k}{2\pi(m-k-i)\,i}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(m-k)p_{11}q_{11}}}\left(1+\alpha_1\sqrt{\frac{2p_{11}}{(m-k)q_{11}}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\alpha_1\sqrt{\frac{2q_{11}}{(m-k)p_{11}}}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi(m-k)p_{11}q_{11}}}\left[1+O\left(\frac{\alpha_1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right].$$

Далее,

$$R\equiv\frac{(m-k)^{m-k}p_{11}^{m-k-i}q_{11}^{i}}{(m-k-i)^{m-k-i}i^{i}}=\left(\frac{(m-k)q_{11}}{i}\right)^{i}\cdot\left(\frac{(m-k)p_{11}}{m-k-i}\right)^{m-k-i}=$$

$$=\left(\frac{(m-k)q_{11}}{(m-k)q_{11}+\alpha_1\sqrt{2(m-k)p_{11}q_{11}}}\right)^{(m-k)q_{11}+\alpha_1\sqrt{2(m-k)p_{11}q_{11}}}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{(m-k)p_{11}}{(m-k)p_{11}-\alpha_1\sqrt{2(m-k)p_{11}q_{11}}}\right)^{(m-k)p_{11}-\alpha_1\sqrt{2(m-k)p_{11}q_{11}}}=$$

$$=\left(1+\alpha_1\sqrt{\frac{2q_{11}}{(m-k)q_{11}}}\right)^{-[(m-k)q_{11}+\alpha_1\sqrt{2(m-k)p_{11}q_{11}}]}\cdot$$

$$\cdot\left(1-\alpha_1\sqrt{\frac{2q_{11}}{(m-k)p_{11}}}\right)^{-[(m-k)p_{11}-\alpha_1\sqrt{2(m-k)p_{11}q_{11}}]}.$$

$$\ln R=-[(m-k)q_{11}+\alpha_1\sqrt{2(m-k)p_{11}q_{11}}]\cdot$$

$$\cdot\left[\alpha_1\sqrt{\frac{2p_{11}}{2(m-k)q_{11}}}-\alpha_1^2\frac{p_{11}}{(m-k)q_{11}}+\right.$$

$$\left.+O\left(\frac{\alpha_1^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]-[(m-k)p_{11}-\alpha_1\sqrt{2(m-k)p_{11}q_{11}}]\cdot$$

$$\cdot\left[\alpha_1\sqrt{\frac{2q_{11}}{2(m-k)p_{11}}}-\alpha_1^2\frac{q_{11}}{(m-k)q_{11}}+O\left(\frac{\alpha_1^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right]=-\alpha_1^2+O\left(\frac{\alpha_1^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

$$R=e^{-\alpha_1^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha_1^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right].$$

Следовательно,

$$C_{m-k}^{i}p_{11}^{m-k-i}q_{11}^{i}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(m-k)p_{11}q_{11}}}\cdot e^{-\alpha_1^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha_1^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right].$$

Аналогично,

$$C_k^i p_{01}^i q_{01}^{k-i}=\frac{1}{\sqrt{2\pi k p_{01}q_{01}}}\cdot e^{-\alpha_2^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha_2^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right],$$

$$C_k^j p_{10}^{k-j} q_{10}^{j}=\frac{1}{\sqrt{2\pi k p_{10}q_{10}}}\cdot e^{-\alpha_3^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha_3^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right],$$

$$C_{n-m-k}^{j} p_{00}^{j} q_{00}^{n-m-k-j}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m-k)p_{00}q_{00}}}\cdot e^{-\alpha_4^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha_4^3}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right],$$

Итак, выражение (5) можно записать в виде

$$A(m, n) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-m-k)\,p_{00}q_{00}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi k p_{10} q_{10}}} \cdot e^{-\alpha_3^2-\alpha_4^2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(m-k)\,p_{11}q_{11}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi k p_{01} q_{01}}} \cdot e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right].$$

4. По формулам (2) и (9), для $k = mq_1 + \beta_1\sqrt{2mp_1q_1}$ имеем

$$(m-k)\,q_{11} + \alpha_1\sqrt{2(m-k)\,p_{11}q_{11}} = kp_{01} + \alpha_2\sqrt{2kp_{01}q_{01}},$$

$$-\beta_1 q_{11}\sqrt{2mp_1q_1} + \alpha_1\sqrt{2(m-k)\,p_{11}q_{11}} = \beta_1 p_{01}\sqrt{2mp_1q_1} + \alpha_2\sqrt{2kp_{01}q_{01}},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2(m-k)\,p_{11}q_{11}}}\left[\beta_1\sqrt{2mp_1q_1}\,(q_{11}+p_{01}) + \alpha_2\sqrt{2kp_{01}q_{01}}\,\right]. \qquad (11)$$

По формулам (3) и (10), для $k = (n-m)\,p_0 + \beta_2\sqrt{2(n-m)\,p_0q_0}$ аналогичным образом выводим

$$\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{2kp_{10}q_{10}}}\left[\beta_2\sqrt{2(n-m)\,p_0q_0}\,(q_{10}+p_{00}) + \alpha_4\sqrt{2(n-m-k)\,p_{00}q_{00}}\right]. \quad (12)$$

5. Продолжим вычисление $A(m, n)$. Как показал Pepper [1], в выражениях вида

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi(m-k)\,p_{11}q_{11}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi kp_{01}q_{01}}} \cdot e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}$$

часть

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{i=kp_{01}-\alpha_2'\sqrt{2kp_{01}q_{01}}}^{kp_{01}+\alpha_2'\sqrt{2kp_{01}q_{01}}},$$

где $\alpha_2' = n^b$, $\frac{1}{12} < b < \frac{1}{6}$, является главным членом всей суммы. Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{k} = \left[1+O\left(\frac{\alpha_2'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\sum\nolimits_1 \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(m-k)\,p_{11}q_{11}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2kp_{01}q_{01}}} \cdot e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2},$$

где α_1 определяется формулой (11).

Так как в $i = kp_{01} + \alpha_2\sqrt{2kp_{01}q_{01}}$ последовательные значения α_2 отличаются на $\Delta\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{2kp_{01}q_{01}}}$ и так как мы суммируем от $-\alpha_2'$ до $+\alpha_2'$, то

$$\sum_{i=0}^{k} = \left[1+O\left(\frac{\alpha_2'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\frac{1}{\pi}\sum_{-\alpha_2'}^{+\alpha_2'} \frac{1}{\sqrt{2(m-k)\,p_{11}q_{11}}} \cdot e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\,\Delta\alpha_2.$$

Теперь

$$\sum_{-\alpha_2'}^{+\alpha_2'} e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\Delta\alpha_2 = \left[1+O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\int\limits_{-\alpha_2'}^{+\alpha_2'} e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\,d\alpha_2 =$$

$$= \left[1+O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\,d\alpha_2.$$

Мы получаем

$$\sum_{i=0}^{k} = \left[1+O\left(\frac{\alpha_2'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{2(m-k)\,p_{11}q_{11}}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\,d\alpha_2.$$

Вычислим этот интеграл. Применяя (11), подсчитаем выражение $\alpha_1^2+\alpha_2^2$:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2 = \frac{kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}}{(m-k)\,p_{11}q_{11}}\left[\alpha_2 + \frac{\beta_1(q_{11}+p_{01})\sqrt{mp_1q_1kp_{01}q_{01}}}{kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}}\right]^2 +$$
$$+ \frac{\beta_1^2(q_{11}+p_{01})^2\,mp_1q_1}{kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha_1^2+\alpha_2^2)}\,d\alpha_2 = \sqrt{\pi}\sqrt{\frac{(m-k)\,p_{11}q_{11}}{kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}}}\cdot e^{-\frac{\beta_1^2(q_{11}+p_{01})^2mp_1q_1}{kp_{01}q_{01}+(m-k)p_{11}q_{11}}}$$

и

$$\sum_{i=0}^{k} = \left[1+O\left(\frac{\alpha_2'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right]\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,[kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}]}}\cdot e^{-\frac{\beta_1^2(q_{11}+p_{01})^2mp_1q_1}{kp_{01}q_{01}+(m-k)p_{11}q_{11}}}$$

Мы получили для $\sum_{i=0}^{k}$ выражение, вычисленное для

$$k = mq_1+\beta_1\sqrt{2mp_1q_1}.$$

Положим теперь

$$k = mq_1+\beta_1\sqrt{\frac{2\,[kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}]}{(q_{11}+p_{01})^2}}.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{k} = \frac{1}{\sqrt{2\,[kp_{01}q_{01}+(m-n)\,p_{11}q_{11}]}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-\beta_1^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha_2'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right],$$

Проводя аналогичные вычисления для

$$\sum_{j=0}^{k} = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{\sqrt{2\pi kp_{10}q_{10}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\,(n-m-k)\,p_{00}q_{00}}}\cdot e^{-\alpha_3^2-\alpha_4^2}$$

и положив

$$k = (n-m)\,p_0+\beta_2\sqrt{\frac{2\,[(n-m-k)\,p_{00}q_{00}+kp_{10}q_{10}]}{(q_{10}+p_{00})^2}},$$

получим

$$\sum_{j=0}^{k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,[(n-m-k)\,p_{00}q_{00}+kp_{10}q_{10}]}}\cdot e^{-\beta_2^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha_4'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right].$$

Тогда

$$A(m, n)=\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,[kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}\,q_{11}]}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,[(n-m-k)\,p_{00}q_{00}+kp_{10}q_{10}]}}\cdot e^{-\beta_1^2-\beta_2^2}\left[1+O\left(\frac{\alpha^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right],$$

т. е. выражение такого же вида, как $\sum\limits_{i=0}^{k}$ и $\sum\limits_{j=0}^{k}$.

Проводя вторично те же вычисления и положив

$$m=np+x\sqrt{2npq},$$

получим

$$A(m,n)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{q_{11}+p_{01}}\cdot\frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1+\sigma_2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,[(n-m-k)\,p_{00}q_{00}+kp_{10}q_{10}]}}\cdot$$

$$\cdot\, e^{-\frac{x^2(q_1+p_0)^2npq}{\sigma_1+\sigma_2}}\cdot\left[1+O\left(\frac{\beta'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right],$$

где

$$\sigma_1=\frac{2\,[kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}]}{(q_{11}+p_{01})^2},$$

$$\sigma_2=\frac{2\,[(n-m-k)\,p_{00}q_{00}+kp_{10}q_{10}]}{(q_{10}+p_{00})^2}.$$

Положив, наконец,

$$m=np+x\sqrt{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{q_1+p_0}}, \tag{13}$$

получим

$$A(m, n)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{q_{11}+p_{01}}\frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1+\sigma_2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,[(n-m-k)\,p_{00}q_{00}+kp_{10}q_{10}]}}\cdot e^{-x^2}\left[1+O\left(\frac{\beta'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right].$$

В выражении (13) последовательные значения x отличаются на $\Delta x=\dfrac{q_1+p_0}{\sqrt{\sigma_1+\sigma}}$. Следовательно,

$$A(m, n)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\sigma_2}}{(q_1+p_0)\,(q_{11}+p_{01})}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\,[(n-m-k)\,p_{00}q_{00}+kp_{10}q_{10}]}}\cdot$$

$$\cdot\, e^{-x^2}\Delta x\left[1+O\left(\frac{\beta'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right], \tag{14}$$

но

$$\frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{2\,[(n-m-k)\,p_{00}q_{00}+kp_{10}q_{10}]}}=\frac{1}{q_{10}+p_{00}}.$$

Подставляя в (14), получим

$$A(m, n)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{(q_1+p_0)\,(q_{11}+p_{01})\,(q_{10}+p_{00})}\cdot e^{-x^2}\Delta x\left[1+O\left(\frac{\beta'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$$

для m, заданного выражением (13), в котором мы преобразуем дробь $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{(q_1+p_0)^2}$ по формулам (1), (2) и (3).

Имеем:

$$\sigma_1=\frac{2\,[kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}]}{(q_{11}+p_{01})^2}\,.$$

По (2),

$$q_{11}=q_1(q_{11}+p_{01}),$$

$$qp_{01}q_{01}+p_1p_{11}q_{11}=p_1q_{11}\,(q_{01}+p_{11})=p_1q_1(q_{11}+p_{01})(q_{01}+p_{11}).$$

Так как

$$kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}=m\,(q_1p_{01}q_{01}+p_1p_{11}q_{11})+O\,(\beta_1\sqrt{m}),$$

то

$$kp_{01}q_{01}+(m-k)\,p_{11}q_{11}=mp_1q_1\,(q_{11}+p_{01})(q_{01}+p_{11})+O\,(\beta_1\sqrt{m})$$

и

$$\sigma_1=\frac{2mp_1q_1\,(q_{01}+p_{11})}{q_{11}+p_{01}}\,.$$

Аналогично,

$$\sigma_2=\frac{2\,(n-m)\,p_0q_0\,(q_{00}+p_{10})}{q_{10}+p_{00}}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{(q_1+p_0)^2}=2\,\frac{mp_1q_1\,(q_{01}+p_{11})\,(q_{10}+p_{00})+(n-m)\,p_0q_0\,(q_{11}+p_{01})\,(q_{00}+p_{10})}{(q_1+p_0)^2\,(q_{11}+p_{01})\,(q_{10}+p_{00})}\,.$$

Положим для краткости

$$a=(q_{01}+p_{11})(q_{10}+p_{00})\quad\text{и}\quad b=(q_{11}+p_{01})(q_{00}+p_{10}).$$

Тогда

$$mp_1q_1a+(n-m)\,p_0q_0b=npp_1q_1a+nqp_0q_0b+$$
$$+O\,(x\sqrt{n})=nqp_0\,(p_1a+q_0b)+O\,(x\sqrt{n}),$$

но по (1), $p_0=p(q_1+p_0)$, следовательно,

$$nqp_0\,(p_1a+q_0b)+O\,(x\sqrt{n})=npq\,(q_1+p_0)\,(p_1a+q_0b)+O\,(x\sqrt{n}).$$

Подставляя полученный результат в (13), получим

$$m=np+x\sqrt{2npq\,\frac{p_1\,(q_{01}+p_{11})\,(q_{10}+p_{00})+q_0\,(q_{11}+p_{01})\,(q_{00}+p_{10})}{(q_1+p_0)\,(q_{11}+p_{01})\,(q_{10}+p_{00})}}\,. \qquad (15)$$

6. Вспоминая теперь (6), получим: *вероятность точно m появлений события E в n испытаниях, если m дается формулой* (15), *равна*

$$P\,(m,\,n)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot e^{-x^2}\,\Delta x\,\left[1+O\left(\frac{\beta'^3}{n^{\frac{1}{2}}}\right)\right].$$

7. Как заметил Марков([3]), выражение для m принимает замечательно простой вид, если положить

$$p_{11}-p_{01}=p_{10}-p_{00}.$$

Тогда

$$m=np+x\sqrt{2npq\,\frac{(q_0+p_1)\,(q_{01}+p_{11})}{(q_1+p_0)\,(q_{11}+p_{01})}}\,.$$

Если, кроме того, положить

$$p_0 - p_1 = p_{11} - p_{01} = p_{10} - p_{00},$$

то

$$m = np + x\sqrt{2npq},$$

т. е. m имеет нормальную дисперсию.

Поступило
8.IV.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pepper E. D., Asymptotic expression for the probability of trials connected in a chain, Ann. of Math., v. 28 (1927), 318—326.
[2] Марков А. А., Замечательный случай испытаний, связанных в цепь, Исчисление вероятностей, 1924.
[3] Марков А. А., Об одном случае испытаний, связанных в сложную цепь, Изв. АН, № 3, 1911.

Отделение физико-математических наук Академии Наук СССР объявляет конкурс на соискание премии имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики, выполненную в период 1946—1948 гг.

Размер премии—20 000 рублей.

Премии имени П. Л. Чебышева могут быть удостоены ученые труды советских граждан, авторских коллективов и советских научных учреждений за оригинальную работу в области математики.

Работы на соискание премии имени П. Л. Чебышева могут представляться научными обществами, научно-исследовательскими институтами, высшими учебными заведениями, ведомствами, общественными организациями и отдельными гражданами.

Работы представляются в Отделение физико-математических наук Академии Наук СССР (Москва, 17, Пыжевский пер., 3) с надписью «На соискание премии имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики» не позднее 1 сентября 1948 г.

Работы представляются на русском языке в 3 экземплярах, отпечатанные на пишущей машинке или типографским способом, с приложением кратких автобиографических сведений о кандидате на премию, с перечнем основных научных работ и изобретений.

Присуждение премии состоится в конце 1948 г.

Приложение к п. 13 протокола распорядительного заседания Президиума АН СССР 5 июня 1945 г.

ПОЛОЖЕНИЕ

О ПРЕМИИ ИМЕНИ П. Л. ЧЕБЫШЕВА ЗА ЛУЧШУЮ РАБОТУ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ

1. Премия имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики присуждается Президиумом Академии Наук СССР один раз в три года, начиная с 1945 года. Размер премии 20 000 руб.

2. Для рассмотрения и оценки работ, представляемых на соискание премии имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики, при Отделении физико-математических наук организуется Комиссия в составе 5 человек. Состав Комиссии избирается Отделением физико-математических наук и утверждается Президиумом Академии Наук СССР.

3. Премия имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики присуждается за оригинальную работу, законченную в период между конкурсами.

4. Работы на соискание премии имени П. Л. Чебышева представляются в Отделение физико-математических наук с надписью «На соискание премии имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики» не позднее 1 сентября года присуждения премии. Комиссия обязана рассмотреть работы и представить на утверждение Президиума Академии Наук СССР кандидата на премию не позже 1 ноября года присуждения премии.

Президиум Академии Наук присуждает премию имени П. Л. Чебышева к 1 декабря.

5. Премии имени П. Л. Чебышева могут быть удостоены лишь ученые труды советских граждан, их авторских коллективов и советских научных учреждений.

Работы могут представляться научными обществами, научно-исследовательскими институтами, высшими учебными заведениями, ведомствами, общественными организациями и отдельными гражданами СССР.

6. Работы представляются на русском языке в 3 экземплярах, отпечатанные на пишущей машинке или типографским способом. При этом обязательно представление кратких автобиографических сведений о кандидате с перечнем основных научных работ и изобретений.

7. Заседания Комиссии по премии имени П. Л. Чебышева созываются председателем Комиссии и считаются действительными при наличии не менее двух третей состава членов Комиссии.

8. Решения в Комиссии по вопросам выдвижения кандидатов на премию принимаются простым большинством голосов закрытой баллотировкой.

Протоколы Комиссии подписываются председателем и всеми присутствующими членами Комиссии.

Решения Комиссии по премии имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики вместе с заключением Бюро Отделения физико-математических наук утверждаются Президиумом Академии Наук СССР, после чего делается публикация о присуждении премии.

9. Архив и дела Комиссии по премии имени П. Л. Чебышева хранятся в Отделении физико-математических наук.

10. Средства, необходимые для выплаты премий, а также и на проведение экспертиз, на объявление в газетах и журналах и другие расходы включаются в смету Отделения физико-математических наук.

11. О предстоящем конкурсе и о присуждении премии имени П. Л. Чебышева за лучшую работу в области математики публикуется в «Вестнике Академии Наук СССР», в центральных газетах и в «Известиях Академии Наук СССР» серии физической и серии математической.

12. Если премированная работа не была издана до присуждения за нее премии, Академия Наук опубликовывает ее в своих печатных органах, в случае же затруднительности издания работы по техническим причинам Академия Наук принимает меры к опубликованию премированной работы через соответствующие издательства.

На заглавном листе работы, удостоенной премии, делается надпись о ее присуждении.

13. Рецензии по работам, удостоенным присуждения премии имени П. Л. Чебышева, опубликовываются в Известиях Отделения физико-математических наук.

14. Если Комиссия по рассмотрению работ, представленных на премию, признает, что ни одна из представленных работ не заслуживает полной премии, то она входит с представлением в Президиум Академии Наук СССР о присуждении премии в половинном размере. Равным образом, Комиссия вправе внести предложение разделить премию между двумя соискателями.

Во избежание чрезмерного дробления премии разделение ее между тремя и более соискателями не допускается.

Примечание: Порядок и условия распределения премии, присужденной авторским коллективам и научным учреждениям, определяются этими коллективами и учреждениями.

15. При отсутствии работ, достойных премирований, конкурс считается не состоявшимся.

Вице-президент Академии Наук СССР, академик

Л. А. Орбели

Академик-секретарь Академии Наук СССР, академик

Н. Г. Бруевич.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 113–122

А. Я. ХИНЧИН

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ КОНЦЕПЦИЯ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ТЕОРИИ КРОНЕКЕРА

Основным результатом аппроксимационной теории Кронекера является установление необходимого и достаточного критерия для того, чтобы система неравенств

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij}x_i - y_j - \alpha_j\right| < \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

где θ_{ij} и α_j — данные вещественные числа, имела при любом $t > 0$ решения в целых x_i, y_j. В настоящей статье ставится вопрос о необходимом и достаточном условии для существования у системы неравенств

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij}x_i - y_j - \alpha_j\right| < \frac{c_1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

такого целочисленного решения x_i, y_j, что

$$|x_i| < c_2\varphi(t) \quad (1 \leqslant i \leqslant m),$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, а $\varphi(t)$ — любая положительная непрерывная неубывающая функция от t. Задача получает полное решение в терминах теории Кронекера.

§ 1. Введение

Пусть θ_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ и α_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — данные вещественные числа. Положим

$$S_j = \sum_{i=1}^{m} \theta_{ij}x_i - y_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

где x_i, y_j — целочисленные переменные. Основная задача аппроксимационной теории Кронекера состоит в установлении признака, позволяющего судить, допускает ли система линейных уравнений $S_j = \alpha_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ сколь угодно точное приближенное решение в целых x_i, y_j, т. е. могут ли при любом $t > 0$ целочисленные значения этих переменных быть выбраны так, чтобы

$$|S_j - \alpha_j| < \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{1}$$

Чтобы формулировать признак Кронекера в наиболее удобном для наших целей виде, мы введем $n+m$ новых целочисленных переменных $a_1, a_2, \ldots, a_{n+m}$, и положим

$$T_i = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} a_j + a_{n+i} \quad (1 \leqslant i \leqslant m),$$

$$a = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|,$$

$$T_a = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |T_i|,$$

так что T_i, a и T_a являются функциями переменных $a_1, \ldots, a_{n+m}$.

Пусть, далее, $-b$ — ближайшее к $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j$ целое число; положим

$$A_a = \left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_j + b \right|,$$

так что

$$0 \leqslant A_a \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда основной результат теории Кронекера может быть формулирован так: *для того чтобы система неравенств* (1) *при любом* $t > 0$ *имела решения в целых* x_i, y_j, *необходимо и достаточно, чтобы для любой системы целых чисел* $a_1, \ldots, a_{n+m}$, *для которой* $T_a = 0$, *мы имели также* $A_a = 0$. Иначе говоря, если целые числа $a_1, \ldots, a_n$ таковы, что все линейные комбинации

$$a_1\theta_{i_1} + a_2\theta_{i_2} + \ldots + a_n\theta_{in} \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

представляют собою целые числа, то и линейная комбинация

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \ldots + a_n\alpha_n$$

должна быть целым числом.

Теория Кронекера обладает замечательной внутренней завершенностью, давая наиболее общее решение всех задач, возникающих в ее плане. И тем не менее можно сказать, что она является лишь к а ч е с т в е н н о й теорией. Она ставит (и полностью решает) лишь вопрос о принципиальной возможности целочисленного решения системы неравенств (1) с любой наперед заданной степенью точности, не затрагивая к о л и ч е с т в е н н о й задачи определения величины удовлетворяющих этим неравенствам целых чисел x_i, y_j.

Совершенно естественно предположить, что, усиливая те требования зависимости величины A_a от величины T_a, которые составляют собою критерий Кронекера, можно будет гарантировать не только выполнение неравенств (1), но и определенную (зависящую от t) верхнюю границу абсолютных значений чисел x_i, y_j, удовлетворяющих этим неравенствам. Наиболее общей и наиболее естественной представляется здесь, повидимому, следующая постановка задачи:

Пусть $\varphi(t)$ — произвольная положительная, непрерывная, неубывающая функция положительного аргумента t; требуется найти необходимый и достаточный признак того, что неравенства

$$|S_j-\alpha_j|<\frac{c_1}{t}\quad(1\leqslant j\leqslant n) \tag{2}$$

при любом $t>0$ имеют целочисленные решения x_i, y_j, для которых

$$|x_i|<c_2\varphi(t)\quad(1\leqslant i\leqslant m); \tag{3}$$

при этом c_1 и c_2 — надлежащим образом выбранные положительные постоянные.

Так как речь идет об определении порядка величины решений, то введение постоянных c_1 и c_2 является естественным и (при столь общих предположениях о функции $\varphi(t)$), повидимому, неизбежным. Разумеется, нет надобности особо оговаривать, что порядок величины чисел $|y_j|$ также должен быть ограничен функцией $\varphi(t)$: это тривиальным образом следует из неравенств (2) и (3).

Настоящая работа содержит полное решение поставленной таким образом задачи. Результат ее формулируется следующим образом:

ТЕОРЕМА. *Для существования таких положительных постоянных c_1, c_2, при которых неравенства* (2), (3) *имели бы для любого $t>0$ целочисленные решения x_i, y_j, необходимо и достаточно существование такой положительной постоянной Γ, что для любой системы целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n+m}$*

$$A_a\left\{\begin{array}{ll}=0 & \text{при } aT_a=0,\\ \leqslant\dfrac{\Gamma a}{\psi(a/T_a)} & \text{при } aT_a>0,\end{array}\right\} \tag{4}$$

где $\psi(t)$ есть функция, обратная по отношению к функции $t\varphi(t)$.

Очевидно, критерий (4) полностью соответствует стилю теории Кронекера: там при $T_a=0$ мы должны были иметь $A_a=0$; здесь, при количественной постановке задачи, мы видим, что при малом T_a должно быть малым и A_a, причем связь между порядками малости этих величин, разумеется, должна существенным образом зависеть от вида функции $\varphi(t)$.

Установленный нами критерий обладает значительной общностью не только в том отношении, что к функции $\varphi(t)$ предъявляются лишь требования весьма общего характера, но и по самой своей формулировке, которая совершенно не зависит от числа уравнений и числа неизвестных, и в этом смысле является универсальной.

Для конкретной иллюстрации нашего критерия заметим, что, например, при $\varphi(t)=t^\beta$ условие (4) получает вид

$$A_a\leqslant\Gamma a^{\frac{\beta}{1+\beta}}T_a^{\frac{1}{1+\beta}}.$$

§ 2. Доказательство необходимости признака

Пусть неравенства (2), (3) допускают при любом $t > 0$ решение в целых x_i, y_j, и пусть целые числа $a_1, \ldots, a_{n+m}$ заданы произвольно. Положим

$$\sum_{i=1}^{m} a_{n+i}x_i + \sum_{j=1}^{n} a_j y_j = g.$$

Тогда тождественно

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(S_j - \alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j\left(\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij}x_i - y_j - \alpha_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_j\theta_{ij} - \sum_{j=1}^{n} a_j y_j - \sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\theta_{ij} + a_{n+i}\right) - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_j + g\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i T_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_j + g\right).$$

Отсюда по определению A_a и T_a и в силу (2), (3)

$$A_a \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} a_j\alpha_j + g\right| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_j(S_j - \alpha_j)\left| + \right|\sum_{i=1}^{m} x_i T_i\left| \leqslant \frac{nac_1}{t} + mc_2\varphi(t)\,T_a.\right.$$

Но при $a = 0$ мы имеем $A_a = 0$ по определению; при $T_a = 0$ последнее неравенство дает $A_a = 0$, так как t может быть выбрано сколь угодно большим (впрочем, то, что из $T_a = 0$ вытекает $A_a = 0$, является следствием теоремы Кронекера).

Остается рассмотреть случай $aT_a > 0$. Выбираем (что всегда возможно единственным образом) t так, чтобы

$$t\varphi(t) = \frac{a}{T_a},$$

откуда

$$t = \psi\left(\frac{a}{T_a}\right);$$

тогда

$$T_a\varphi(t) = \frac{a}{t} = \frac{a}{\psi(a/T_a)},$$

и мы находим

$$A_a \leqslant \frac{(nc_1 + mc_2)\,a}{\psi(a/T_a)} = \frac{\Gamma a}{\psi(a/T_a)},$$

что и требовалось доказать.

§ 3. Применение теоремы Малера; основные оценки

Переходим теперь к доказательству достаточности нашего признака. Во всем дальнейшем мы полагаем для краткости $m + n = M$ и сохраняем обозначения, введенные в § 1.

Рассмотрим систему M линейных однородных форм

$$L_k = L_k(a_1, a_2, \ldots, a_M) \quad (k=1, 2, \ldots, M)$$

в M переменных $a_1, a_2, \ldots, a_M$, определяемую следующим образом:

$$L_i = \lambda^n T_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m), \qquad L_{m+j} = \lambda^{-m} a_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

где λ — положительный параметр. Легко убедиться, что определитель этой системы форм равен ± 1. Поэтому объем параллелепипеда в пространстве M измерений, определяемого неравенствами

$$|L_k(a_1, \ldots, a_M)| \leqslant 1 \quad (k=1, 2, \ldots, M),$$

равен 2^M. Так как этот параллелепипед есть выпуклое центрально-симметричное тело с центром в начале координат, то в силу известной теоремы геометрии чисел существует M^2 целых чисел a_k^l $(1 \leqslant k \leqslant M, 1 \leqslant l \leqslant M)$ с определителем $\| a_k^l \| = 1$ и таких, что, полагая

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant M} |L_k(a_1^l, a_2^l, \ldots, a_M^l)| = K^l \quad (1 \leqslant l \leqslant M),$$

мы будем иметь неравенство

$$K^1 K^2 \cdots K^M \leqslant M! \; * \tag{5}$$

С этими числами a_k^l мы будем иметь дело во всем дальнейшем. Положим

$$a^l = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j^l| \quad (1 \leqslant l \leqslant M),$$

и обозначим через $-b^l$ ближайшее к $\sum_{j=1}^{n} a_j^l \alpha_j$ целое число. Положим

$$T_{a^l} = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |T_i(a_1^l, \ldots, a_M^l)| \quad (1 \leqslant l \leqslant M),$$

$$A_{a^l} = \left| \sum_{j=1}^{n} a_j^l \alpha_j + b^l \right| \qquad (1 \leqslant l \leqslant M).$$

По определению системы форм $L_k(a_1, \ldots, a_M)$, мы, очевидно, имеем

$$\left. \begin{aligned} a^l &= \lambda^m \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |L_{m+j}(a_k^l)| \leqslant \lambda^m K^l \quad (1 \leqslant l \leqslant M), \\ T_{a^l} &= \lambda^{-n} \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |L_i(a_k^l)| \leqslant \lambda^{-n} K^l \quad (1 \leqslant l \leqslant M). \end{aligned} \right\} \tag{6}$$

§ 4. Оценка определителя D

Так как определитель системы форм L_k равен ± 1, то по абсолютному значению

$$\| L_k(a^l) \| = \| a_k^l \| = 1.$$

Но, с другой стороны,

$$\| L_k(a^l) \| = \sum_{G} \pm L_1(a^{l_1}) L_2(a^{l_2}) \cdots L_m(a^{l_m}) D_{l_1, l_2, \ldots, l_m},$$

* Теорема, о которой идет речь, в общем виде доказана Малером ([1]) в 1938 г. Впрочем, ценою весьма небольшого усложнения мы могли бы обойтись и с помощью частного случая этой теоремы, гораздо раньше доказанного Коркиным и Золотаревым ([2]).

где $G=(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ — любая группа (без повторений) из m чисел ряда 1, 2, ..., M, а $D_{l_1,l_2,\ldots,l_m}$ — тот определитель порядка n матрицы

$$\begin{vmatrix} L_{m+1}(a^1) & L_{m+2}(a^1) & \ldots & L_M(a^1) \\ L_{m+1}(a^2) & L_{m+2}(a^2) & \ldots & L_M(a^2) \\ \ldots & & & \\ \ldots & & & \\ L_{m+1}(a^M) & L_{m+2}(a^M) & \ldots & L_M(a^M) \end{vmatrix},$$

который получается после удаления строк с номерами $l_1, l_2, \ldots, l_m$; при этом суммирование производится по всем возможным группам G чисел $l_1, l_2, \ldots, l_m$, так что число слагаемых равно $M!/n!$. Так как сумма равна единице, то найдется слагаемое, по абсолютной величине превосходящее $n!/M!$. А так как нумерация по l безразлична, то мы вправе допустить, что это слагаемое соответствует группе $l_i = n+i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, так что

$$D_{n+1,n+2,\ldots,n+m} = \| L_{m+j}(a^l) \| \quad (1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant n)$$

и

$$\| L_{m+j}(a^l) \| \cdot \prod_{i=1}^{m} | L_i(a^{n+i}) | \geqslant \frac{n!}{M!},$$

откуда, в силу (5),

$$\| L_{m+j}(a^l) \| \geqslant \frac{n!}{M! \prod\limits_{i=1}^{m} | L_i(a^{n+i}) |} \geqslant \frac{n!}{M! \prod\limits_{i=1}^{m} K^{n+i}} \geqslant \frac{n! \prod\limits_{j=1}^{n} K^j}{(M!)^2}.$$

Но

$$L_{m+j}(a^l) = \lambda^{-m} a_j^l \quad (1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant l \leqslant n),$$

так что

$$\| L_{m+j}(a^l) \| = \lambda^{-mn} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & & & \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix},$$

и мы находим

$$|D| = \left| \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & & & \\ a_1^n & a_2^n & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} \right| \geqslant \frac{n! \lambda^{mn}}{(M!)^2} \prod_{l=1}^{n} K^l. \tag{7}$$

§ 5. Оценка величин A_{a^l}

Теперь мы допустим, что данные числа θ_{ij}, α_j подчинены условию (4). Я утверждаю, что в таком случае

$$A_{a^l} = \left| \sum_{j=1}^{n} a_j^l \alpha_j + b^l \right| < \frac{\Gamma K^l \lambda^m}{\psi(\lambda^M)} \quad (1 \leqslant l \leqslant M). \tag{8}$$

В самом деле, если $a^l T_{a^l} = 0$, то, согласно (4), $A_{a^l} = 0$, и неравенство (8) выполнено тривиальным образом. Допустим поэтому, что $a^l T_{a^l} > 0$; тогда, согласно (4),

$$A_{a^l} \leqslant \frac{\Gamma a^l}{\psi(a^l/T_{a^l})}.$$

Если $a^l/T_{a^l} \geqslant \lambda^M$, то $\psi(a^l/T_{a^l}) \geqslant \psi(\lambda^M)$, а потому, в силу (6),

$$A_{a^l} \leqslant \frac{\Gamma K^l \lambda^m}{\psi(\lambda^M)},$$

что и требовалось доказать.

Допустим теперь, что $a^l/T_{a^l} < \lambda^M$. Очевидно, мы имеем тождественно

$$\psi(u)\,\varphi[\psi(u)] = u;$$

поэтому

$$\frac{a^l T_{a^l}}{\psi(a^l/T_{a^l})} = \varphi[\psi(a^l/T_{a^l})] < \varphi[\psi(\lambda^M)] = \frac{\lambda^M}{\psi(\lambda^M)}$$

и, следовательно,

$$A_{a^l} \leqslant \frac{\Gamma a^l}{\psi(a^l/T_{a^l})} = \Gamma T_{a^l} \frac{a^l/T_{a^l}}{\psi(a^l/T_{a^l})} < \Gamma T_{a^l} \frac{\lambda^M}{\psi(\lambda^M)};$$

значит, в силу (6),

$$A_{a^l} \leqslant \Gamma \lambda^{-n} K^l \frac{\lambda^M}{\psi(\lambda^M)} = \frac{\Gamma K^l \lambda^m}{\psi(\lambda^M)},$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Определение и оценка чисел $|x_i|$

Теперь мы определим числа x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и y_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ с помощью системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^l y_j + \sum_{i=1}^{m} a_{n+i}^{\,l} x_i = b^l \quad (1 \leqslant l \leqslant M).$$

Так как определитель системы равен 1, то числа x_i и y_j — целые. В частности, x_i выражается определителем порядка M, l-я строка которого имеет вид

$$a_1^l, \ldots, a_n^l, a_{n+1}^{\,l}, \ldots, a_{n+i-1}^{\,l}, b^l, a_{n+i+1}^{\,l}, \ldots, a_M^l;$$

очевидно, определитель этот равен определителю, l-я строка которого есть

$$a_1^l, \ldots, a_n^l, T_1^l, \ldots, T_{i-1}^l, b^l + \sum_{j=1}^{n} a_j^l \alpha_j, T_{i+1}^l, \ldots, T_m^l,$$

где для краткости положено

$$T_k^l = T_k(a^l) = a_{n+k}^{\,l} + \sum_{j=1}^{n} \theta_{kj} a_j^l \quad (1 \leqslant k \leqslant m).$$

Таким образом, определитель, выражающий x_i, является суммой $M!$ слагаемых вида

$$\pm a_1^{l_1} \cdots a_n^{l_n} T_1^{l_{n+1}} \cdots T_{i-1}^{l_{n+i-1}} \left(b^{l_{n+i}} + \sum_{j=1}^{n} a_j^{l_{n+i}} \alpha_j\right) T_{i+1}^{l_{n+i+1}} \cdots T_m^{l_{n+m}},$$

где $l_1, l_2, \ldots, l_M$ — любая перестановка индексов 1, 2, ..., M. Все эти слагаемые имеют одинаковую для нашей цели структуру, так как порядок нумерации по l безразличен. Поэтому нам достаточно оценить одно из этих слагаемых, например то, где $l_k = k$ $(1 \leqslant k \leqslant M)$, т. е.

$$Q = \prod_{s=1}^{n} a_s^s \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{m} T_p^{n+p} \left(b^{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_j^{n+i} \alpha_j\right).$$

Так как

$$|a_s^s| \leqslant a^s, \quad |T_p^{n+p}| \leqslant T_{a^{n+p}}, \quad \left|b^{n+i} + \sum_{j=1}^{n} a_j^{n+i} \alpha_j\right| = A_{a^{n+i}},$$

то мы находим

$$|Q| \leqslant \left(\prod_{s=1}^{n} a^s\right)\left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{m} T_{a^{n+p}}\right) A_{a^{n+i}},$$

откуда, в силу (6), (8) и (5),

$$|Q| \leqslant \lambda^{mn}\left(\prod_{s=1}^{n} K^s\right) \lambda^{-(m-1)n}\left(\prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{m} K^{n+p}\right) \frac{\Gamma K^{n+i} \lambda^m}{\psi(\lambda^M)} =$$

$$= \Gamma\left(\prod_{q=1}^{M} K^q\right) \frac{\lambda^M}{\psi(\lambda^M)} \leqslant \Gamma M! \frac{\lambda^M}{\psi(\lambda^M)} = \Gamma M! \varphi[\psi(\lambda^M)].$$

Мы оценили одно из $M!$ слагаемых, составляющих x_i; отсюда

$$|x_i| \leqslant \Gamma (M!)^2 \varphi[\psi(\lambda^M)] \quad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{9}$$

§ 7. Доказательство достаточности признака

Теперь мы должны оценить величины $S_j - \alpha_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, где переменные x_i, y_j имеют установленные нами в предыдущем параграфе значения. Мы будем при этом исходить из системы тождеств, аналогичных тому, с помощью которого мы в § 2 доказали необходимость нашего признака:

$$\eta^l = \sum_{j=1}^{n} a_j^l (S_j - \alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j^l \left(\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j - \alpha_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} a_j^l - \sum_{j=1}^{n} a_j^l y_j - \sum_{j=1}^{n} a_j^l \alpha_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i T_i^l - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^l \alpha_j + \sum_{j=1}^{n} a_j^l y_j + \sum_{i=1}^{m} a_{n+i}^l x_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i T_i^l - \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^l \alpha_j + b^l\right) \quad (1 \leqslant l \leqslant n).$$

Отсюда, в силу (9), (6) и (8),

$$|\eta^l| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |x_i| T_{a_l} + A_{al} \leqslant m\Gamma (M!)^2 \varphi [\psi(\lambda^M)] \lambda^{-n} K^l + \frac{\Gamma K^l \lambda^m}{\psi(\lambda^M)},$$

или, пользуясь тождеством $\psi(u)\varphi[\psi(u)] = u$,

$$|\eta^l| \leqslant m\Gamma (M!)^2 K^l \frac{\lambda^m}{\psi(\lambda^M)} + \Gamma K^l \frac{\lambda^m}{\psi(\lambda^M)} = \Gamma_1 \frac{K^l \lambda^m}{\psi(\lambda^M)} \quad (1 \leqslant l \leqslant n), \qquad (10)$$

где Γ_1 — постоянная. Но из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^l (S_j - \alpha_j) = \eta^l \quad (1 \leqslant l \leqslant n)$$

величина $S_j - \alpha_j$ выражается отношением D_j/D, где D — определитель, который мы оценили в § 4, а определитель D_j имеет l-ю строку вида

$$a_1^l a_2^l \cdots a_{j-1}^l \eta^l a_{j+1}^l \cdots a_n^l.$$

Разлагая его по элементам j-го столбца и замечая, что минор, соответствующий элементу η^l, по абсолютной величине, очевидно, не превосходит $(n-1)!\, a^1 \cdots a^{l-1} a^{l+1} \cdots a^n$, мы находим

$$|S_j - \alpha_j| \leqslant \frac{1}{|D|} \sum_{l=1}^{n} |\eta^l| (n-1)!\, a^1 \cdots a^{l-1} a^{l+1} \cdots a^n \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

откуда, в силу (10) и (6),

$$|S_j - \alpha_j| \leqslant \frac{\Gamma_1 n!}{|D|} \frac{\lambda^{mn}}{\psi(\lambda^M)} \sum_{l=1}^{n} K^l \quad (1 \leqslant j \leqslant n);$$

наконец, неравенство (7) дает

$$|S_j - \alpha_j| \leqslant \frac{\Gamma_1 (M!)^2}{\psi(\lambda^M)} = \frac{c_1}{\psi(\lambda^M)} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \qquad (11)$$

Неравенства (9) и (11) доказывают достаточность нашего признака. В самом деле, для любого $t > 0$ мы прежде всего определяем (что всегда возможно единственным образом) значение параметра λ так, чтобы было

$$\psi(\lambda^M) = t.$$

Определяя затем целые числа x_i, y_j так, как мы это делали выше, мы, в силу (11) и (9), будем иметь

$$|S_j - \alpha_j| < \frac{c_1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad |x_i| < c_2 \varphi(t) \quad (1 \leqslant i \leqslant m),$$

что и требовалось доказать.

§ 8. Об одном предельном случае

Предыдущее доказательство не исключает того случая, когда $\varphi(t)$ есть постоянное положительное число, которое, ввиду произвольности константы c_2, мы можем считать равным единице. В этом случае величины $|S_j - \alpha_j|$ выбором достаточно большого t могут быть сделаны

сколь угодно малыми, причем значения целочисленных переменных x_i, y_j остаются ограниченными. Это означает, разумеется, что уравнения

$$S_j - \alpha_j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \tag{12}$$

допускают точное решение в целых x_i, y_j. Доказанная нами теорема дает, таким образом, своеобразный и повидимому нетривиальный критерий разрешимости в целых числах системы линейных уравнений (12). Так как в рассматриваемом случае, очевидно, $\psi(u) = u$, то критерий этот [см. (4)] состоит в существовании такой постоянной Г, что

$$A_a \leqslant \Gamma T_a$$

для любых значений целочисленных переменных $a_1, \ldots, a_M$. Необходимость этого признака тривиальна. Достаточность его в случае $m=1$ была мною доказана недавно ([3]), и тоже нетривиальным путем. В общем случае, насколько мне известно, достаточность этого признака установлена здесь впервые.

Поступило
23.XII.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Mahler K., A theorem on inhomogeneous Diophantine inequalities, Proc. Nederl. Akad. vol. XLI (1938), 634—637.

[2] Korkine A. et Zolotareff G., Sur les formes quadratiques, Math. Ann. B. 6 (1873), 366—389.

[3] Хинчин А. Я., Об одном предельном случае аппроксимационной теоремы Кронекера, Доклады Ак. Наук СССР, т. VI, № 6 (1947), 563—565.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 123–128

К. А. РОДОССКИЙ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В КОРОТКИХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе показывается, что распределение простых чисел в сравнительно коротких арифметических прогрессиях подчинено определенным закономерностям. При этом используются оценки сверху числа L-рядов с характерами $\operatorname{mod} D$, имеющих нули в некоторых прямоугольниках.

§ 1

Для арифметических функций

$$\psi(x, D, l) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv l (\operatorname{mod} D)}} \Lambda(n),$$

$$\pi(x, D, l) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv l (\operatorname{mod} D)}} 1,$$

где $(D, l) = 1$, $\Lambda(n)$ — функция Mangoldt'a, p — простое число, характеризующих распределение простых чисел в арифметических прогрессиях, получены следующие асимптотические формулы:

$$\pi(x, D, l) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{1}{\ln n} - E \frac{\chi_1(l)}{\varphi(D)} \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{n^{\beta_1 - 1}}{\ln n} + O(x \exp(-c \ln^{\mu} x)), \qquad (1)$$

где $\varphi(D)$ — функция Euler'a, $c > 0$, χ_1 — исключительный характер, $E = 0$ или 1, β_1 — исключительный нуль функции $L(s, \chi_1)$, причем:

a) $\mu = \frac{1}{2}$ и для $x \geqslant \exp(\ln^2 D \cdot \omega(D))$, $\omega(D)$ — функция такая, что $\omega(D) \to \infty$ при $D \to \infty$; остаточный член формулы (1) становится малым по сравнению с первым членом при $D \to \infty$. Это результат Page'a ([1]).

b) Лучшая оценка дана Н. Г. Чудаковым ([2]) при помощи метода И. М. Виноградова. Им показано, что для $x \geqslant \exp(\ln^{\frac{1+\gamma}{\gamma}} D)$ $\mu = \frac{1}{1+\gamma}$, где γ — абсолютная постоянная, принадлежащая интервалу $\left(1; \frac{3}{4}\right)$.

Аналогичные результаты имеются для функции $\psi(x, D, l)$.

В 1944 г. Ю. В. Линник [(3), (4)] доказал, что в каждой из наших арифметических прогрессий имеется простое число $p \leqslant \exp(c_0 \ln D)$, где $c_0 > 0$ — абсолютная постоянная.

Возникает вопрос, нельзя ли нижнюю границу применимости асимптотического закона (1) приблизить к числу $\exp(c_0 \ln D)$?

В этой работе, опираясь на обобщение теоремы Ю. В. Линника(5) о числе L-рядов, имеющих нули в некоторых прямоугольниках, я показываю, что асимптотический закон для функций $\psi(x, D, l)$, $\pi(x, D, l)$ начинает действовать при меньших x, чем в случае а), при достаточно больших D.

Именно, доказывается следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть*

$$\ln^{1+\varepsilon} D \leqslant \ln x \leqslant \ln^{\frac{9}{4}} D, \quad D \geqslant D_0(\varepsilon), \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое малое фиксированное число. Тогда

$$\psi(x, D, l) = \frac{x}{\varphi(D)} - E\frac{\chi_1(l)}{\varphi(D)}\frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} + \frac{x}{\varphi(D)} O\left(\exp\left(-A_1(\varepsilon)\frac{\ln x}{\ln D}\right)\right), \tag{3}$$

$$\pi(x, D, l) = \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{1}{\ln n} - E\frac{\chi_1(l)}{\varphi(D)} \sum_{2 \leqslant n \leqslant x} \frac{n^{\beta_1 - 1}}{\ln n} + \frac{x}{\varphi(D) \ln x} O\left(\exp\left(-A_2(\varepsilon)\frac{\ln x}{\ln D}\right)\right), \tag{4}$$

где $A_1 > 0$, $A_2 > 0$ — постоянные, зависящие только от ε, а символ O не зависит от D.

§ 2

Предпошлем доказательству следующие общие леммы:

ЛЕММА 1. *Пусть $L(s, \chi_1)$, $L(s, \chi_2)$, ..., $L(s, \chi_{\varphi(D)})$ все L-ряды с характерами $\chi_i \pmod D$, λ — любое фиксированное число в пределах $1 > \lambda > 0$ и $\psi = \psi(D)$ — число, удовлетворяющее условию*

$$\frac{1}{3} \ln D \geqslant \psi(D) \geqslant \ln^{\lambda} D. \tag{5}$$

Пусть $Q(\psi, n) = Q\left(\frac{\psi}{\ln D(|n|+2)}\right)$ — число L-рядов, имеющих хоть один нуль в прямоугольнике

$$1 - \frac{\psi}{\ln D(|n|+2)} \leqslant \sigma < 1, \quad n - 1 \leqslant t < n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Тогда

$$Q(\psi, n) \leqslant \exp(A(\lambda)\psi + 28 \ln\ln D(|n|+2)), \tag{6}$$

где $A(\lambda)$ — постоянная, зависящая только от λ.

Доказательство. Лемма является тривиальным следствием одной теоремы автора(6).

ЛЕММА 2. *Все функции $L(s, \chi_i)$, $i = 1, 2, \ldots, \varphi(D)$, не имеют нулей в области*

$$0 \leqslant |t| \leqslant \exp(\ln^{\frac{1}{\gamma}} D), \quad \sigma \geqslant \frac{c_1}{\ln D},$$

где абсолютная постоянная $c_1 > 0$ и $\frac{1}{\gamma} = \frac{5}{4}$, за исключением, быть может, единственного нуля β_1.

Доказательство дано Н. Г. Чудаковым [2] и основано на применении метода И. М. Виноградова.

ЛЕММА 3. *Пусть $\Phi(\sigma)$ — дифференцируемая на $[a, b]$ функция, M — некоторое конечное множество точек сегмента $[a, b]$, $N(\sigma)$ — число точек из M, лежащих на сегменте $[a, \sigma]$. Тогда*

$$\sum_{\sigma \in M} \Phi(\sigma) = \Phi(b) N(b) - \int_a^b \Phi'(\sigma) N(\sigma) d\sigma. \tag{7}$$

Доказательство получается интегрированием по частям интеграла Stieltjes'а.

§ 3

Воспользуемся известной формулой [2]

$$\psi(x, D, l) = \frac{x}{\varphi(D)} - E\frac{\chi_1(l)}{\varphi(D)} \frac{x^{\beta_1}}{\beta_1} - \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{|t_k| \leqslant T} \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} + o\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right), \tag{8}$$

где $3 \leqslant T \leqslant xD^{-1}$, $\rho_k = \beta_k + it_k$ — нули L-ряда в критической полосе, исключая β_1, а остальные обозначения имеют тот же смысл, что и в § 1.

Пусть

$$\ln^{1+\varepsilon} D \leqslant \ln x \leqslant \ln^{\frac{9}{4}} D.$$

Положим

$$\ln x = \ln^{1+\alpha} D, \quad \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \frac{5}{4}, \quad T = \left[\exp\left(\frac{1}{2} \ln^{1+\frac{\alpha}{5}} D\right)\right].$$

Очевидно, что такой выбор T обеспечивает для достаточно больших D неравенство $DT \leqslant x$, так как ε фиксировано. В дальнейшем подразумевается, что D больше некоторого $D_0(\varepsilon)$, которое можно оценить.

ЛЕММА 4. *Существует абсолютная постоянная $c_2 > 0$ и постоянная $a_1(\varepsilon)$, зависящая только от ε, такие, что при*

$$|n| \leqslant T, \quad \frac{1}{3} \ln D \geqslant \psi \geqslant \ln^{\frac{\alpha}{5}} D$$

имеем

$$Q(\psi, n) \leqslant \exp(a_1(\varepsilon)\psi), \tag{9}$$

$$\frac{\psi}{\ln D(|n|+2)} \geqslant \frac{c_2}{\ln D}, \quad c_2 \leqslant c_1. \tag{10}$$

Доказательство. Неравенство (9) следует из (5), (6) и того, что

$$10 \ln \ln D(|n|+2) < 10 \ln\left(\ln D + \frac{1}{2} \ln^{1+\frac{\alpha}{5}} D\right) \ll \psi.$$

Далее,

$$\frac{\psi}{\ln D(|n|+2)} \geqslant \frac{\ln^{\frac{\alpha}{5}} D}{\ln D + \frac{1}{2}\ln^{1+\frac{\alpha}{5}} D} \geqslant \frac{c_2}{\ln D}$$

и подходящее $c_2 = \min\left(\frac{1}{2},\ c_1\right)$. Отсюда следует (10).

Двойную сумму в формуле (8) представим следующим образом:

$$\sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{|t_k| \leqslant T} \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} = \sum_{n=-T+1}^{T} \sum_{n-1 \leqslant t_k < n} \sum_{\chi} \chi(l) \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} = \sum_{n=-T+1}^{T} S_n;$$

если $n = T$, то $n-1 \leqslant t_k \leqslant n$.

В дальнейшем через $a_2(\varepsilon)$, $a_3(\varepsilon)$, ... будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от ε.

§ 4

ЛЕММА 5.

$$|S_n| < x \cdot a_8(\varepsilon) \exp(-a_9(\varepsilon) \ln^{\alpha} D) \frac{\ln D(|n|+2)}{|n|+1}. \tag{11}$$

Доказательство. Нули, на которые распространено суммирование в S_n, расположены в прямоугольнике

$$0 < \sigma < 1, \quad n-1 \leqslant t < n;$$

разобьем его вертикальными прямыми на прямоугольники:

$$(R_1) \qquad 1 - \frac{c_2}{\ln D} \leqslant \sigma < 1, \qquad n-1 \leqslant t < n,$$

$$(R_2) \quad 1 - \frac{\ln^{\frac{\alpha}{5}} D}{\ln D(|n|+2)} \leqslant \sigma < 1 - \frac{c_2}{\ln D}, \qquad n-1 \leqslant t < n,$$

$$(R_3) \quad 1 - \frac{\ln D}{3 \ln D(|n|+2)} \leqslant \sigma < 1 - \frac{\ln^{\frac{\alpha}{4}} D}{\ln D(|n|+2)}, \quad n-1 \leqslant t < n,$$

$$(R_4) \qquad 0 \leqslant \sigma < 1 - \frac{\ln D}{3 \ln D(|n|)+2)}, \quad n-1 \leqslant t < n.$$

Тогда

$$S_n = \sum_{\rho_k \in R_1} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} + \sum_{\rho_k \in R_2} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} + \\ + \sum_{\rho_k \in R_3} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} + \sum_{\rho_k \in R_4} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}.$$

На основании определения чисел T, c_2 и лемм 2, 4,

$$\sum_{\rho_k \in R_1} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} = 0 \tag{12}$$

как пустая. В R_2, по лемме 4 (формула (9)), имеют нули не более, чем $\exp(a_1(\varepsilon) \ln^{\frac{\alpha}{5}} D)$ L-рядов; каждый из них имеет нули в количестве, не превышающем $c_3 \ln D(|n|+2)$. Следовательно,

$$\left|\sum_{\rho_k\in R_2}\sum_{\chi}\overline{\chi}(l)\frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}\right|<\frac{2c_3}{|n|+1}\ln D(|n|+2)\exp(a_1(\varepsilon)\ln^{\frac{\alpha}{5}}D)x^{1-\frac{c_2}{\ln D}}<$$

$$<x\cdot 2c_3\exp(a_1(\varepsilon)\ln^{\frac{\alpha}{5}}D)\exp(-c_2\ln^{\alpha}D)\frac{\ln D(|n|+2)}{|n|+1}<$$

$$<x\cdot 2c_3\exp(-a_2(\varepsilon)\ln^{\alpha}D)\frac{\ln D(|n|+2)}{|n|+1}. \tag{13}$$

Число нулей в R_4 не превосходит $c_3\ln D(|n|+2)\varphi(D)$. Поэтому

$$\left|\sum_{\rho_k\in R_4}\sum_{\chi}\overline{\chi}(l)\frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}\right|<\frac{2c_3}{|n|+1}D\ln D(|n|+2)\,x^{1-\frac{\ln D}{3\ln D(|n|+2)}}<$$

$$<x\cdot 2c_3\exp(-a_3(\varepsilon)\ln^{1+\frac{4\alpha}{5}}D)\frac{\ln D(|n|+2)}{|n|+1}. \tag{14}$$

Кроме того, в S_0 и S_1 войдут слагаемые, соответствующие ρ_k-м близким к нулю. В силу теоремы Page'а, легко заметить, что они образуют величину $o\left(Dx^{\frac{1}{4}}\right)$, которую можно считать включенной в оценку (14).

Оценим теперь $|\sum_{\rho_k\in R_3}|$:

$$\left|\sum_{\rho_k\in R_3}\sum_{\chi}\overline{\chi}(l)\frac{x^{\rho_k}}{\rho_k}\right|<\frac{2x}{|n|+1}\sum_{\rho_k\in R_3}\sum_{\chi}x^{-\sigma_k},$$

где $\sigma_k=1-\beta_k$, и применим к правой части лемму 3, полагая в формуле (7)

$$\Phi(\sigma)=x^{-\sigma},\qquad \Phi'(\sigma)=-\ln x\cdot x^{-\sigma},$$

$$N(\sigma)\leqslant c_3\ln D(|n|+2)\,e^{a_1(\varepsilon)\ln D(|n|+2)\sigma},$$

$$a=\frac{\ln^{\frac{\alpha}{5}}D}{\ln D(|n|+2)},\qquad b=\frac{\ln D}{3\ln D(|n|+2)}.$$

Мы получим

$$\left|\sum_{\rho_k\in R_3}\right|<\frac{2x}{|n|+1}x^{-\frac{\ln D}{3\ln D(|n|+2)}}\cdot c_3\ln D(|n|+2)\,e^{\frac{1}{3}a_1(\varepsilon)\ln D}+$$

$$+\frac{2x\ln x}{|n|+1}c_3\ln D(|n|+2)\int_a^b x^{-\sigma}e^{a_1(\varepsilon)\ln D(|n|+2)\sigma}\,d\sigma<$$

$$<\frac{2x}{|n|+1}\exp\left(-a_4(\varepsilon)\ln^{1+\frac{4\alpha}{5}}D\right)c_3\ln D(|n|+2)+$$

$$+\frac{2x}{|n|+1}\cdot\frac{c_3}{a_5(\varepsilon)}\ln D(|n|+2)\exp(-a_5(\varepsilon)\ln^{\alpha}D)<$$

$$<x\cdot a_6(\varepsilon)\exp(-a_7(\varepsilon)\ln^{\alpha}D)\frac{\ln D(|n|+2)}{|n|+1}, \tag{15}$$

так как $\alpha<1+\frac{4\alpha}{5}$ для $\alpha\leqslant\frac{5}{4}$.

Собирая оценки (12), (13), (14), (15), получаем (11), что и требовалось доказать.

§ 5

Доказательство теоремы. Суммируя оценки (11) для $-T+1 \leqslant n \leqslant T$, получаем

$$\left| \sum_{\chi} \chi(l) \sum_{|t_k| \leq T} \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} \right| < x \cdot a_{10}(\varepsilon) \exp(-a_9(\varepsilon) \ln^{\alpha} D) \ln^2 DT <$$

$$< \frac{x}{2} \exp(-a_{11}(\varepsilon) \ln^{\alpha} D).$$

Оценим остаточный член формулы (8):

$$O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right) = \frac{x}{\varphi(D)} \cdot O\left(\frac{\varphi(D) \ln^2 x}{T}\right) < \frac{x}{2\varphi(D)} \exp\left(-a_{12}(\varepsilon) \ln^{1+\frac{\alpha}{5}} D\right).$$

Обозначая $A_1(\varepsilon) = \min(a_{11}(\varepsilon), a_{12}(\varepsilon))$, окончательно имеем

$$\left| \frac{1}{\varphi(D)} \sum_{\chi} \bar{\chi}(l) \sum_{|t_k| \leq T} \frac{x^{\rho_k}}{\rho_k} + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T}\right) \right| < \frac{x}{\varphi(D)} \exp(-A_1(\varepsilon) \ln^{\alpha} D) =$$

$$= \frac{x}{\varphi(D)} \exp\left(-A_1(\varepsilon) \frac{\ln x}{\ln D}\right),$$

откуда непосредственно следует формула (3). Формула (4) получается из (3) известным способом ([7]) и на ее выводе останавливаться не будем. Таким образом, теорема доказана.

Поступило
3.IV.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Page A., On the number of primes in an arithmetic progression, Proc. London Math. Soc. 39 (1935), 116—141.

[2] Чудаков Н. Г., О нулях L-функций Дирихле, Доклады Ак. Наук СССР, т. XLIX, № 2 (1945), 89—91.

[3] Линник Ю. В., О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, I. Основная теорема, Матем. сб. 15 (57) : 2 (1944), 139—178.

[4] Линник Ю. В., О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии, II. «Эффект Deuring-Heilbronn'a», Матем. сб. 15 (57) : 3 (1944), 347—368.

[5] Линник Ю. В., Об L-рядах Дирихле и суммах по простым числам, Матем. сб. 15 (57) : 1 (1944), 3—12.

[6] Родосский К. А., О комплексных нулях L-функций Дирихле, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем. 12 (1948), 47—56.

[7] Чудаков Н. Г., Введение в теорию L-функций Дирихле, М.—Л., 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

12 (1948), 129—178

В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ

ПОЛУРАДИКАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА *

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе вводится и изучается понятие полурадикального кольца как естественное обобщение понятия радикального кольца, введенного Джэкобсоном в 1945 г.

Введение

Понятие радикала кольца играет в теории колец очень большую роль. Это понятие, введенное сперва для случая алгебр конечного ранга и колец с условием минимальности, в последние годы подвергалось дальнейшему обобщению в работах различных авторов, причем окончательную форму, пригодную для любого ассоциативного кольца, понятие радикала получило в работе Джэкобсона (1). Это, в частности, привело к выделению особого класса *радикальных колец*, т. е. колец, совпадающих со своим радикалом в смысле Джэкобсона.

Радикальные кольца являются обобщением нильпотентных колец и нильколец. Их проще всего определить при помощи *присоединенного умножения*, т. е. умножения

$$a \circ b = a + b - ab,$$

а именно, радикальные кольца — это такие ассоциативные кольца, которые составляют группу относительно присоединенного умножения.

Присоединенное умножение уже использовалось в работах различных авторов в качестве вспомогательного орудия, а в работе Фостера и Бернштейна (2) применялось для построения новой аксиоматики колец с единицей. В § 1 настоящей работы также указывается одна форма определения любого ассоциативного кольца, причем обычное умножение заменяется в ней присоединенным, в то время как сложение остается обычным. Это открывает возможность нового подхода к изучению колец, подхода, связанного с такими понятиями,

* Настоящая работа выполнена под непосредственным руководством А. Г. Куроша, за что приношу ему свою искреннюю благодарность.

которые наиболее просто и естественно формулируются при помощи присоединенного умножения.

В настоящей работе вводятся и изучаются *полурадикальные кольца*, т. е. кольца, составляющие относительно присоединенного умножения полугруппу (см. § 4). Полурадикальные кольца являются естественным обобщением радикальных колец, причем в работе указаны условия, при которых полурадикальное кольцо будет радикальным кольцом, нилькольцом, нильпотентным кольцом; здесь, в частности, достигается обобщение теоремы Гопкинса-Джэкобсона (см. § 5).

В то время как радикальные кольца играют по отношению к присоединенному умножению такую же роль, как тела по отношению к обычному умножению, полурадикальные кольца вполне аналогичны кольцам без делителей нуля. Этот параллелизм проявляется, в частности, в вопросе о вложении полурадикальных колец в радикальные: всякое коммутативное полурадикальное кольцо может быть вложено в радикальное, а в некоммутативном случае справедлива теорема, аналогичная теореме Орэ-Веддербарна (см. § 6); с другой стороны, не всякое некоммутативное полурадикальное кольцо вкладывается в радикальное, как показывает пример, аналогичный примеру Мальцева (см. § 7).

В работе рассматриваются, далее, те совокупности элементов кольца, которые отображаются в единицу при гомоморфных отображениях этого кольца на кольцо с единицей. Эти совокупности играют по отношению к присоединенному умножению роль, весьма близкую к роли идеалов по отношению к обычному умножению, и поэтому они названы *присоединенными идеалами* (см. § 8).

Для присоединенных идеалов коммутативного полурадикального кольца оказалась справедливой теория, параллельная обычной теории идеалов в коммутативных кольцах без делителя нуля. Так, в § 10 доказано, что в кольцах главных присоединенных идеалов всякий элемент однозначно разлагается в присоединенное произведение далее не разложимых элементов.

С другой стороны, в § 11 указаны теоремы, вполне аналогичные тем теоремам, которые составляют известную теорию «Нетер» о разложении идеалов коммутативного кольца без делителей нуля в произведение степеней простых идеалов.

Заметим, что параллелизм между определениями кольца без делителей нуля и полурадикального кольца проявляется и в том, что в доказательствах теорем о полурадикальных кольцах используются, как правило, те же методы, что и в доказательствах параллельных им теорем о кольцах без делителей нуля. Каждый раз, впрочем, возникают некоторые усложнения, вызываемые более сложной формой закона дистрибутивности, связывающего присоединенные умножения со сложением.

Изложение содержания первой половины настоящей работы печатается в Докладах Ак. Наук СССР.

§ 1. Присоединенное умножение в произвольном ассоциативном кольце

Как известно, понятие ассоциативного кольца определяется, обычно, следующим образом.

Определение 1. Множество $\mathfrak{A}$ с двумя алгебраическими операциями $+$ и $\cdot$ называется ассоциативным кольцом, если имеют место следующие постулаты:

1. $\mathfrak{A}$ — абелева группа относительно операции $+$;
2. $a(bc) = (ab)c$;
3. $\begin{cases} (a+b)c = ac+bc, \\ c(a+b) = ca+cb. \end{cases}$

Наряду с этим определением можно дать еще одно эквивалентное определение ассоциативного кольца, а именно:

Определение 1′. Множество $\mathfrak{A}$ с двумя алгебраическими операциями $+$ и $\circ$ называется ассоциативным кольцом, если выполняются следующие постулаты:

1′. $\mathfrak{A}$ — абелева группа относительно операции $+$;

2′. $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$;

3′. $\begin{cases} (a+b) \circ c = a \circ c + b \circ c - c, \\ c \circ (a+b) = c \circ a + c \circ b - c. \end{cases}$

Прежде чем доказать эквивалентность определений 1 и 1′, заметим, что из дистрибутивного закона 3′ вытекают следующие два свойства:

$$\text{P.1} \qquad \begin{cases} (a-b) \circ c = a \circ c - b \circ c + c, \\ c \circ (a-b) = c \circ a - c \circ b + c, \end{cases}$$

$$\text{P.2} \qquad a \circ 0 = 0 \circ a = a,$$

где 0 — нуль аддитивной группы кольца. Действительно, имеем

$$[(a-b)+b] \circ c = a \circ c = (a-b) \circ c + b \circ c - c,$$

откуда

$$(a-b) \circ c = a \circ c - b \circ c + c.$$

Аналогично проверяется другая сторона этого свойства. Далее, получаем

$$a \circ 0 = a \circ (b-b) = a \circ b - a \circ b + a = a,$$

$$0 \circ a = (b-b) \circ a = b \circ a - b \circ a + a = a.$$

Покажем, теперь, что определение 1′ следует из определения 1. Для этой цели положим в определении 1

$$a \circ b = a + b - ab. \tag{1}$$

Тогда получаем

$$a \circ (b \circ c) = a \circ (b + c - b \cdot c) = a + (b + c - bc) - a(b + c - bc) =$$
$$= a + b + c - bc - ab - ac + abc = (a + b - ab) + c - (b + a - ab)c =$$
$$= a \cdot b + c - (a \circ b)c = (a \circ b) \circ c.$$

Далее,

$$(a+b)\circ c=(a+b)+c-(a+b)c=a+b+c-ac-bc=$$
$$=(a+c-ac)+(b+c-bc)-c=a\circ c+b\circ c-c.$$

Аналогично получаем другую сторону дистрибутивного закона 3′.

Обратно, определение 1 нетрудно получить из определения 1′. Чтобы показать это, положим в определении 1′

$$ab=a+b-a\circ b. \qquad (2)$$

Если мы воспользуемся теперь свойством Р.1 и дистрибутивным законом 3′, то получим

$$a(bc)=a(b+c-b\circ c)=a+(b+c-b\circ c)-a\circ(b+c-b\circ c)=$$
$$=a+b+c-b\circ c-a\circ(b+c)+a\circ b\circ c-a=a+b+c-b\circ c-a\circ b-a\circ c+$$
$$+a+a\circ b\circ c-a=(a+b-a\circ b)+c-(b\circ c+a\circ c-a\circ b\circ c)=(a+b-a\circ b)+c-$$
$$-(b+a-a\circ b)\circ c=ab+c-(ab)\circ c=(ab)c.$$

Далее, имеем

$$(a+b)c=(a+b)+c-(a+b)\circ c=a+b+c-a\circ c-b\circ c+c=$$
$$=(a+c-a\circ c)+(b+c-b\circ c)=ac+bc.$$

Аналогично проверяется вторая сторона дистрибутивного закона.

В дальнейшем будем называть операцию $\circ$ *присоединенным умножением* в данном кольце $\mathfrak{A}$. Присоединенные умножения уже встречались у различных авторов [см., например, Бернштейн (2)].

З а м е ч а н и е 1. Свойство Р.2 показывает, что нуль аддитивной группы кольца является в то же время единицей относительно присоединенного умножения.

З а м е ч а н и е 2. Понятие правого (левого) идеала можно выразить с помощью присоединенного умножения следующим эквивалентным образом:

О п р е д е л е н и е 2. Непустое подмножество I кольца $\mathfrak{A}$ называется *правым идеалом*, если

а) из $a\in I$ и $b\in I$ следует $a-b\in I$;

б) из $a\in I$ и $x\in\mathfrak{A}$ следует $a\circ x-x\in I$.

В самом деле, если $a\in I$ и $a\circ x-x\in I$, то $a-(a\circ x-x)\in I$ или $a+x-a\circ x\in I$, т. е. $ax\in I$. Обратно, из $a\in I$ и $ax\in I$ следует $a-ax\in I$, т. е. $a\circ x-x\in I$.

З а м е ч а н и е 3. Из равенства (1) видно, что $a\circ b=b\circ a$ тогда и только тогда, когда $ab=ba$.

Выведем теперь из дистрибутивного закона 3′ несколько свойств присоединенного умножения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Имеем

$$(-a)\circ b=(0-a)\circ b=0\circ b-a\circ b+b=-a\circ b+2b,$$
$$a\circ(-b)=a\circ(0-b)=a\circ 0-a\circ b+a=-a\circ b+2a,$$
$$(-a)\circ(-b)=-(-a)\circ b+2(-a)=-[-a\circ b+2b]-2a=a\circ b-2a-2b.$$

Далее, нетрудно показать свойство

$$\text{P.3}\quad \begin{cases} (a_1+a_2+\ \dots\ +a_n)\circ b = a_1\circ b + a_2\circ b + \dots \\ \qquad \dots + a_n\circ b + (-n+1)\, b = \sum_{i=1}^{n} a_i\circ b + (-n+1)\, b, \\ b\circ(a_1+a_2+\dots+a_n) = b\circ a_1 + b\circ a_2 + \dots \\ \qquad \dots + b\circ a_n + (-n+1)\, b = \sum_{i=1}^{n} b\circ a_i + (-n+1)\, b. \end{cases}$$

Действительно, если $n=1$, то свойство P.3 очевидно, а при $n=2$ оно совпадает с дистрибутивным законом 3′. Предположим теперь, что P.3 верно для $n-1$ слагаемых, т. е.

$$(a_1+a_2+\ \dots\ +a_{n-1})\circ b = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\circ b + (-n+2)\, b.$$

Тогда получаем

$$(a_1+a_2+\ \dots\ +a_n)\circ b = [(a_1+a_2+\ \dots\ +a_{n-1})+a_n]\circ b =$$

$$=(a_1+a_2+\ \dots\ +a_{n-1})\circ b + a_n\circ b - b = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\circ b + (-n+2)b + a_n\circ b - b =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i\circ b + (-n+1)\, b.$$

Аналогично проверяется другая сторона свойства P. 3. В частности если $a_1=a_2=\dots=a_k=a$, то соотношения P. 3 превращаются в равенства

$$\text{P. 3}'\quad \begin{cases} (ka)\circ b = k\,(a\circ b) + (-k+1)\, b, \\ b\circ(ka) = k\,(b\circ a) + (-k+1)\, b. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что равенства P. 3′ верны не только при $k\geqslant 0$, но и при $k<0$. Действительно, если $k<0$, то положим $k=-k'$. Тогда получаем

$$(ka)\circ b = (-k'\, a)\circ b = [k'\,(-a)]\circ b = k'\,[(-a)\circ b] + (-k'+1)\, b =$$

$$= k'\,(-a\circ b + 2b) + (-k'+1)\, b = -k'\,(a\circ b) + 2\,k'\, b + (-k'+1)\, b =$$

$$= -k'\,(a\circ b) + (k'+1)\, b = k\,(a\circ b) + (-k+1)\, b.$$

Аналогично проверяется второе равенство P. 3′.

Из равенств P. 3 нетрудно получить следующее правило для перемножения сумм:

$$\text{P. 4}\quad \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\circ\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \\ = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\circ b_j + (-n+1)\sum_{i=1}^{m} a_i + (-m+1)\sum_{j=1}^{n} b_j. \end{cases}$$

Действительно,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\circ\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)=\sum_{i=1}^{m} a_i\circ\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)+(-m+1)\sum_{j=1}^{n} b_j=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n} a_i\circ b_j+(-n+1)\,a_i\right]+(-m+1)\sum_{j=1}^{n} b_j=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i\circ b_j+(-n+1)\sum_{i=1}^{m} a_i+(-m+1)\sum_{j=1}^{n} b_j.$$

В частности, если $a_1=a_2=\ldots=a_m=a$ и $b_1=b_2=\ldots=b_n=b$, получаем

$$\text{P. }4'\quad (ma)\circ(nb)=mn\,(a\circ b)+(-n+1)\,(ma)+(-m+1)\,(nb).$$

Теперь нетрудно проверить, что равенство P. 4′ верно для любых целых m и n. Проверим, например, случай $m<0$, $n<0$. Положив $m=-m'$, $n=-n'$, имеем

$$(ma)\circ(nb)=(-m'\,a)\circ(-n'\,b)=[m'\,(-a)]\circ[n'\,(-b)]=$$
$$=m'\,n'\,[(-a)\circ(-b)]+(-n'+1)(-m'\,a)+(-m'+1)(-n'\,b)=$$
$$=m'\,n'\,(a\circ b-2\,a-2\,b)+(-n'+1)(-m'\,a)+(-m'+1)(-n'\,b)=$$
$$=m'\,n'\,(a\circ b)+(n'+1)(-m'\,a)+(m'+1)(-n'\,b)=$$
$$=mn\,(a\circ b)\;+(-n+1)\;(ma)+(-m+1)\,(nb).$$

Наконец, выведем следующее правило перемножения двух линейных форм:

$$\text{P. }4''\begin{cases}\left(\sum_{i=1}^{m} p_i\,a_i\right)\circ\left(\sum_{j=1}^{n} q_jb_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_iq_j\,(a_i\circ b_j)+\\ +\left(-\sum_{j=1}^{n} q_j+1\right)\sum_{i=1}^{m} p_ia_i+\left(-\sum_{i=1}^{m} p_i+1\right)\sum_{j=1}^{n} q_jb_j,\end{cases}$$

где p_i, q_j — целые положительные или отрицательные числа. Действительно,

$$\left(\sum_{i=1}^{m} p\,a_i\right)\circ\left(\sum_{j=1}^{n} q_jb_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(p_ia_i)\;\;(q_jb_j)+(-n+1)\sum_{i=1}^{m} p_ia_i+$$
$$+(-m+1)\sum_{j=1}^{n} q_jb_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[p_iq_j\,(a_i\circ b_j)+(-q_j+1)(p_ia_i)+$$
$$+(-p_i+1)(q_jb_j)]+(-n+1)\sum_{i=1}^{m} p_ia_i+(-m+1)\sum_{j=1}^{n} q_jb_j=$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_iq_j\,(a_i\circ b_j)+\left(-\sum_{i=1}^{n} q_j+n\right)\sum_{i=1}^{m} p_ia_i+\left(-\sum_{i=1}^{m} p_i+m\right)\sum_{j=1}^{n} q_jb_j+$$
$$+(-n+1)\sum_{i=1}^{m} p_ia_i+(-m+1)\sum_{j=1}^{n} q_jb_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_iq_j\,(a_i\circ b_j)+$$

$$+\left(-\sum_{j=1}^{n} q_j+1\right)\sum_{i=1}^{m} p_i a_i+\left(-\sum_{i=1}^{m} p_i+1\right)\sum_{j=1}^{n} q_j b_j.$$

Замечание 4. Из равенства Р. 4″ вытекает, в частности, что если $\sum_{i=1}^{m} p_i=1$ и $\sum_{j=1}^{n} q_j=1$, то

$$\left(\sum_{i=1}^{m} p_i a_i\right)\circ\left(\sum_{j=1}^{n} q_j b_j\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i q_j (a_i\circ b_j),$$

т. е. в этом случае имеет место обычный дистрибутивный закон.

§ 2. Полурадикальные и радикальные элементы

Рассмотрим произвольное ассоциативное кольцо $\mathfrak{A}$. Элемент $a\in\mathfrak{A}$ будем называть *правым полурадикальным*, если выполняется следующее условие:

1. Из равенства $x\circ a=x'\circ a$ следует $x=x'$.

Если перейти к обычному умножению, то условие 1 равносильно следующему:

1′. Из равенства $x=xa$ следует $x=0$.

Действительно, пусть имеет место условие 1. Тогда, в частности, из равенства $x\circ a=a=0\circ a$ следует $x=0$ или, перейдя к обычному умножению, получаем, что из равенства $x+a-xa=a$ следует $x=0$, т. е. из $x=xa$ вытекает $x=0$. Обратно, пусть выполняется условие 1′. Перейдя к присоединенному умножению, получаем: из $x=x+a-x\circ a$ следует $x=0$, или из $x\circ a=a$ следует $x=0$.

Пусть, теперь, $x\circ a=x'\circ a$, или, что то же самое, $(x-x')\circ a=a$. Тогда из последнего условия получаем $x-x'=0$, т. е. $x=x'$.

Из условия 1′ видно, что идемпотентный элемент, отличный от нуля, не является правым полурадикальным. Заметим также, что правый полурадикальный элемент определяется относительно присоединенного умножения так же, как правый неделитель нуля относительно обычного умножения.

Элемент $a\in\mathfrak{A}$ будем называть *правым радикальным*, если существует такой элемент a'_r, что $a\circ a'_r=0$.

Аналогично определяем *левый полурадикальный* и *левый радикальный* элементы.

Если элемент a является одновременно левым и правым полурадикальным, то будем говорить, что a — *полурадикальный элемент*.

Если элемент a является одновременно левым и правым радикальным, то будем говорить, что a — *радикальный элемент*. В этом случае существуют два таких элемента a'_l и a'_r, что $a'_l\circ a=0$ и $a\circ a'_r=0$. Нетрудно заметить, что $a'_l=a'_r$. Действительно,

$$a'_l=a'_l\circ 0=a'_l\circ a\circ a'_l=(a'_l\circ a)\circ a'_r=0\circ a'_r=a'_r.$$

Заметим, что правый радикальный элемент является одновременно и правым полурадикальным элементом. В самом деле, пусть $a\circ a'_r=0$

и предположим, что $x \circ a = x' \circ a$. Умножая последнее равенство справа на a'_r, получаем $x \circ a \circ a'_r = x' \circ a \circ a'_r$, т. е. $x = x'$.

Из последнего замечания следует, что радикальный элемент является одновременно и полурадикальным элементом. Однако можно построить пример, когда правый радикальный элемент не является левым полурадикальным элементом.

Пример 1. Пусть G — аддитивная группа всех счетных бесконечных последовательностей $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, где a_i принадлежат некоторому полю F. Рассматриваем эту группу как F-модуль и обозначаем через $\mathfrak{A}$ кольцо всех F-эндоморфизмов группы G (т. е. совокупность эндоморфизмов, коммутирующих с элементами из F). Выбираем в кольце $\mathfrak{A}$ три элемента λ, μ, ν, определяемые следующим образом:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)\ \lambda = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)\ \mu = (-a_1, 0, 0, \ldots),$$
$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)\ \nu = (a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, \ldots),$$

где $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ — произвольный элемент в G.

Покажем, что λ — правый радикальный элемент. Имеем

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)(\lambda + \nu - \lambda\nu) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots) +$$
$$+ (a_1 - a_2, a_2 - a_3, \ldots) - (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots)\nu =$$
$$= (2a_1 - a_2, 2a_2 - a_1 - a_3, \ldots) - (2a_1 - a_2, 2a_2 - a_1 - a_3, \ldots) = (0, 0, \ldots).$$

Так как $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ — произвольный элемент группы G, то $\lambda \circ \nu = 0$.

Нетрудно теперь проверить, что λ не является левым полурадикальным элементом. Так как элемент μ отличен от нуля, то для этого достаточно, очевидно, показать, что $\mu = \lambda\mu$.

Имеем:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots)(\mu - \lambda\mu) = (-a_1, 0, 0, \ldots) - (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots)\mu =$$
$$= (-a_1, 0, 0, \ldots) - (-a_1, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 0, \ldots).$$

Следовательно, $\mu - \lambda\mu = 0$, т. е. $\mu = \lambda\mu$.

Явление, которое наблюдается в вышеприведенном примере, не имеет места, если в кольце удовлетворяются некоторые условия конечности для идеалов. Перейдем к выяснению этих условий.

Для данного элемента a кольца $\mathfrak{A}$ определяем отображение $\bar{a}_r$ этого кольца следующим образом:

$$x\bar{a}_r = x - xa \tag{1}$$

(аналогично можно определить отображение $x\bar{a}_l = x - ax$).

Обозначим через $\mathfrak{A}\bar{a}_r$ совокупность $\{x\bar{a}_r\}$, где x пробегает кольцо $\mathfrak{A}$, т. е.

$$\mathfrak{A}\bar{a}_r = \{x\bar{a}_r\} = \{x - xa\} = \{x \circ a - a\}. \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что $\mathfrak{A}\bar{a}_r$ — левый идеал. Действительно,

$$(x_1 - x_1 a) - (x_2 - x_2 a) = (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)\,a \in \mathfrak{A}\bar{a}_r$$

и

$$r(x - xa) = rx - rxa \in \mathfrak{A}\bar{a}_r.$$

Отображение $\bar{a}_r$ есть эндоморфизм аддитивной группы $\mathfrak{A}$, отображающий $\mathfrak{A}$ на левый идеал $\mathfrak{A}\bar{a}_r$. В самом деле,

$$(x+y)\bar{a}_r = (x+y)-(x+y)a = x-xa+y-ya = x\bar{a}_r + y\bar{a}_r.$$

Далее,

$$(xy)\bar{a}_r = xy - xya = x(y-ya) = x(y\bar{a}_r).$$

С другой стороны,

$$x(\bar{a}_r\bar{b}_r) = (x\bar{a}_r)\bar{b}_r = (x-xa)\bar{b}_r = x-xa-(x-xa)b =$$
$$= x-xa-xb+xab = x-x(a+b-ab) = x-x(a\circ b) = x(\overline{a\circ b})_r,$$

т. е.

$$\bar{a}_r\bar{b}_r = (\overline{a\circ b})_r. \qquad (3)$$

Заметим также, что $x\bar{0}_r = x$.

Пользуясь отображением $\bar{a}_r$, можно сказать, что элемент a будет правым полурадикальным, если из равенства $x\bar{a}_r = 0$ следует $x=0$.

Обозначим через $\mathfrak{Z}\bar{a}_r$ совокупность таких элементов z, что $z\bar{a}_r=0$. Легко видеть, что $\mathfrak{Z}\bar{a}_r$ — левый идеал. Действительно, пусть $z_1 \in \mathfrak{Z}\bar{a}_r$ и $z_2 \in \mathfrak{Z}\bar{a}_r$. Тогда

$$(z_1 - z_2)\bar{a}_r = z_1\bar{a}_r - z_2\bar{a}_r = 0,$$

т. е. $z_1 - z_2 \in \mathfrak{Z}\bar{a}_r$. Далее,

$$(rz)\bar{a}_r = r(z\bar{a}_r) = 0$$

для любого $r \in \mathfrak{A}$.

ЛЕММА 1 [см. ([1])]. *Элемент $a \in \mathfrak{A}$ будет левым радикальным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}\bar{a}_r = \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}\bar{a}_r = \mathfrak{A}$. Тогда существует такой элемент $x \in \mathfrak{A}$, что $x\bar{a}_r = -a$, т. е. $x - xa + a = 0$ или $x \circ a = 0$. Обратно, пусть $x\circ a = 0$, т. е. $x + a - xa = 0$. Тогда

$$a = -x + xa = -x - (-x)a \in \mathfrak{A}\bar{a}_r.$$

Следовательно, так как $\mathfrak{A}\bar{a}_r$ — левый идеал, $ya \in \mathfrak{A}\bar{a}_r$ для любого $y \in \mathfrak{A}$. Но, по определению $\mathfrak{A}\bar{a}_r$, $y - ya \in \mathfrak{A}\bar{a}_r$, поэтому $y \in \mathfrak{A}\bar{a}_r$, т. е. $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\bar{a}_r$.

Обозначим через $\Omega(\mathfrak{A})$ некоторое множество эндоморфизмов произвольной группы $\mathfrak{A}$, замкнутое относительно умножения, а через $\mathfrak{Z}\alpha$ — совокупность таких $z \in \mathfrak{A}$, что $z\alpha = 0$ для данного $\alpha \in \Omega(\mathfrak{A})$.

ЛЕММА 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — аддитивная абелева группа и пусть выполняются следующие условия:*

I. *Каждому элементу $a \in \mathfrak{A}$ однозначно соответствует элемент $\alpha \in \Omega(\mathfrak{A})$.*

II. *В $\mathfrak{A}$ определено умножение $\otimes$ следующим образом:*

$$a \otimes b = a\beta + mb, \qquad (4)$$

где β — эндоморфизм, соответствующий b, а m — фиксированное целое число, быть может, нуль.

III. $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$.

IV. *Произведению* $a \otimes b$ *соответствует произведение* $\alpha\beta$.

При этих предположениях, если имеет место условие минимальности для подгрупп $\mathfrak{A}\sigma$, *где* $\sigma \in \Omega(\mathfrak{A})$, *и если*

$$A\alpha = \mathfrak{A} \tag{5}$$

для некоторой подгруппы $A = \mathfrak{A}\sigma$ *и некоторого* $\alpha \in \Omega(\mathfrak{A})$, *то* $A = \mathfrak{A}$.

Доказательство. Заметим, что из условий III, II и IV следует

$$a \otimes b \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a\,\beta\nu + m\,(b \otimes c). \tag{6}$$

Пусть, теперь,

$$B = \mathfrak{A}\beta \tag{7}$$

будет минимальная подгруппа, удовлетворяющая равенству вида (5), т. е.

$$\mathfrak{A} = B\nu \tag{8}$$

для некоторого $\nu \in \Omega(\mathfrak{A})$.

Подставляя выражение B из равенства (7) в равенство (8), получаем

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\beta\nu. \tag{9}$$

Следовательно, существует такой элемент $r \in \mathfrak{A}$, что

$$b - m\,(b \otimes c) = r\beta\nu,$$

где элементы b и c соответствуют эндоморфизмам β и ν, или на основании равенства (6)

$$b = r\,\beta\nu + m\,(b \otimes c) = r \otimes b \otimes c. \tag{10}$$

Равенству (10) будет соответствовать, в силу условия IV, равенство

$$\beta = \rho\beta\nu, \tag{11}$$

где ρ — эндоморфизм, соответствующий элементу r.

Подставляя значение β из равенства (11) в равенство (9), получим

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\rho\beta\nu\nu = (\mathfrak{A}\rho\beta)\,\nu\nu. \tag{12}$$

Но имеет место включение

$$\mathfrak{A}\rho\beta \subseteq \mathfrak{A}\beta = B. \tag{13}$$

Теперь, из соотношений (12), (13) и из минимальности B следует равенство

$$\mathfrak{A}\rho\beta = B. \tag{14}$$

Наконец, из равенств (7), (11), (14) и (8) получаем

$$B = \mathfrak{A}\beta = \mathfrak{A}\rho\beta\nu = B\nu = \mathfrak{A}. \tag{15}$$

Следовательно, и подавно $A = \mathfrak{A}$.

ЛЕММА 3. *Если* $\mathfrak{A}$ — *некоторая группа с условием максимальности для подгрупп* $\mathfrak{Z}\beta$, *где* $\beta \in \Omega(\mathfrak{A})$, *и если* $\mathfrak{B}\alpha = \mathfrak{A}$ *для некоторого подмножества* $\mathfrak{B}$ *из* $\mathfrak{A}$ *и некоторого* $\alpha \in \Omega(\mathfrak{A})$, *то* $\mathfrak{Z}\alpha = 0$ *и* $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

Доказательство. Рассматриваем возрастающую цепочку

$$0 \subset \mathfrak{Z}\alpha \subset \mathfrak{Z}\alpha^2 \subset \mathfrak{Z}\alpha^3 \subset \ldots$$

Из условия максимальности следует, что $\mathfrak{Z}\alpha^k = \mathfrak{Z}\alpha^{k+1}$ для некоторого целого k.

Пусть $z \in \mathfrak{Z}\alpha^k$, т. е. $z\alpha^k = 0$. Из равенства $\mathfrak{B}\alpha = \mathfrak{A}$ получаем $z = x\alpha$ для некоторого $x \in \mathfrak{B}$. Заменяя z в равенстве $z\alpha^k = 0$ через $x\alpha$, получаем $x\alpha^{k+1} = 0$, т. е. $x \in \mathfrak{Z}\alpha^{k+1} = \mathfrak{Z}\alpha^k$. Поэтому $x\alpha^k = 0$, или $(x\alpha)\,\alpha^{k-1} = 0$, т. е. $z\alpha^{k-1} = 0$. Следовательно, $\mathfrak{Z}\alpha^k \subseteq \mathfrak{Z}\alpha^{k-1}$, но так как $\mathfrak{Z}\alpha^{k-1} \subseteq \mathfrak{Z}\alpha^k$, то $\mathfrak{Z}\alpha^k = \mathfrak{Z}\alpha^{k-1}$. Повторяя эти рассуждения, получаем

$$\mathfrak{Z}\alpha^k = \mathfrak{Z}\alpha^{k-1} = \ldots = \mathfrak{Z}\alpha = 0.$$

Пусть, теперь, x — произвольный элемент в $\mathfrak{A}$. Из равенства $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\alpha$ получаем $x\alpha = y\alpha$ для некоторого $y \in \mathfrak{B}$, т. е. $(x - y)\,\alpha = 0$, или, так как $\mathfrak{Z}\alpha = 0$, $x - y = 0$, т. е. $x = y \in \mathfrak{B}$. Следовательно, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$.

ЛЕММА 4. *Если в группе $\mathfrak{A}$ имеет место условие минимальности для подгрупп $\mathfrak{A}\sigma$, где $\sigma \in \Omega(\mathfrak{A})$, и если $\mathfrak{Z}\alpha = 0$ для некоторого $\alpha \in \Omega(\mathfrak{A})$, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\alpha$.*

Доказательство. Рассмотрим убывающую цепочку подгрупп.

$$\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}\alpha \supseteq \mathfrak{A}\alpha^2 \supseteq \ldots$$

Из условия минимальности получаем $\mathfrak{A}\alpha^k = \mathfrak{A}\alpha^{k+1}$ при некотором целом k. Следовательно, для произвольного $x \in \mathfrak{A}$ найдется такой $y \in \mathfrak{A}$, что $x\alpha^k = y\alpha^{k+1}$ или

$$(x\alpha^{k-1} - y\alpha^k)\,\alpha = 0.$$

Так как $\mathfrak{Z}\alpha = 0$, то $x\alpha^{k-1} = y\alpha^k$, т. е. $\mathfrak{A}\alpha^{k-1} \subseteq \mathfrak{A}\alpha^k$ и, следовательно, $\mathfrak{A}\alpha^{k-1} = \mathfrak{A}\alpha^k$.

Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$\mathfrak{A}\alpha^k = \mathfrak{A}\alpha^{k-1} = \ldots = \mathfrak{A}\alpha = \mathfrak{A}.$$

Докажем теперь две теоремы:

ТЕОРЕМА 1. *Если в кольце $\mathfrak{A}$ имеет место условие минимальности для $\mathfrak{A}\,\overline{c}_r$, где $c \in \mathfrak{A}$, или же условие максимальности для идеалов $\mathfrak{Z}\,\overline{c}_r$, то из равенства $a \circ b = 0$ следует $b \circ a = 0$ и обратно.*

Доказательство. Предположим сначала, что $a \circ b = 0$ и что в кольце $\mathfrak{A}$ имеет место условие минимальности для левых идеалов $\mathfrak{A}\overline{c}_r$. Тогда, ввиду (3), имеем

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\,\overline{0}_r = \mathfrak{A}\,(\overline{a \circ b})_r = \mathfrak{A}\overline{a}_r\,\overline{b}_r.$$

Так как

$$a \circ b = a\overline{b}_r + b, \quad (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ и } (\overline{a \circ b})_r = \overline{a}_r\,\overline{b}_r,$$

то мы можем применить лемму 2, причем $m = 1$. Получаем $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\overline{a}_r$, т. е. a является левым радикальным (лемма 1). Но, по предположению, a является правым радикальным. Следовательно, a — радикальный элемент, т. е. $a \circ b = b \circ a = 0$.

Предположим, теперь, что $a \circ b = 0$ и что в кольце $\mathfrak{A}$ имеет место условие максимальности для левых идеалов $\mathfrak{Z}\overline{c}_r$. Имеем

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\overline{0}_r = \mathfrak{A}\,(\overline{a \circ b})_r = \mathfrak{A}\overline{a}_r\,\overline{b}_r.$$

Применяя лемму 3, получаем $\mathfrak{Z}\overline{b_r}=0$ и $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\overline{a_r}$. Рассуждая теперь точно так же, как и в предыдущем случае, получаем $a\circ b=$ $=b\circ a=0$.

Аналогично доказываем, что из $b\circ a=0$ следует $a\circ b=0$.

ТЕОРЕМА 2. *Элемент a кольца $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для левых идеалов $\mathfrak{A}\overline{b_r}$, где $b\in\mathfrak{A}$, будет радикальным тогда и только тогда, когда он правый полурадикальный.*

Доказательство. Если a — радикальный элемент, то, как мы уже отмечали в начале этого параграфа, a будет полурадикальным, а следовательно, — правым полурадикальным. Обратно, пусть a — правый полурадикальный. Это означает, что $\mathfrak{Z}\overline{a_r}=0$. Применяя лемму 4, получаем $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}\overline{a_r}$, т. е. a — левый радикальный и, следовательно, по теореме 1, a будет радикальным элементом.

Условие минимальности в теореме 2 нельзя заменить условием максимальности, как показывает пример кольца четных чисел. Действительно, в этом кольце каждый элемент — полурадикальный, но радикальных элементов, кроме нуля и числа 2, не существует.

Замечание 1. Теоремы 1 и 2 аналогичны тем, которые в случае обычного определения кольца имеют место для неделителей нуля и обратимых элементов [см. ([3])]. Упомянутые теоремы для неделителей нуля и обратимых элементов могут быть выведены из вышеприведенных лемм, если вместо отображения $\overline{a_r}$ рассматривать отображение a_r, определяемое равенством $xa_r=xa$.

§ 3. Определение и простейшие свойства радикальных колец

Определение 3. Кольцо $\mathfrak{A}$ называется *радикальным* [см. ([1])], если каждый его элемент является правым радикальным, т. е. если для каждого элемента $a\in\mathfrak{A}$ найдется такой элемент $a'\in\mathfrak{A}$, что $a\circ a'=0$.

Определение 3 означает, что радикальное кольцо образует группу относительно присоединенного умножения, а потому все его элементы будут также и левыми радикальными, т. е. просто радикальными. Следовательно, каждый элемент радикального кольца будет полурадикальным (см. начало § 2), и поэтому радикальное кольцо не содержит идемпотентных элементов, отличных от нуля.

Так как радикальное кольцо образует группу относительно присоединенного умножения, то уравнение $a\circ x=b$ имеет для любых $a, b\in\mathfrak{A}$ единственное решение $x=a'\circ b$.

Пример 1. Всякое нилькольцо $\mathfrak{A}$ является радикальным кольцом. Действительно, пусть $a\in\mathfrak{A}$ и $a^n=0$. Тогда нетрудно проверить, что $a'=-\sum_{i=1}^{n-1}a^i$. В самом деле,

$$a\circ a'=a-\sum_{i=1}^{n-1}a^i+a\sum_{i=1}^{n-1}a^i=-\sum_{i=2}^{n-1}a^i+\sum_{i=2}^{n-1}a^i+a^n=0.$$

Пример 2. Кольцо $\mathfrak{A}$ всех формальных степенных рядов $\sum_{i=1}^{\infty} c_i t^i$ относительно неизвестного t с коэффициентами c_i из некоторого поля — радикальное. Действительно, вложим кольцо $\mathfrak{A}$ в кольцо с единицей $\mathfrak{A}' = (1) + \mathfrak{A}$.

Заметим теперь, что во всяком кольце с единицей элемент a является правым радикальным тогда и только тогда, когда $1-a$ обладает правым обратным. В самом деле, пусть $a \circ a' = 0$. Тогда

$$1 = 1 - a \circ a' = 1 - a - a' + aa' = (1-a)(1-a').$$

Обратно, пусть $(1-a)\,x = 1$. Положив $x = 1 - a'$, имеем $(1-a)(1-a') = 1$ или $1 - a \circ a' = 1$, т. е. $a \circ a' = 0$.

Пусть, теперь, $x \in \mathfrak{A}$. Тогда элемент $1-x$ обладает, очевидно, правым обратным и, следовательно, x является правым радикальным.

Пример 3. Кольцо всех рациональных чисел вида $\frac{km}{kn+1}$, где k — фиксированное целое рациональное число, отличное от ± 1, а m и n пробегают кольцо целых чисел, — радикальное.

В самом деле, пусть $a = -\frac{km}{kn+1}$. Тогда нетрудно проверить, что $a' = \frac{km}{k(m+n)+1}$. Действительно,

$$a \circ a' = a + a' - aa' = -\frac{km}{kn+1} + \frac{km}{k(m+n)+1} + \frac{km}{kn+1} \cdot \frac{km}{k(m+n)+1} =$$
$$= \frac{km\,[-k(m+n) - 1 + (kn+1) + km]}{(kn+1)\,[k(m+n)+1]} = \frac{km(-km - kn - 1 + kn + 1 + km)}{(kn+1)\,[k(m+n)+1]} = 0.$$

Примеры 2 и 3 показывают, что не всякое радикальное кольцо есть нилькольцо. С другой стороны, не всякое подкольцо радикального кольца — радикальное. Действительно, возьмем в третьем примере подкольцо, состоящее из целых чисел, кратных k. Это кольцо не будет радикальным, так как нетрудно заметить, что в кольце целых чисел только 0 и 2 — радикальные элементы. Но, как легко показать, *в радикальном кольце любой правый (левый) идеал, а также центр Z — радикальные кольца.*

В самом деле, пусть $a \in I$, где I — правый идеал. Тогда из равенства

$$a \circ a' = a + a' - aa' = 0$$

получаем

$$a' = -a + aa' \in I.$$

Предположим теперь, что $a \in Z$. Возьмём произвольный элемент $b \in \mathfrak{A}$ и рассмотрим элемент

$$x = a' \circ b - b \circ a'.$$

Так как $a \circ b = b \circ a$, то

$$a \circ x = a \circ (a' \circ b - b \circ a') = a \circ a' \circ b - a \circ b \circ a' + a =$$
$$= 0 \circ b - b \circ a \circ a' + a = b - b + a = a.$$

Следовательно, $x = 0$, т. е. $a' \circ b = b \circ a'$ или $a'b = ba'$ и поэтому $a' \in Z$.

Если два кольца $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ гомоморфны при обычном определении кольца, то ясно, что они гомоморфны также и при определении кольца с помощью присоединенного умножения.

Нетрудно заметить, что гомоморфный образ радикального кольца будет радикальным кольцом. Действительно, если $a \circ a' = 0$, то $\bar{a} \circ \bar{a}' = \bar{0}$, где $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ — образы элементов a и a'.

Далее, имеет место следующее утверждение:

Если фактор-кольцо $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ радикальное и если двусторонний идеал $\mathfrak{B}$ — радикальное кольцо, то и $\mathfrak{A}$ будет радикальным кольцом.

Действительно, пусть $a \in \mathfrak{A}$ и $\bar{a}$ — образ элемента a в фактор-кольце $\overline{\mathfrak{A}}$.

Так как $\overline{\mathfrak{A}}$ радикальное, то существует такой элемент $\bar{x}$, что $\bar{a} \circ \bar{x} = \bar{0}$ или $a \circ x = b \in \mathfrak{B}$. Но $\mathfrak{B}$ — радикальное, поэтому найдется такой элемент b', что $b \circ b' = 0$. Подставляя в последнее равенство выражение для b, получаем

$$a \circ x \circ b' = a \circ (x \circ b') = 0,$$

т. е. каждый элемент $a \in \mathfrak{A}$ — правый радикальный.

Замечание 1. Радикальное кольцо определяется относительно присоединенного умножения аналогично тому, как тело относительно обычного умножения, с той лишь разницей, что в радикальном кольце и нуль является радикальным элементом.

Замечание 2. Кольцо $\mathfrak{A}$ с единицей будет телом тогда и только тогда, когда каждый элемент, отличный от единицы, будет левым радикальным.

Действительно, если $\mathfrak{A}$ — тело, то

$$\mathfrak{A}\bar{a}_r = \{x - xa\} = \mathfrak{A}$$

для всякого a, отличного от единицы. Следовательно, каждый элемент, отличный от единицы, будет левым радикальным (§ 2, лемма 1). Обратно, пусть $\mathfrak{A}\bar{a}_r = \mathfrak{A}$ для любого a, отличного от единицы. Имеем

$$\mathfrak{A}\bar{a}_r = \{x - xa\} = \mathfrak{A}a_1,$$

где $a_1 = 1 - a \neq 0$. Поэтому $\mathfrak{A}a_1 = \mathfrak{A}$ для любого $a_1 \neq 0$, т. е. $\mathfrak{A}$ — тело.

Как известно, имеет место следующая теорема [см. ([4]), ч. 1, стр. 61] : *если коммутативное кольцо $\mathfrak{A}$ содержит единицу и если P — идеал в $\mathfrak{A}$, то фактор-кольцо $\mathfrak{A}/P$ будет телом тогда и только тогда, когда идеал P максимальный.*

Докажем следующую аналогичную теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Если P — двусторонний идеал в произвольном кольце $\mathfrak{A}$, то фактор-кольцо $\widetilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} / P$ будет радикальным тогда и только тогда, когда идеал P взаимно прост с любым $\mathfrak{A}\bar{a}_r$, т. е. когда $(P, \mathfrak{A}\bar{a}_r) = \mathfrak{A}$ для любого $a \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $(P, \mathfrak{A}\bar{a}_r) = \mathfrak{A}$ при любом $a \in \mathfrak{A}$. Тогда существуют два таких элемента $x \in \mathfrak{A}$ и $p \in P$, что

$$-a = p + x\bar{a}_r \text{ или } -a = p + x - xa,$$

т. е. $x \circ a + p = 0$. Перейдя теперь к фактор-кольцу $\tilde{\mathfrak{A}}$, получаем $\tilde{x} \circ \tilde{a} = \tilde{0}$, т. е. кольцо $\tilde{\mathfrak{A}}$ — радикальное.

Обратно, пусть $\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} / P$ — радикальное. Тогда для любых $\tilde{a}$ и $\tilde{c}$ из $\tilde{\mathfrak{A}}$ можно найти такой элемент $\tilde{x}$, что $\tilde{x} \circ \tilde{a} = \tilde{c} + \tilde{a}$, т. е.

$$x \circ a \equiv c + a\,(P) \text{ или } x \circ a - a \equiv c\,(P)$$

и поэтому

$$x \circ a - a \equiv c\,(P,\ \mathfrak{A}\overline{a}_r).$$

Но

$$x \circ a - a \equiv 0\,(P, \mathfrak{A}\overline{a}_r),$$

так как

$$\mathfrak{A}\overline{a}_r = \{y - ya\} = \{y \circ a - a\}.$$

Следовательно, для любого $c \in \mathfrak{A}$ имеем $c \equiv 0\ (P,\ \mathfrak{A}\overline{a}_r)$, т. е.

$$(P,\ \mathfrak{A}\overline{a}_r) = \mathfrak{A}.$$

Замечание 3. Двусторонний идеал P, удовлетворяющий условию теоремы 3, всегда существует — таково, например, само кольцо $\mathfrak{A}$. Если кольцо $\mathfrak{A}$ содержит единицу, то $\mathfrak{A}$ есть единственный двусторонний идеал, удовлетворяющий условию теоремы 3, так как радикальное кольцо не может обладать единицей.

В радикальном кольце $\mathfrak{A}$ идеал P может быть произвольным, так как $\mathfrak{A}\overline{a}_r = \mathfrak{A}$ для любого $a \in \mathfrak{A}$.

Этим еще раз доказано, что всякое фактор-кольцо радикального кольца само радикально.

В некоторых частных случаях теорема 3 дает даже возможность определить, какой вид имеют идеалы P в кольце $\mathfrak{A}$, фактор-ко́льца по которым радикальны. Пусть, например, $\mathfrak{A}$ есть кольцо четных чисел, т. е. $\mathfrak{A} = (2)$ и предположим, что $P = (2m)$. Запишем условие

$$P + \mathfrak{A}\overline{a}_r = \mathfrak{A}$$

для любого $a \in \mathfrak{A}$. В данном случае получаем

$$(2m) + (2)\,\overline{2q}_r = (2),$$

где q — произвольное целое число. Следовательно, существуют два таких целых числа x и y, что

$$2mx + 2y - 2y \cdot 2q = 2 \text{ или } mx + (1 - 2q)\,y = 1.$$

Таким образом, m должно быть взаимно просто с любым нечетным числом, т. е. $m = 2^n$, где n — произвольное целое положительное число или нуль, а поэтому

$$P = (2^{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Замечание 4. Двусторонняя прямая сумма, а также полная прямая сумма радикальных колец будут радикальными кольцами. Покажем это, например, для полной прямой суммы. Напомним, что полная

прямая сумма колец $\mathfrak{A}_\alpha$ (α пробегает некоторое множество индексов M) есть кольцо

$$\mathfrak{A} = \tilde{\sum_{\alpha \in M}} \mathfrak{A}_\alpha,$$

которое определяется как совокупность всех формальных сумм $\sum_{\alpha \in M} \mathfrak{A}_\alpha$, где a_α могут быть любыми элементами из соответствующих $\mathfrak{A}_\alpha$.

Операции сложения и умножения сумм определяются по-компонентно: если

$$a = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha, \quad b = \sum_{\alpha \in M} b_\alpha,$$

где $a_\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha$, $b_\alpha \in \mathfrak{A}_\alpha$, то

$$a + b = \sum_{\alpha \in M} (a_\alpha + b_\alpha), \quad ab = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha b_\alpha.$$

Нетрудно теперь заметить, что и присоединенное умножение элементов полной прямой суммы будет производиться по-компонентно. Действительно,

$$a \circ b = a + b - ab = \sum_{\alpha \in M} (a_\alpha + b_\alpha) - \sum_{\alpha \in M} a_\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha \in M} (a_\alpha + b_\alpha - a_\alpha b_\alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha \in M} a_\alpha \circ b_\alpha.$$

Отсюда следует, что если все $\mathfrak{A}_\alpha$ — радикальные кольца, то и $\mathfrak{A}$ будет радикальным кольцом. В самом деле, пусть $a = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha$ будет произвольный элемент в $\mathfrak{A}$. Возьмем элемент

$$a' = \sum_{\alpha \in M} a'_\alpha,$$

где $a_\alpha \circ a'_\alpha = 0$. Тогда

$$a \circ a' = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha \circ a'_\alpha = 0,$$

т. е. $\mathfrak{A}$ — радикальное. В частности, полная прямая сумма нильколец, которая, вообще говоря, не есть нилькольцо, будет радикальным кольцом, в котором каждый элемент есть делитель нуля. В самом деле, пусть

$$a = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha \quad \text{и} \quad a_\alpha^{\rho_\alpha} = 0,$$

где ρ_α — индекс нильпотентности элемента a_α. Тогда, положив $b = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha^{\rho_\alpha - 1}$, имеем

$$ab = ba = \sum_{\alpha \in M} a_\alpha^{\rho_\alpha} = 0.$$

§ 4. Определения и некоторые свойства полурадикальных колец

Определение 4. Кольцо $\mathfrak{A}$ будем называть *правым полурадикальным*, если каждый его элемент является правым полурадикальным, т. е. если для любого $a \in \mathfrak{A}$ из равенства $x \circ a = x' \circ a$ следует $x = x'$.

Аналогично определяется *левое полурадикальное* кольцо.

Определение 5. Кольцо $\mathfrak{A}$ будем называть *полурадикальным*, если оно одновременно является правым и левым полурадикальным, т. е. если для любого $a \in \mathfrak{A}$ из равенств

$$x \circ a = x' \circ a, \quad a \circ y = a \circ y'$$

следует

$$x = x', \quad y = y'$$

или, что же самое, из равенств $x = xa$, $y = ay$ следует $x = 0$, $y = 0$.

Определение 5 показывает, что полурадикальное кольцо образует полугруппу относительно присоединенного умножения.

Таким образом, полурадикальное кольцо определяется относительно присоединенного умножения аналогично тому, как кольцо без делителей нуля относительно обычного умножения, с той лишь разницей, что в полурадикальном кольце и нуль является полурадикальным элементом.

Пример 1. Всякое подкольцо радикального кольца—полурадикальное.

Пример 2. *Кольцо $\mathfrak{A}$, не содержащее единицы и делителей нуля, полурадикальное.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$ не полурадикальное. Тогда существует такой элемент $x \neq 0$, что, например, $x = ax$ для некоторого $a \in \mathfrak{A}$. Умножая обе части последнего равенства слева на произвольный элемент $y \neq 0$, получаем

$$yx = yax$$

или, сокращая на x, так как $\mathfrak{A}$ без делителей нуля,

$$y = ya.$$

Поэтому a — правая единица кольца $\mathfrak{A}$. Умножая обе части последнего равенства справа на y и затем сокращая слева на y, получаем

$$y = ay.$$

Следовательно, a — левая единица. Таким образом, a является единицей, что противоречит предположению. Это доказывает, что кольцо $\mathfrak{A}$ полурадикальное.

Замечание 1. *Двусторонняя прямая сумма правых полурадикальных колец будет правым полурадикальным кольцом.*

Действительно, пусть $\mathfrak{A} = \sum \mathfrak{A}_\alpha$. Как уже было отмечено в конце предыдущего параграфа, присоединенное умножение элементов прямой суммы производится по-компонентно.

Пусть имеет место равенство

$$x \circ a = x' \circ a, \tag{1}$$

где a — произвольный элемент кольца $\mathfrak{A}$, и пусть элементы x, x' имеют следующие записи:

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i, \quad a = \sum_{i=1}^{n} a_i,$$

где $x_i, x'_i, a_i \in \mathfrak{A}_i$. Тогда равенство (1) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \circ a_i = \sum_{i=1}^{n} x'_i \circ a_i. \tag{2}$$

Ввиду однозначности записи каждого элемента кольца $\mathfrak{A}$, равенство (2) распадается на n равенств

$$x_i \circ a_i = x'_i \circ a_i,$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots$ Так как, по предположению, все $\mathfrak{A}_i$ полурадикальные, то получаем $x_i = x'_i$. Следовательно, $x = x'$.

Замечание 2. Если правое полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ содержит минимальный правый идеал I, то $I^2 = 0$. Действительно, как известно (см. ([4]), ч. II, стр. 153), минимальный правый идеал I в любом кольце или нильпотентный, причем $I^2 = 0$, или $I = e\mathfrak{A}$, где $e = e^2 \neq 0$.

Так как правое полурадикальное кольцо не содержит идемпотентных элементов, отличных от нуля, то $I^2 = 0$.

Можно доказать более общее утверждение:

Если правое полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ содержит минимальные правые идеалы I и если F обозначает сумму всех этих идеалов I, то $F\mathfrak{A} = 0$.

Действительно, предположим, что $F\mathfrak{A} \neq 0$. Тогда существует по крайней мере один такой минимальный правый идеал I, что $I\mathfrak{A} \neq 0$.

Следовательно, найдется такой элемент $b \in I$, что $b\mathfrak{A} \neq 0$. Но $b\mathfrak{A}$ — правый идеал и $b\mathfrak{A} \subseteq I$; поэтому, ввиду минимальности идеала I, $b\mathfrak{A} = I$. Таким образом, $b = ba$ для некоторого $a \in \mathfrak{A}$, а так как кольцо $\mathfrak{A}$ — правое полурадикальное, то $b = 0$. Мы получили противоречие с неравенством $b\mathfrak{A} \neq 0$. Этим доказано, что $F\mathfrak{A} = 0$.

§ 5. Полурадикальные кольца с условием минимальности

Как известно ([3]), кольцо $\mathfrak{A}$ без делителей нуля будет телом тогда и только тогда, когда в кольце $\mathfrak{A}$ удовлетворяется условие минимальности для идеалов $\mathfrak{A}a$, где $a \in \mathfrak{A}$.

Имеет место аналогичная

ТЕОРЕМА 4. *Кольцо $\mathfrak{A}$ будет радикальным тогда и только тогда, когда*

а) *$\mathfrak{A}$ — правое полурадикальное,*

б) *в кольце $\mathfrak{A}$ имеет место условие минимальности для идеалов $\mathfrak{A}\bar{a}_r$.*

Доказательство. Условия а) и б) необходимы и ни одно из них не может быть опущено. В самом деле, радикальное кольцо является в то же время и правым полурадикальным и все идеалы $\mathfrak{A}a_r$ совпадают с самим кольцом $\mathfrak{A}$ (см. § 2, лемма 1).

Кольцо четных чисел удовлетворяет условию а), но не удовлетворяет условию б) и не является радикальным.

Тело удовлетворяет условию б), но не удовлетворяет условию а), так как единица—не правый полурадикальный элемент, и тело не является радикальным кольцом.

Достаточность условий а) и б) следует из теоремы 2. Все же мы приведем непосредственное доказательство достаточности условий а) и б):

Рассмотрим убывающую цепочку идеалов

$$\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}\bar{a}_r \supseteq \mathfrak{A}\bar{a}_r^2 \supseteq \mathfrak{A}\bar{a}_r^3 \supseteq \ldots$$

или [см. § 2, формула (3)]

$$\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}\bar{a}_r \supseteq \mathfrak{A}(\overline{a^{(2)}})_r \supseteq \mathfrak{A}(\overline{a^{(3)}})_r \supseteq \ldots,$$

где

$$a^{(m)} = \overbrace{a \circ a \circ a \circ \cdots \circ a}^{m \text{ раз}}.$$

Из условия минимальности получаем

$$\mathfrak{A}(\overline{a^{(m)}})_r = \mathfrak{A}(\overline{a^{(m+1)}})_r$$

при некотором целом m. Следовательно, существует такой элемент $x \in \mathfrak{A}$, что

$$(-a)(\overline{a^{(m)}})_r = x(\overline{a^{(m+1)}})_r \text{ или } (x\bar{a}_r + a)(\overline{a^{(m)}})_r = 0,$$

т. е.

$$(x\bar{a}_r + a) \circ a^{(m)} = a^{(m)},$$

откуда, в силу правой полурадикальности кольца $\mathfrak{A}$, получаем

$$x\bar{a}_r + a = x \circ a = 0.$$

Далее, имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Правое полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для идеалов $a\mathfrak{A}$ будет нилькольцом.*

Доказательство. Рассмотрим убывающую цепочку идеалов

$$\mathfrak{A} \supseteq a\mathfrak{A} \supseteq a^2\mathfrak{A} \supseteq a^3\mathfrak{A} \supseteq \ldots,$$

где a—произвольный элемент кольца $\mathfrak{A}$. Из условия минимальности получаем

$$a^m\mathfrak{A} = a^{m+1}\mathfrak{A}$$

для некоторого целого числа. Следовательно, существует такой элемент $x \in \mathfrak{A}$, что $a^{m+1} = a^{m+1}x$, а так как $\mathfrak{A}$—правое полурадикальное кольцо, то $a^{m+1} = 0$, т. е. $\mathfrak{A}$—нилькольцо.

Комбинируя теорему 5 с известной теоремой Гопкинса [5] о том, что нилькольцо с условием минимальности для правых идеалов ниль-

потентно, получаем теорему, обобщающую результат Джэкобсона ([1]) для радикальных колец, а именно:

ТЕОРЕМА 6. *Правое полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для правых идеалов будет нильпотентным.*

Теорему 6 можно доказать непосредственно, так же как и теорему Гопкинса, методом Брауера ([6]), который, собственно говоря, использует лишь то, что кольцо $\mathfrak{A}$ — правое полурадикальное. Мы приводим это доказательство.

ЛЕММА 5. *Если $\mathfrak{B} \neq 0$ — двусторонний идеал в правом полурадикальном кольце $\mathfrak{A}$ с условием минимальности для правых идеалов, то $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}^2$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B} \neq 0$. Пусть I — *минимальный* правый идеал, удовлетворяющий условиям:

1) $I \subseteq \mathfrak{B}$,

2) $I\mathfrak{B} \neq 0$.

Правые идеалы, удовлетворяющие условиям 1) и 2), заведомо существуют, так как сам двусторонний идеал $\mathfrak{B}$ удовлетворяет этим условиям. Из условия 2 следует существование такого элемента $a \in I$, что $a\mathfrak{B} \neq 0$. Но $a\mathfrak{B}$ — правый идеал, причем $a\mathfrak{B} \subseteq I$, так как $a \in I$. Кроме того, $a\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Действительно, $a\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$, так как $\mathfrak{B}$ — двусторонний идеал и

$$(a\mathfrak{B})\,\mathfrak{B} = a\mathfrak{B}^2 = a\mathfrak{B} \neq 0.$$

Следовательно, так как I — минимальный правый идеал, удовлетворяющий условиям 1) и 2), то $a\mathfrak{B} = I$. Из последнего равенства получаем $a = ax$ для некоторого $x \in \mathfrak{B}$, а так как $\mathfrak{A}$ — правое полурадикальное кольцо, то $a = 0$.

Таким образом, мы получаем противоречие с неравенством $a\mathfrak{B} \neq 0$. Этим доказано, что $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{B}^2$.

Теперь теорема 6 доказывается без труда. Рассмотрим убывающую цепочку двусторонних идеалов:

$$\mathfrak{A} \supseteq \mathfrak{A}^2 \supseteq \mathfrak{A}^3 \supseteq \ldots$$

Из условия минимальности следует, что эта цепочка обрывается на конечном месте, т. е. $\mathfrak{A}^m = \mathfrak{A}^{m+1}$. Положив $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^m$, получим

$$\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{A}^{2m} = \mathfrak{A}^m = \mathfrak{B}.$$

Следовательно, согласно лемме 5, получаем

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^m = 0,$$

т. е. кольцо $\mathfrak{A}$ нильпотентное.

§ 6. О вложении полурадикального кольца в радикальное

Ввиду параллелизма между определениями радикального кольца и полурадикального кольца, с одной стороны, и тела и кольца без делителей нуля — с другой, естественно ожидать, что вопрос о вложении полурадикального кольца в радикальное будет решаться аналогично вопросу о вложении кольца без делителей нуля в тело. Действитель-

но, имеет место теорема, аналогичная теореме Орэ-Веддербарна [см. (7), (8)].

ТЕОРЕМА 7. *Если в полурадикальном кольце $\mathfrak{A}$ для любых двух элементов a и b можно найти такие элементы x и y, что $a \circ y = b \circ x$, то кольцо $\mathfrak{A}$ можно вложить в некоторое радикальное кольцо R. Минимальное кольцо R с этим свойством определяется однозначно с точностью до изоморфизма и любой его элемент имеет вид $a \circ b'$, где $a, b \in \mathfrak{A}$.*

Предварим доказательство теоремы двумя замечаниями:

Замечание 1. Из условия теоремы 7 легко вывести индукцией, что для любых $a_i \in \mathfrak{A}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, m$, где $m \geqslant 2$, существуют такие $x_i \in \mathfrak{A}$, что

$$a_1 \circ x_1 = a_2 \circ x_2 = \ldots = a_m \circ x_m. \tag{1}$$

В самом деле, для $m = 2$ соотношение (1) есть просто условие теоремы 7. Предположим теперь, что уже доказано существование таких $y_1, y_2, \ldots, y_{m-1}$, что

$$a_1 \circ y_1 = a_2 \circ y_2 = \ldots = a_{m-1} \circ y_{m-1}. \tag{2}$$

Из условия теоремы 7 следует, что существуют такие два элемента y_m и z_m, что

$$a_{m-1} \circ y_{m-1} \circ y_m = a_m \circ z_m.$$

Умножив (2) справа на y_m, получаем

$$a_1 \circ y_1 \circ y_m = a_2 \circ y_2 \circ y_m = \ldots = a_{m-1} \circ y_{m-1} \circ y_m = a_m \circ z_m. \tag{3}$$

Положив в (3) $x_i = y_i \circ y_m$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$ и $x_m = z_m$, получаем (1).

Замечание 2. Если в полурадикальном кольце $\mathfrak{A}$ одновременно с условием теоремы 7 имеют место равенства

$$a \circ y = b \circ x, \tag{4}$$

$$a \circ y_1 = b \circ x_1 \tag{4'}$$

и если элементы $z, z_1 \in \mathfrak{A}$ удовлетворяют равенству

$$y \circ z_1 = y_1 \circ z, \tag{5}$$

то z, z_1 удовлетворяют также равенству

$$x \circ z_1 = x_1 \circ z. \tag{5'}$$

Действительно, умножив (4) справа на z_1 и принимая во внимание (5) и (4′), получаем

$$b \circ x \circ z_1 = a \circ y \circ z_1 = a \circ y_1 \circ z = b \circ x_1 \circ z.$$

Сокращая на b, приходим к равенству (5′).

Рассмотрим теперь множество всех пар (a, b), где $a, b \in \mathfrak{A}$. Пусть (a, b) и (c, d) — две произвольные пары. Согласно условию теоремы 7, в $\mathfrak{A}$ существуют два таких элемента d_1 и b_1, что

$$b \circ d_1 = d \circ b_1. \tag{6}$$

Мы полагаем $(a, b) \sim (c, d)$, если

$$a \circ d_1 = c \circ b_1. \tag{6'}$$

Соотношение $\sim$ не зависит от частного выбора элементов d_1 и b_1. В самом деле, пусть

$$b \circ d_2 = d \circ b_2. \tag{7}$$

Выбираем в $\mathfrak{A}$ два таких элемента x_1 и x_2, что

$$d_1 \circ x_2 = d_2 \circ x_1. \tag{8}$$

Из равенств (6), (7) и (8), согласно замечанию 2, получаем

$$b_1 \circ x_2 = b_2 \circ x_1. \tag{9}$$

Умножая (8) слева на a и принимая во внимание равенства (6') и (9), получаем

$$a \circ d_2 \circ x_1 = a \circ d_1 \circ x_2 = c \circ b_1 \circ x_2 = c \circ b_2 \circ x_1.$$

Сокращая последнее равенство на x_1, имеем

$$a \circ d_2 = c \circ b_2,$$

что и требовалось доказать.

Соотношение $\sim$ обладает всеми свойствами эквивалентности:

I. $(a, a) \sim (a, a)$.

II. Из $(a, b) \sim (c, d)$ следует $(c, d) \sim (a, b)$.

III. Из $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (e, f)$ следует $(a, b) \sim (e, f)$.

Свойства I и II очевидны. Проверим свойство III.

Пусть $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (e, f)$, т. е. существуют такие элементы d_1, b_1, f_1 и d_2, что

$$b \circ d_1 = d \circ b_1, \tag{10}$$

$$a \circ d_1 = c \circ b_1, \tag{10'}$$

$$d \circ f_1 = f \circ d_2, \tag{11}$$

$$c \circ f_1 = e \circ d_2. \tag{11'}$$

Выберем теперь два таких элемента x и y, что

$$b_1 \circ x = f_1 \circ y. \tag{12}$$

Умножая (10) на x справа и принимая во внимание равенства (12) и (11), получаем

$$b \circ d_1 \circ x = d \circ b_1 \circ x = d \circ f_1 \circ y = f \circ d_2 \circ y,$$

т. е.

$$b \circ (d_1 \circ x) = f \circ (d_2 \circ y). \tag{13}$$

Аналогично, из равенств (10'), (12) и (11') получаем

$$a \circ d_1 \circ x = c \circ b_1 \circ x = c \circ f_1 \circ y = e \circ d_2 \circ y,$$

т. е.

$$a \circ (d_1 \circ x) = e \circ (d_2 \circ y). \tag{13'}$$

Равенства (13) и (13') показывают, что $(a, b) \sim (e, f)$.

Таким образом, множество всех пар (a, b) разбивается на классы эквивалентных пар. Обозначим класс, в котором лежит пара (a, b), сим-

волом $\frac{a}{b}$ и будем называть его *дробью*. Согласно этому обозначению, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $(a, b)\sim(c, d)$, следовательно, когда существуют два таких элемента d_1, b_1, что

$$b\circ d_1=d\circ b_1 \text{ и } a\circ d_1=c\circ b_1.$$

Замечание 3. Очевидно, что

$$\frac{a\circ c}{b\circ c}=\frac{a}{b} \tag{14}$$

для любого $c\in\mathfrak{A}$, так как $(a\circ c, b\circ c)\sim(a, b)$.

Сложение. Определим сложение дробей следующим образом:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\circ d_1+c\circ b_1-b\circ d_1}{b\circ d_1}, \tag{15}$$

где

$$b\circ d_1=d\circ b_1. \tag{16}$$

Сумма (15) не зависит от частного выбора d_1 и b_1. Действительно, пусть

$$b\circ d_2=d\circ b_2. \tag{17}$$

Тогда

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\circ d_2+c\circ b_2-b\circ d_2}{b\circ d_2}. \tag{18}$$

Покажем, что правые части соотношений (15) и (18) равны. Для этого выбираем элементы x_1 и x_2 в $\mathfrak{A}$ так, чтобы

$$d_1\circ x_2=d_2\circ x_1. \tag{19}$$

Из равенств (16), (17) и (19), согласно замечанию 2, получаем

$$b_1\circ x_2=b_2\circ x_1. \tag{20}$$

Далее, принимая во внимание (19), (20) и замечание 4 из § 1, имеем

$$(a\circ d_1+c\circ b_1-b\circ d_1)\circ x_2=a\circ d_1\circ x_2+c\circ b_1\circ x_2-b\circ d_1\circ x_2=$$
$$=a\circ d_2\circ x_1+c\circ b_2\circ x_1-b\circ d_2\circ x_1,$$

т. е.

$$(a\circ d_1+c\circ b_1-b\circ d_1)\circ x_2=(a\circ d_2+c\circ b_2-b\circ d_2)\circ x_1. \tag{21}$$

Соотношения (19) и (21) показывают, что правые части (15) и (18) равны.

Покажем, теперь, что сумма (15) не зависит от выбора представителей (a, b) и (c, d) классов $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. В самом деле, пусть $(c, d)\sim(c_2, d_2)$, т. е. существуют такие элементы x_1 и x_2 в $\mathfrak{A}$, что

$$d\circ x_2=d_2\circ x_1, \tag{22}$$

$$c\circ x_2=c_2\circ x_1. \tag{22'}$$

Тогда имеем

$$\frac{a}{b}+\frac{c_2}{d_2}=\frac{a\circ d_3+c_2\circ b_3-b\circ d_3}{b\circ d_3}, \tag{23}$$

где

$$b\circ d_3=d_2\circ b_3. \tag{24}$$

Чтобы сравнить правые части равенств (15) и (23), выбираем такие два элемента y_1 и y_2, что

$$d_1\circ y_2=d_3\circ y_1. \tag{25}$$

Теперь нужно доказать равенство

$$(a\circ d_1+c\circ b_1-b\circ d_1)\circ y_2=(a\circ d_3+c_2\circ b_3-b\circ d_3)\circ y_1,$$

т. е.

$$a\circ d_1\circ y_2+c\circ b_1\circ y_2-b\circ d_1\circ y_2=a\circ d_3\circ y_1+c_2\circ b_3\circ y_1-b\circ d_3\circ y_1$$

или, принимая во внимание (25), равенство

$$c\circ b_1\circ y_2=c_2\circ b_3\circ y_1. \tag{26}$$

Но нетрудно показать, что (26) есть следствие равенств (16), (25), (24), (22) и (22′). В самом деле, умножим (16) справа на y_2. Тогда, принимая во внимание (25) и (24), получаем

$$d\circ b_1\circ y_2=b\circ d_1\circ y_2=b\circ d_3\circ y_1=d_2\circ b_3\circ y_1,$$

т. е.

$$d\circ b_1\circ y_2=d_2\circ b_3\circ y_1. \tag{27}$$

Выберем теперь два таких элемента t_1 и t_2, что

$$b_1\circ y_2\circ t_1=x_2\circ t_2. \tag{28}$$

Из равенств (22), (27) и (28), согласно замечанию 2, следует

$$b_3\circ y_1\circ t_1=x_1\circ t_2. \tag{29}$$

Умножая равенство (28) на c слева и принимая во внимание (22′) и (29), получаем

$$c\circ b_1\circ y_2\circ t_1=c\circ x_2\circ t_2=c_2\circ x_1\circ t_2=c_2\circ b_3\circ y_1\circ t_1;$$

сокращая на t_1, приходим к искомому равенству (26).

Аналогичный результат получим, если в равенстве (15) заменим (a, b) через (a_2, b_3), где $(a, b)\sim(a_2, b_2)$.

Покажем теперь, что относительно сложения дроби образуют абелеву группу. Ассоциативный закон нетрудно проверить, если предположить, что данные три дроби имеют одинаковый знаменатель, что всегда можно сделать ввиду замечания 1 и равенства (14). Действительно,

$$\left(\frac{a}{m}+\frac{b}{m}\right)+\frac{c}{m}=\frac{a+b-m}{m}+\frac{c}{m}=\frac{a+b+c-2m}{m}=$$
$$=\frac{a}{m}+\frac{b+c-m}{m}=\frac{a}{m}+\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right).$$

Коммутативный закон очевиден. Нулем этой группы будет дробь $\frac{0}{0}$.

В самом деле,

$$\frac{a}{b}+\frac{0}{0}=\frac{a\circ 0+0\circ b-b\circ 0}{b\circ 0}=\frac{a+b-b}{b}=\frac{a}{b}.$$

Далее, имеем

$$-\frac{a}{b}=\frac{-a+2b}{b}. \tag{30}$$

Действительно,

$$\frac{a}{b}+\frac{-a+2b}{b}=\frac{a+(-a+2b)-b}{b}=\frac{b}{b}=\frac{0}{0}.$$

Заметим также, что

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\circ d_1-c\circ b_1+b\circ d_1}{b\circ d_1}, \tag{31}$$

где $b\circ d_1=d\circ b_1$. В самом деле,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c+2d}{d}=\frac{a\circ d_1+(-c+2d)\circ b_1-b\circ d_1}{b\circ d_1}=$$
$$=\frac{a\circ d_1+2(d\circ b_1)-c\circ b_1-b\circ d_1}{b\circ d_1}=\frac{a\circ d_1+2(b\circ d_1)-c\circ b_1-b\circ d_1}{b\circ d_1}=$$
$$=\frac{a\circ d_1-c\circ b_1+b\circ d_1}{b\circ d_1}.$$

Умножение. Определим операцию умножения следующим образом:

$$\frac{a}{b}\circ\frac{c}{d}=\frac{a\circ c_1}{d\circ b_1}, \tag{32}$$

где

$$b\circ c_1=c\circ b_1. \tag{32'}$$

Умножение, определенное равенствами (32) и (32′), не зависит от частного выбора элементов c_1 и b_1. Действительно, пусть

$$\frac{a}{b}\circ\frac{c}{d}=\frac{a\circ c_2}{d\circ b_2}, \tag{33}$$

где

$$b\circ c_2=c\circ b_2. \tag{33'}$$

Покажем, что правые части соотношений (32) и (33) равны. Для этого выбираем два таких элемента x_1 и x_2, что

$$b_1\circ x_2=b_2\circ x_1. \tag{34}$$

Умножая (32′) на x_2 справа и принимая во внимание (34) и (33′), получаем

$$b\circ c_1\circ x_2=c\circ b_1\circ x_2=c\circ b_2\circ x_1=b\circ c_2\circ x_1$$

или, сокращая на b,

$$c_1\circ x_2=c_2\circ x_1. \tag{35}$$

Соотношения (34) и (35) показывают, что правые части (32) и (33) равны.

Покажем теперь, что умножение, определенное равенствами (32) и (32′), не зависит от выбора представителей (a, b) и (c, d) классов

$\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Действительно, пусть $(c, d) \sim (c_2, d_2)$, т. е. существуют такие два элемента x_1 и x_2, что

$$d \circ x_2 = d_2 \circ x_1, \tag{36}$$

$$c \circ x_2 = c_2 \circ x_1. \tag{36'}$$

Тогда имеем

$$\frac{a}{b} \circ \frac{c_2}{d_2} = \frac{a \circ c_3}{d_2 \circ b_3}, \tag{37}$$

где

$$b \circ c_3 = c_2 \circ b_3. \tag{37'}$$

Чтобы сравнить правые части (32) и (37), выбираем два таких элемента y_1 и y_2, что

$$d \circ b_1 \circ y_2 = d_2 \circ b_3 \circ y_1. \tag{38}$$

Далее, выбираем элементы t_1 и t_2 так, чтобы

$$b_1 \circ y_2 \circ t_1 = x_2 \circ t_2. \tag{39}$$

Из равенств (36), (38) и (39), согласно замечанию 2, получаем

$$b_3 \circ y_1 \circ t_1 = x_1 \circ t_2. \tag{39'}$$

Умножая теперь (39) слева на c и принимая во внимание (36′) и (39′), имеем

$$c \circ b_1 \circ y_2 \circ t_1 = c \circ x_2 \circ t_2 = c_2 \circ x_1 \circ t_2 = c_2 \circ b_3 \circ y_1 \circ t_1.$$

Сокращая последнее равенство на t_1 и принимая во внимание (32′) и (37′), получаем

$$b \circ c_1 \circ y_2 = b \circ c_3 \circ y_1$$

или

$$c_1 \circ y_2 = c_3 \circ y_1. \tag{40}$$

Равенства (38) и (40) показывают, что правые части (32) и (37) равны.

Проверим ассоциативный закон умножения. Имеем

$$\left(\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d}\right) \circ \frac{e}{f} = \frac{a \circ c_1}{d \circ b_1} \circ \frac{e}{f} = \frac{a \circ c_1 \circ e_1}{f \circ h}, \tag{41}$$

где b_1, c_1, e_1 и h удовлетворяют равенствам

$$b \circ c_1 = c \circ b_1, \tag{41'}$$

$$d \circ b_1 \circ e_1 = e \circ h. \tag{41''}$$

Далее,

$$\frac{a}{b} \circ \left(\frac{c}{d} \circ \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \circ \frac{c \circ e_2}{f \circ d_1} = \frac{a \circ g}{f \circ d_1 \circ b_2}, \tag{42}$$

где d_1, e_2, g и b_2 удовлетворяют равенствам

$$d \circ e_2 = e \circ d_1, \tag{42'}$$

$$b \circ g = c \circ e_2 \circ b_2. \tag{42''}$$

Покажем, что правые части (41) и (42) равны. Для этого выбираем два таких элемента y_1 и y_2, что

$$h \circ y_2 = d_1 \circ b_2 \circ y_1. \tag{43}$$

Умножая (41″) справа на y_2 и учитывая (43) и (42′), получаем

$$d\circ b_1\circ e_1\circ y_2=e\circ h\circ y_2=e\circ d_1\circ b_2\circ y_1=d\circ e_2\circ b_2\circ y_1,$$

т. е.

$$b_1\circ e_1\circ y_2=e_2\circ b_2\circ y_1.$$

Умножая последнее равенство слева на c, получаем

$$c\circ b_1\circ e_1\circ y_2=c\circ e_2\circ b_2\circ y_1$$

или, принимая во внимание (41′) и (42″), имеем

$$b\circ c_1\circ e_1\circ y_2=b\circ g\circ y_1,$$

т. е.

$$c_1\circ e_1\circ y_2=g\circ y_1. \tag{44}$$

Равенства (43) и (44) показывают, что правые части (41) и (42) равны.

Операции $+$ и $\circ$ связаны между собой следующим законом:

$$\frac{a}{b}\circ\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\circ\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\circ\frac{e}{f}-\frac{a}{b}. \tag{45}$$

Принимая во внимание замечание 1 и соотношение (14), мы можем предположить, что $b=d=f=m$. Итак, достаточно показать, что

$$\frac{a}{m}\circ\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)=\frac{a}{m}\circ\frac{b}{m}+\frac{a}{m}\circ\frac{c}{m}-\frac{a}{m}. \tag{45′}$$

Имеем

$$\frac{a}{m}\circ\left(\frac{b}{m}+\frac{c}{m}\right)=\frac{a}{m}\circ\frac{b+c-m}{m}=\frac{a\circ d}{m\circ m_1}, \tag{46}$$

где

$$m\circ d=(b+c-m)\circ m_1. \tag{46′}$$

С другой стороны, обозначив правую часть равенства (45′) через S, имеем

$$S=\frac{a}{m}\circ\frac{b}{m}+\frac{a}{m}\circ\frac{c}{m}-\frac{a}{m}=\frac{a\circ b_1}{m\circ m_2}+\frac{a\circ c_1}{m\circ m_3}-\frac{a}{m},$$

где

$$m\circ b_1=b\circ m_2, \tag{47}$$

$$m\circ c_1=c\circ m_3. \tag{47′}$$

Выберем теперь два таких элемента u и v, что

$$m_2\circ v=m_3\circ u. \tag{48}$$

Тогда получаем

$$S=\frac{a\circ b_1\circ v}{m\circ m_2\circ v}+\frac{a\circ c_1\circ u}{m\circ m_3\circ u}-\frac{a\circ m_2\circ v}{m\circ m_2\circ v}=\frac{a\circ b_1\circ v+a\circ c_1\circ u-a\circ m_2\circ v}{m\circ m_2\circ v},$$

т. е.

$$S=\frac{a\circ(b_1\circ v+c_1\circ u-m_2\circ v)}{m\circ m_2\circ v}. \tag{49}$$

Нужно показать, что правые части (46) и (49) равны. Для этого выбираем два таких элемента x_1 и x_2, что

$$m_1\circ x_2=m_2\circ v\circ x_1. \tag{50}$$

Умножая (46') справа на x_2 и учитывая (50), (47), (48) и (47'), получаем

$$m \circ d \circ x_2 = (b + c - m) \circ m_1 \circ x_2 = (b + c - m) \circ m_2 \circ v \circ x_1 =$$
$$= (b \circ m_2 \circ v + c \circ m_2 \circ v - m \circ m_2 \circ v) \circ x_1 = (m \circ b_1 \circ v + c \circ m_3 \circ u -$$
$$- m \circ m_2 \circ v) \circ x_1 = (m \circ b_1 \circ v + m \circ c_1 \circ u - m \circ m_2 \circ v) \circ x_1 =$$
$$= m \circ (b_1 \circ v + c_1 \circ u - m_2 \circ v) \circ x_1,$$

т. е.

$$d \circ x_2 = (b_1 \circ v + c_1 \circ u - m_2 \circ v) \circ x_1. \tag{51}$$

Соотношения (50) и (51) показывают, что правые части (46) и (49) равны. Аналогично проверяется другая сторона дистрибутивного закона.

Из дистрибутивного закона (45) следует, что нуль абелевой группы является единицей относительно присоединенного умножения (см. § 1). Каждая дробь $\frac{a}{b}$ обладает относительно присоединенного умножения обратною дробью $\frac{b}{a}$. Действительно, $\frac{a}{b} \circ \frac{b}{a} = \frac{a \circ b_1}{a \circ b_2}$, где $b \circ b_1 = b \circ b_2$, т. е. $b_1 = b_2$. Следовательно,

$$\frac{a}{b} \circ \frac{b}{a} = \frac{a \circ b_1}{a \circ b_1} = \frac{0}{0}.$$

Таким образом, множество всех классов $\frac{a}{b}$, где $a, b \in \mathfrak{A}$, образует радикальное кольцо R. Кольцо R содержит подкольцо, состоящее из всех элементов вида $\frac{a}{0}$, которое, как легко показать, изоморфно кольцу $\mathfrak{A}$. Действительно, из $\frac{a}{0} = \frac{b}{0}$ следует, очевидно, $a = b$.

Далее, имеем

$$\frac{a}{0} + \frac{b}{0} = \frac{a + b - 0}{0} = \frac{a + b}{0},$$

$$\frac{a}{0} \circ \frac{b}{0} = \frac{a \circ b_1}{0 \circ 0_1},$$

где $0 \circ b_1 = b \circ 0_1$, т. е. $b_1 = b \circ 0_1$. Поэтому

$$\frac{a}{0} \circ \frac{b}{0} = \frac{a \circ b \circ 0_1}{0 \circ 0_1} = \frac{a \circ b}{0}.$$

Мы отождествляем кольцо дробей $\frac{a}{0}$ с кольцом $\mathfrak{A}$ и будем писать a вместо $\frac{a}{0}$. Тогда каждый элемент $a \in \mathfrak{A}$ имеет в R (относительно присоединенного умножения) обратный элемент $a' = \frac{0}{a}$. Всякий элемент $\frac{a}{b}$ из R может быть теперь записан следующим образом:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{0} \circ \frac{0}{b} = a \circ b'.$$

Построенное кольцо R мы будем называть (правым) *радикальным кольцом отношений* полурадикального кольца $\mathfrak{A}$. Очевидно, что ради-

кальное кольцо отношений R с точностью до изоморфизма однозначно определяется полурадикальным кольцом $\mathfrak{A}$.

Покажем, теперь, что радикальное кольцо отношений данного полурадикального кольца $\mathfrak{A}$ с условием теоремы 7 является единственным минимальным радикальным кольцом, содержащим кольцо $\mathfrak{A}$.

Доказательство. Если полурадикальное кольцо, удовлетворяющее условию теоремы 7, содержится в некотором радикальном кольце Ω, то можно в Ω из элементов $\mathfrak{A}$ составить дроби

$$\frac{a}{b} = a \circ b',$$

где $b \circ b' = 0$.

Для этих дробей имеют место законы:

I. $\frac{a}{b} = \frac{a}{d}$ тогда и только тогда, когда существуют два таких элемента $d_1, b_1 \in \mathfrak{A}$, что

$$b \circ d_1 = d \circ b_1, \quad a \circ d_1 = c \circ b_1.$$

Действительно, пусть $a \circ b' = c \circ d'$, т. е. $a = c \circ d' \circ b$. В силу условия теоремы 7, существуют два таких элемента $d_1, b_1 \in \mathfrak{A}$, что $b \circ d_1 = d \circ b_1$. Теперь имеем

$$a \circ d_1 = c \circ d' \circ b \circ d_1 = c \circ d' \circ d \circ b_1 = c \circ b_1.$$

Обратно, пусть $b \circ d_1 = d \circ b_1$ и $a \circ d_1 = c \circ b_1$, т. е. $a = c \circ b_1 \circ d_1'$. Имеем

$$a \circ b' = c \circ b_1 \circ d_1' \circ b' = c \circ d' \circ b \circ b' = c \circ d'.$$

II. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \circ d_1 + c \circ b_1 - b \circ d_1}{b \circ d_1}$, где $b \circ d_1 = d \circ b_1$.

Действительно, умножая обе части равенства II на $b \circ d_1'$, получаем

$$a \circ d_1 + c \circ b_1 - b \circ d_1 = (a \circ b' + c \circ d') \circ b \circ d_1 = a \circ b' \circ b \circ d_1 + c \circ d' \circ b \circ d_1 - \\ - b \circ d_1 = a \circ d_1 + c \circ d' \circ d \circ b_1 - b \circ d_1 = a \circ d_1 + c \circ b_1 - b \circ d_1.$$

Последнее соотношение доказывает справедливость закона II, так как, в силу радикальности кольца Ω, из $x \circ b \circ d_1 = y \circ b \circ d_1$ следует $x = y$.

III. $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c_1}{d \circ b_1}$, где $b \circ c_1 = c \circ b_1$.

В самом деле, умножая обе части равенства III на $d \circ b_1$, получаем

$$a \circ c_1 = a \circ b' \circ c \circ d' \circ d \circ b_1 = a \circ b' \circ c \circ b_1 = a \circ b' \circ b \circ c_1 = a \circ c_1,$$

откуда, как и в предыдущем случае, следует справедливость закона III.

Дроби вида $\frac{a}{b}$ образуют, очевидно, радикальное кольцо отношений кольца $\mathfrak{A}$. Таким образом, всякое радикальное кольцо Ω, содержащее полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ с условием теоремы 7, содержит также и его радикальное кольцо отношений, что и требовалось доказать.

На этом доказательство теоремы 7 заканчивается. Имеет место и обратное предложение, а именно:

Если полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ может быть вложено в правое радикальное кольцо отношений R, т. е. в такое кольцо R, в котором каждый элемент имеет вид $a \circ b'$, где $a, b \in \mathfrak{A}$, то в $\mathfrak{A}$ выполняется условие теоремы 7.

Действительно, пусть b — произвольный элемент кольца $\mathfrak{A}$. Тогда $b' \in R$ и, следовательно, $b' \circ a \in R$ для произвольного $a \in \mathfrak{A}$. Согласно условию нашего предложения, существуют такие два элемента $a_1, b_1 \in \mathfrak{A}$, что $b' \circ a = a_1 \circ b'_1$. Из последнего равенства получаем $a \circ b_1 = b \circ a_1$, т. е. условие теоремы 7.

Замечание 4. Из теоремы 7 вытекает, в частности, что всякое коммутативное полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ может быть вложено в радикальное кольцо отношений, ибо $a \circ b = b \circ a$ для любых $a, b \in \mathfrak{A}$.

В этом случае из определения равенства, сложения и умножения дробей получаем следующие правила:

1. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ тогда и только тогда, когда $a \circ d = c \circ b$;
2. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \circ d + c \circ b - b \circ d}{b \circ d}$;
3. $\frac{a}{b} \circ \frac{c}{d} = \frac{a \circ c}{b \circ d}$.

Далее,

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a + 2b}{b},$$

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \circ d - c \circ b + b \circ d}{b \circ d}.$$

Пример вложения коммутативного полурадикального кольца в радикальное кольцо отношений.

Рассмотрим кольцо чисел, кратных некоторому целому рациональному числу $k \neq \pm 1$. Это кольцо полурадикальное, так как оно без делителей нуля и не содержит единицы (см. § 4, пример 2). Каждое число kq, где q — произвольное целое число, быть может, нуль, имеет в поле рациональных чисел обратный элемент относительно присоединенного умножения (см. § 3, замечание 2), который находится из уравнения

$$kq + x - kqx = 0.$$

Следовательно,

$$x = (kq)' = -\frac{kq}{1 - kq}.$$

Рассмотрим теперь дробь

$$\frac{kp}{kq} = (kp) \circ (kq)' = kp - \frac{kq}{1 - kq} + \frac{k^2 pq}{1 - kq} = \frac{k(p - q)}{1 - kq},$$

где p — произвольное целое число. Но когда p и q пробегают все кольца целых чисел, то последняя дробь пробегает кольцо $\left\{\frac{km}{kn + 1}\right\}$, которое будет радикальным (см. также § 3, пример 3).

Замечание 5. Если в полурадикальном кольце $\mathfrak{A}$ условие теоремы 7 не выполняется, то, вообще говоря, такое кольцо нельзя вложить в радикальное. В следующем параграфе мы строим соответствующий пример аналогично тому, как А. И. Мальцев ([9]) построил пример кольца без делителей нуля, которое не может быть вложено в тело.

§ 7. Пример полурадикального кольца, не вкладываемого в радикальное

Напомним, сначала, в нескольких словах, как А. И. Мальцев ([9]) строит полугруппу, которая не может быть вложена в группу, и кольцо без делителей нуля, которое не может быть вложено в тело.

Рассматриваются всевозможные слова, составленные из букв a, b, c, d, x, y, u, v. Слова

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} ax \quad \text{и} \quad by \\ cx \quad \text{и} \quad dy \\ au \quad \text{и} \quad bv \end{cases}$$

называются *соответственными*.

Под произведением двух слов α и β понимается слово $\alpha\beta$, которое получается, если напишем сначала слово α, а за ним слово β.

Предположим, что в некотором слове α встречается одна из пар, входящих в (P). Если мы заменим эту пару соответственной, то получим другое слово β. Мы будем говорить, что β получается из α элементарным преобразованием.

Далее, будем говорить, что слово ν *эквивалентно* слову α и писать $\alpha \sim \nu$, если ν получается из α конечным числом элементарных преобразований. Условие $\sim$ разбивает все слова на классы эквивалентных слов.

Произведение AB двух классов A и B определяется как класс C, содержащий слово $\alpha\beta$, где $\alpha \in A$, $\beta \in B$. Как показал Мальцев, эти классы образуют относительно умножения полугруппу H, которая не вкладывается в группу.

Кольцо без делителей нуля, которое не вкладывается в тело, строится следующим образом: рассматривается кольцо всех линейных форм $\sum\limits_i k_i X_i$, где X_i — элементы полугруппы H, а k_i — рациональные числа, причем только конечное число k_i не равно нулю. Сумма и произведение этих форм определяются как обычно.

Для дальнейшего отметим, что в процессе доказательства Мальцев доказал следующее утверждение:

$$(\mathrm{S}) \qquad \text{если } \sum k_i l_j X_i X_j = 0, \text{ то или все } k_i = 0, \text{ или все } l_j = 0.$$

Переходим теперь к построению полурадикального кольца, не вкладываемого в радикальное. Для этого обозначим умножение в полугруппе H через $\circ$ и рассмотрим совокупность линейных форм $\sum\limits_i l_i X_i$,

где X_i — элементы полугруппы H, и l_i — целые числа, причем только конечное число l_i не равно нулю.

Сумму двух таких форм U и V определяем обычным образом, т. е.

$$U+V=\sum_i l_iX_i+\sum_i m_iX_i=\sum_i (l_i+m_i)\,X_i.$$

Произведение линейных форм определяем следующим образом:

$$U\circ V=\sum_i l_iX_i\circ \sum_j m_jX_j=\sum_{i,j} l_im_j\,(X_i\circ X_j)+\mu U+\lambda V, \tag{1}$$

где

$$\mu=-\sum m_j+1,\quad \lambda=-\sum l_i+1.$$

Покажем, что совокупность этих форм образует кольцо. Для этого проверим постулаты определения 1′. Рассмотрим три линейных формы:

$$U=\sum_i l_iX_i,\quad V=\sum_j m_jX_j,\quad W=\sum_k n_kX_k.$$

Введем обозначения:

$$\lambda=-\sum_i l_i+1,\quad \mu=-\sum_j m_j+1,\quad \nu=-\sum_k n_k+1.$$

Имеем

$$U\circ(V+W)=\sum_i l_iX_i\circ\Big(\sum_j m_jX_j+\sum_k n_kX_k\Big)=\sum_{i,j} l_im_j\,(X_i\circ X_j)+$$

$$+\sum_{i,k} l_in_k\,(X_i\circ X_k)+\Big[-\Big(\sum_j m_j+\sum_k n_k\Big)+1\Big]\,U+\lambda\,(U+W)=$$

$$=\sum_{i,j} l_im_j\,(X_i\circ X_j)+\sum_{i,k} l_in_k\,(X_i\circ X_k)+(\mu+\nu-1)\,U+\lambda\,(V+W)=$$

$$=\sum_{i,j} l_im_j\,(X_i\circ X_j)+\mu U+\lambda V+\sum_{i,k} l_in_k\,(X_i\circ X_k)+\nu U+\lambda W-U,$$

$$U\circ(V+W)=U\circ V+U\circ W-U.$$

Аналогично,

$$(V+W)\circ U=V\circ U+W\circ U-U.$$

Проверим, теперь, ассоциативный закон. Согласно (1), получаем

$$(U\circ V)\circ W=\Big[\sum_{i,j} l_im_j\,(X_i\circ X_j)+\mu U+\lambda V\Big]\circ W=$$

$$=\sum_{i,j,k} l_im_jn_k\,(X_i\circ X_j\circ X_k)+\mu\sum_{i,k} l_in_k\,(X_i\circ X_k)+\lambda\sum_{j,k} m_jn_k\,(X_j\circ X_k)+$$

$$+\Big[\sum_{i,j} l_im_j\,(X_i\circ X_j)+\mu U+\lambda V\Big]+\Big(-\sum_{i,j} l_im_j-\mu\sum_i l_i-\lambda\sum_j m_j+1\Big)W.$$

Вычислим коэффициент при W, подставляя значения μ и λ. Имеем

$$-\sum_{i,j} l_i m_j - \Big(-\sum_j m_j + 1\Big)\sum_i l_i - \Big(-\sum_i l_i + 1\Big)\sum_j m_j + 1 =$$
$$= \sum_{i,j} l_i m_j - \sum_i l_i - \sum_j m_j + 1 = \Big(1 - \sum_i l_i\Big)\Big(1 - \sum_j m_j\Big) = \lambda\mu.$$

Подставляя теперь вычисленное значение коэффициента при W в предыдущее выражение, получаем, окончательно,

$$(U \circ V) \circ W = \sum_{i,j,k} l_i m_j n_k (X_i \circ X_j \circ X_k) + \nu \sum_{i,j} l_i m_j (X_i \circ X_j) +$$
$$+ \lambda \sum_{j,k} m_j n_k (X_j \circ X_k) + \mu \sum_{i,k} l_i n_k (X_i \circ X_k) + \mu\nu U + \nu\lambda V + \lambda\mu W.$$

Из симметричности последнего выражения вытекает справедливость ассоциативного закона.

Покажем, что построенное кольцо полурадикальное, т. е. что равенства $U \circ V = U$ и $V \circ U = U$ возможны только при $V = 0$. Допустим противное. Пусть

$$U \circ V = U \text{ и } V \neq 0, \tag{2}$$

причем можно предположить, что все коэффициенты линейной формы V отличны от нуля. Записывая (2) в развернутом виде, согласно (1), получаем

$$\sum l_i m_j (X_i \circ X_j) + \mu U + \lambda V = U,$$

т. е.

$$\sum l_i m_j (X_i \circ X_j) + (\mu - 1) U + \lambda V = 0. \tag{3}$$

Сумма самых длинных слагаемых в левой части равенства (3) равна нулю, так как они не могут сократиться в комбинации с более короткими слагаемыми. Но слагаемые наибольшей длины в левой части соотношения (3) получаются из умножения самых длинных слагаемых формы U на самые длинные слагаемые формы V. Следовательно, если мы удалим из U и V все слагаемые, кроме самых длинных, то соотношение (3) остается справедливым, т. е. мы с самого начала можем предположить, что все слагаемые формы U, а также все слагаемые формы V, имеют одинаковую длину. Но тогда из соотношения (3) следует, что

$$\sum_{i,j} l_i m_j (X_i \circ X_j) = 0,$$

откуда на основании утверждения (S) и предположения, что все $m_j \neq 0$, получаем $l_i = 0$.

Таким образом, $U = 0$, а тогда из равенства (2) получаем $V = 0$, т. е. противоречие.

Аналогично можно показать, что из $V \circ U = U$ следует $V = 0$.

Итак, построенное кольцо будет полурадикальным. Однако оно не может быть вложено в радикальное кольцо, ибо тогда полугруппа Мальцева H оказалась бы вложенной в мультипликативную группу радикального кольца.

§ 8. Присоединенные идеалы в коммутативных кольцах

В этом параграфе, а также и во всех следующих, мы будем рассматривать только коммутативные кольца.

Определение 6. Непустое подмножество I кольца $\mathfrak{A}$ будем называть *присоединенным идеалом*, если:

1. Из $a \in I$ следует $r \circ a \in I$ для любого $r \in \mathfrak{A}$.

2. Из $a_1, a_2, \ldots, a_m \in I$ следует $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i \in I$, где α_i — целые рациональные числа, удовлетворяющие равенству $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$.

Нетрудно заметить, что условие 2 равносильно следующему:

2′. Если $a_1, a_2, a_3 \in I$, то $a_i - a_j + a_k \in I$, где i, j, k независимо принимают значения 1, 2, 3.

Действительно, условие 2′ есть, очевидно, следствие условия 2. Обратно, пусть имеет место условие 2′. Из формулировки условия 2 следует, что $\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|$ есть нечетное число, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| = 2q + 1,$$

причем q членов имеют знак минус, а $q+1$ членов имеют знак плюс.

Если $q = 1$, то условие 2 превращается в условие 2′. Пусть, теперь, условие 2 выполняется для случая $2q - 1$. Тогда, вводя новую нумерацию слагаемых, в том числе и повторяющихся, получаем

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots - a_{2q} + a_{2q+1} = a_1 - (a_2 - a_3 + \ldots + a_{2q}) + a_{2q+1} \in I,$$

так как по индуктивному предположению элемент, стоящий в скобках, принадлежит I.

Значение присоединенных идеалов выясняется следующей теоремой, аналогичной соответствующей теореме для обычных идеалов:

ТЕОРЕМА 8. *При любом гомоморфном отображении кольца $\mathfrak{A}$ на кольцо с единицей совокупность элементов кольца $\mathfrak{A}$, отображающихся в единицу, будет присоединенным идеалом кольца $\mathfrak{A}$. Обратно, для всякого присоединенного идеала I кольца $\mathfrak{A}$ можно указать такое гомоморфное отображение кольца $\mathfrak{A}$ на кольцо с единицей, при котором в единицу отображаются элементы из I и только они.*

Доказательство. Пусть кольцо $\mathfrak{A}$ гомоморфно отображается на кольцо с единицей $\mathfrak{A}'$. Обозначим через I совокупность элементов

кольца $\mathfrak{A}$, отображающихся в единицу $1'$ кольца $\mathfrak{A}'$. Тогда из $a \in I$, $r \in \mathfrak{A}$ следует

$$r \circ a = r + a - ra \to r' + 1' - r' = 1',$$

а из $a, b, c \in I$ вытекает

$$a - b + c \to 1' - 1' + 1' = 1'.$$

Этим доказано, что I будет присоединенным идеалом в $\mathfrak{A}$.

Пусть теперь, обратно, I будет произвольным присоединенным идеалом кольца $\mathfrak{A}$.

Обозначим через I^* совокупность всевозможных разностей вида $a - b$, где $a, b \in I$. Эта совокупность будет идеалом кольца $\mathfrak{A}$ в обычном смысле. Действительно, если $a, b, c, d \in I$, т. е. $a - b \in I^*$, $c - d \in I^*$, то

$$(a - b) - (c - d) = (a - b + d) - c \in I^*.$$

С другой стороны, если $a, b \in I$, $r \in \mathfrak{A}$, то

$$r(a - b) = ra - rb = r + a - r \circ a - r - b + r \circ b = (a - r \circ a + r \circ b) - b \in I^*.$$

Присоединенный идеал I будет смежным классом по идеалу I^*. Действительно, по определению, разность любых двух элементов из I принадлежит к I^*. С другой стороны, если $a, b \in I$, т. е. $a - b \in I^*$, а также $c \in I$, то $(a - b) + c \in I$.

Рассмотрим теперь фактор-кольцо $\mathfrak{A}/I^*$ и докажем, что смежный класс I служит единицей этого кольца. Действительно, если $a \in I$, то $I = I^* + a$. Если, теперь, r — произвольный элемент кольца $\mathfrak{A}$, то

$$I(I^* + r) = (I^* + a)(I^* + r) = I^* + ar.$$

Однако, ввиду $a \circ r \in I$,

$$ar - r = a + r - a \circ r - r = a - a \circ r \in I^*$$

т. е. $ar \equiv r\ (I^*)$, откуда

$$I(I^* + r) = I^* + r.$$

Этим теорема доказана.

Примером присоединенного идеала служит единичный идеал, т. е. само кольцо $\mathfrak{A}$.

Рассмотрим присоединенный идеал, порожденный множеством элементов M, т. е. пересечение всех присоединенных идеалов кольца $\mathfrak{A}$, содержащих все элементы множества M. Этот присоединенный идеал будет состоять из всех конечных сумм

$$\sum_i \alpha_i (a_i \circ r_i),$$

где $a_i \in M$, $r_i \in \mathfrak{A}$, а α_i — целые числа, причем $\sum_i \alpha_i = 1$.

Действительно, согласно замечанию 4 первого параграфа, имеем

$$r \circ \Big[\sum_i \alpha_i (a_i \circ r_i)\Big] = \sum_i \alpha_i (a_i \circ r_i \circ r) = \sum_i \alpha_i (a_i \circ r'_i),$$

где $r'_i = r_i \circ r$.

Рассмотрим, с другой стороны, сумму $\sum_i \lambda_i x_i$, где

$$\sum_i \lambda_i = 1, \quad x_i = \sum_i \alpha_{ij} (a_{ij} \circ r_j),$$

причем $a_{ij} \in M$, $r_j \in \mathfrak{A}$, а α_{ij} — целые числа, удовлетворяющие условию $\sum_i \alpha_{ij} = 1$. Имеем

$$\sum_i \lambda_i x_i = \sum_i \lambda_i \sum_i \alpha_{ij} (a_{ij} \circ r_j) = \sum_i \sum_j \lambda_i \alpha_{ij} (a_{ij} \circ r_j),$$

причем

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \alpha_{ij} = \sum_i \lambda_i \Big(\sum_j \alpha_{ij}\Big) = \sum_i \lambda_i = 1.$$

В частности, присоединенный идеал, порожденный одним элементом a, будет состоять из всех элементов вида $r \circ a$, где r пробегает кольцо $\mathfrak{A}$. Действительно, согласно замечанию 4 первого параграфа,

$$\sum \alpha_i (a \circ r_i) = \Big(\sum \alpha_i r_i\Big) \circ a = r \circ a,$$

где $r = \sum \alpha_i r_i$.

Присоединенный идеал, порожденный одним элементом a, будем называть *главным присоединенным идеалом* и обозначать через $\mathfrak{A} \circ a$.

Единичный присоединенный идеал всегда является главным, а именно $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \circ 0$.

Суммой $A + B$ двух присоединенных идеалов A и B будем называть присоединенный идеал, порожденный объединением множеств A и B. Очевидно, сумма $A + B$ состоит из всех элементов вида

$$\sum_i \alpha_i a_i + \sum_j \beta_j b_j,$$

где $a_i \in A$, $b_j \in B$, а целые числа α_i, β_j связаны равенством

$$\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1.$$

Произведением $A \circ B$ двух присоединенных идеалов A и B будем называть присоединенный идеал, порожденный всеми произведениями $a \circ b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Легко заметить, что произведение $A \circ B$ есть совокупность конечных сумм $\sum_i \lambda_i (a_i \circ b_i)$, где $a_i \in A$, $b_i \in B$, $\sum \lambda_i = 1$. Ясно, что

$$A \circ B = B \circ A,$$
$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C.$$

Если присоединенные идеалы A и B имеют конечный базис, т. е. если

$$A = \mathfrak{A} \circ a_1 + \mathfrak{A} \circ a_2 + \ldots + \mathfrak{A} \circ a_m, \quad B = \mathfrak{A} \circ b_1 + \mathfrak{A} \circ b_2 + \ldots + \mathfrak{A} \circ b_n,$$

то ясно, что произведение $A \circ B$ порождается произведениями $a_i \circ b_k$. Следовательно, базис произведения получается умножением всех элементов базиса одного сомножителя на все элементы базиса другого.

В частности, для главных присоединенных идеалов имеем

$$(\mathfrak{A} \circ a) \circ (\mathfrak{A} \circ b) = \mathfrak{A} \circ (a \circ b).$$

Далее, имеет место дистрибутивный закон для присоединенных идеалов:

$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C.$$

Действительно, $A \circ (B + C)$ порождается произведениями

$$a \circ \left(\sum_i \beta_i b_i + \sum_j \gamma_j c_j \right),$$

где $a \in A$, $b_j \in B$, $c_i \in C$ и

$$\sum_i \beta_i + \sum_j \gamma_j = 1.$$

Но

$$a \circ \left(\sum_i \beta_i b_i + \sum_j \gamma_j c_j \right) = \sum_i \beta_i (a \circ b_i) + \sum_j \gamma_j (a \circ c_j) \subseteq A \circ B + A \circ C.$$

С другой стороны, $A \circ B + A \circ C$ порождается произведениями $a \circ b$ $a \circ c$, которые лежат в $A \circ (B + C)$.

Совершенно так же, как и в случае идеалов, можно доказать, что условие максимальности для присоединенных идеалов, постулат о цепях делителей (B — делитель A, если $A \subseteq B$) и теорема о базисе равносильны, причем мы будем говорить, что *в кольце $\mathfrak{A}$ справедлива теорема о базисе присоединенных идеалов, если любой присоединенный идеал обладает конечным базисом.*

§ 9. Кольцо главных присоединенных идеалов

Определение 7. Полурадикальное коммутативное кольцо $\mathfrak{A}$, в котором всякий присоединенный идеал является главным, будем называть *кольцом главных присоединенных идеалов.*

Нетрудно заметить, что радикальное кольцо является кольцом главных присоединенных идеалов. Действительно, если I — произвольный идеал радикального кольца, то он содержит вместе с элементом a также $a' \circ a = 0$.

Следовательно, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A} \circ 0$ *будет единственным присоединенным идеалом в радикальном кольце.*

ТЕОРЕМА 9. *Кольцо E четных чисел является кольцом главных присоединенных идеалов.*

Доказательство. Кольцо E будет полурадикальным (см. § 4, пример 2). Пусть I — некоторый присоединенный идеал в кольце E. Если $I = E$, то I — главный присоединенный идеал, так как $E = E \circ 0 = E \circ 2$, ввиду $E \circ 2 \ni 2 \circ 2 = 0$. Предположим, следовательно, что $I \neq E$.

Если $a \in I$, то

$$a \circ 2 = a + 2 - 2a = 2 - a \in I$$

и одно из этих двух чисел положительно. Пусть *a — наименьшее положительное число*, входящее в присоединенный идеал I.

Если b — произвольный элемент идеала I, то

$$b = (2n) \circ a + r, \tag{1}$$

где целое число n можно выбрать так, чтобы

$$0 \leqslant r < 2a - 2. \tag{2}$$

Действительно, давая n значения

$$\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots,$$

мы получаем для произведения $(2n) \circ a$ значения

$$\ldots, a + n(2a-2), \ldots, a + 2(2a-2), \; a + (2a-2), a, a - (2a-2), \ldots$$
$$\ldots, a - n(2a-2), \ldots$$

Заметим теперь, что при выборе r в соответствии с (2) будет $r \neq a$. В самом деле, пусть $r = a$. Тогда из равенства (1) получаем

$$b = (2n) \circ a + a \quad \text{или} \quad 0 = (2n) \circ a + a - b \in I,$$

так как элементы $(2n) \circ a$, a, b принадлежат присоединенному идеалу I и сумма их коэффициентов в последнем равенстве равна единице. Следовательно, $I = E$ вопреки предположению.

Разобьем теперь полуинтервал $[0, 2a-2)$, в котором заключается r, на две части: $[0, a)$ и $(a, 2a-2)$ и предположим сначала, что $0 \leqslant r < a$. Тогда можно написать $r = a - q$, где $0 < q \leqslant a$. Подставляя это в (1), получаем

$$b = (2n) \circ a + a - q,$$

откуда

$$q = (2n) \circ a + a - b \in I.$$

Так как $0 < q \leqslant a$ и a — наименьшее положительное число, содержащееся в I, то из последнего равенства следует $q = a$, т. е. $r = 0$, и поэтому $b = (2n) \circ a$.

Допустим теперь, что $a < r < 2a - 2$. Тогда можно написать $r = a + s$, где

$$0 < s < a - 2. \tag{3}$$

Подставляя это в (1), получаем

$$b = (2n) \circ a + a + s,$$

откуда

$$-s = (2n) \circ a + a - b \in I.$$

Следовательно, и $(-s) \circ 2 \in I$, т. е. $2 + s \in I$.

С другой стороны, из (3) получаем $2 < s + 2 < a$ и поэтому $s + 2 \notin I$. Это противоречие показывает, что предположение $a < r < 2a - 2$ не может иметь места и, следовательно, $b = (2n) \circ a$ для любого $b \in I$, т. е. $I = E \circ a$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. В кольце главных присоединенных идеалов сумма двух главных присоединенных идеалов $\mathfrak{A} \circ a$ и $\mathfrak{A} \circ b$ также является главным присоединенным идеалом $\mathfrak{A} \circ d$.

Условие

$$\mathfrak{A} \circ a + \mathfrak{A} \circ b = \mathfrak{A} \circ d \tag{4}$$

равносильно следующим трем:

$$\left.\begin{aligned} & d = \sum_i \alpha_i (r_i \circ a) + \sum_j \beta_j (s_j \circ b), \quad \text{где} \quad \sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1, \\ & a = c \circ d, \\ & b = e \circ d. \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

Следовательно, в кольце главных присоединенных идеалов всякие два элемента a, b обладают наибольшим делителем d, т. е. таким элементом d, который удовлетворяет условиям (4′).

§ 10. Делимость элементов. Разложение на множители

В этом параграфе, а также и в следующем, мы будем применять термины: делимость, разложение на множители и произведение не в их обычном смысле, а в смысле присоединенного умножения.

Мы будем говорить, что элемент a *делится на* b или, что b — *делитель* a, если $a = b \circ c$.

Далее, будем говорить, что присоединенный идеал A делится на присоединенный идеал B или, что B есть делитель A, если $A \subseteq B$. Последнее соотношение мы будем часто записывать в виде $A \equiv 0\,(B)$.

Для главных присоединенных идеалов условие

$$\mathfrak{A} \circ a \equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ b)$$

эквивалентно равенству $a = r \circ b$, а поэтому делимость главных присоединенных идеалов равносильна делимости элементов.

Замечание 1. В полурадикальном кольце $\mathfrak{A}$ равенство $\mathfrak{A} \circ a = \mathfrak{A} \circ b$ имеет место тогда и только тогда, когда $a = b \circ \rho$, где ρ — радикальный элемент.

Действительно, предположим, что $a = b \circ \rho$. Тогда

$$\mathfrak{A} \circ a = \mathfrak{A} \circ (b \circ \rho) = (\mathfrak{A} \circ \rho) \circ b.$$

Но $\mathfrak{A} \circ \rho = \mathfrak{A}$, так как $\rho' \circ \rho = 0 \in \mathfrak{A} \circ \rho$. Поэтому $\mathfrak{A} \circ a = \mathfrak{A} \circ b$.

Пусть, теперь, имеет место равенство $\mathfrak{A} \circ a = \mathfrak{A} \circ b$. Тогда $a = b \circ x$, и $b = a \circ y$, откуда $a = a \circ y \circ x$. Так как кольцо $\mathfrak{A}$ полурадикальное, то из последнего равенства вытекает $x \circ y = 0$, т. е. x — радикальный элемент.

Всякий элемент a некоторого кольца $\mathfrak{A}$ допускает разложение $a = (a \circ \rho') \circ \rho$, где ρ — радикальный элемент.

Такое разложение, при котором один из сомножителей радикален, будем называть *тривиальным разложением*.

Элемент p, отличный от радикального, допускающий только тривиальные разложения, будем называть *неразложимым* или *простым* элементом. Следовательно, если p — неразложимый элемент, то из $p = a \circ b$ следует, что a или b — радикальный элемент.

Если в полурадикальном кольце $\mathfrak{A}$ имеет место разложение $a = c \circ d$ и элемент d — не радикальный, то будем говорить, что c — *собственный делитель* элемента a. В этом случае элемент a не будет делителем c, а потому присоединенный идеал $\mathfrak{A} \circ c$ будет собственным делителем идеала $\mathfrak{A} \circ a$, т. е. $\mathfrak{A} \circ a \sqsubset \mathfrak{A} \circ c$.

Таким образом, неразложимый элемент в полурадикальном кольце можно также определить как элмент, имеющий собственными делителями только радикальные элементы.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности и однозначности разложения на множители в различных полурадикальных кольцах. Введем сначала следующее понятие.

Определение 8. Присоединенный идеал P будем называть *простым*, если из $a \circ b \equiv 0\,(P)$, $a \not\equiv 0\,(P)$ следует $b \equiv 0\,(P)$.

Докажем теперь несколько лемм.

ЛЕММА 6. *В кольце главных присоединенных идеалов простой элемент порождает простой присоединенный идеал, свободный от делителей.*

Доказательство. Если p — простой элемент, то p имеет собственными делителями только радикальные элементы. Следовательно, так как всякий присоединенный идеал является главным, то присоединенный идеал $\mathfrak{A} \circ p$ имеет собственным делителем только единичный идеал, т. е. само $\mathfrak{A}$.

Покажем, что присоединенный идеал $\mathfrak{A} \circ p$ простой. В самом деле, пусть

$$a \circ b \equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ p) \qquad (1)$$

и $a \not\equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ p)$. Из сравнения (1) получаем

$$a \circ b = x \circ p \tag{2}$$

для некоторого $x \in \mathfrak{A}$. Далее, имеем

$$\mathfrak{A} \circ a + \mathfrak{A} \circ p = \mathfrak{A},$$

откуда

$$0 = \sum_i \alpha_i (r_i \circ a) + \sum_j \beta_j (s_j \circ p), \tag{3}$$

где $\sum_i \alpha_i + \sum_j \beta_j = 1$. Умножая обе части последнего равенства на b, получаем

$$b = \sum_i \alpha_i (r_i \circ a \circ b) + \sum_j \beta_j (s_j \circ p \circ b)$$

или, принимая во внимание (2),

$$b = \sum_i \alpha_i (r_i \circ x \circ p) + \sum_j \beta_j (s_j \circ p \circ b) = p \circ \Big[\sum_i \alpha_i (r_i \circ x) + \sum_j \beta_j (s_j \circ b) \Big],$$

т. е. $b \equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ p)$.

Свойство простого элемента p порождать простой присоединенный идеал можно сформулировать также следующим образом: если произведение делится на простой элемент p, то непременно один из сомножителей делится на p.

ЛЕММА 7. *В кольце главных присоединенных идеалов последовательность элементов $a_1, a_2, \ldots$, в которой каждый последующий элемент является собственным делителем предыдущего, содержит конечное число членов.*

Доказательство. Объединение присоединенных идеалов возрастающей цепочки $\mathfrak{A} \circ a_1 \subset \mathfrak{A} \circ a_2 \subset \ldots$ образует, очевидно, присоединенный идеал, так как если a принадлежит к какому-нибудь $\mathfrak{A} \circ a_\lambda$, то к этому присоединенному идеалу принадлежит также $r \circ a$; если $a_1, a_2, \ldots, a_m$ принадлежат к присоединенным идеалам $\mathfrak{A} \circ a_{\lambda_1}, \mathfrak{A} \circ a_{\lambda_2}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{A} \circ a_{\lambda_m}$ и если $\lambda = \max(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$, то $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i$, где $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$, принадлежит к $\mathfrak{A} \circ a_\lambda$. Это объединение будет некоторым главным присоединенным идеалом $\mathfrak{A} \circ d$, где d принадлежит одному из идеалов объединения, т. е. d делится на некоторое a_n. Теперь легко заметить, что a_n должен быть последним элементом последовательности. Действительно, если бы существовал следующий элемент a_{n+1}, то мы бы имели

$$a_{n+1} \equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ d) \quad \text{и} \quad d \equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ a_n),$$

поэтому a_{n+1} не могло бы быть собственным делителем для a_n.

Замечание 1. Если элемент a некоторого кольца не может быть выражен в виде произведения неразложимых множителей, то, очевидно, всегда можно построить такую бесконечную последовательность

собственных делителей, в которой каждый следующий элемент является собственным делителем предыдущего.

ТЕОРЕМА 10. *В кольце главных присоединенных идеалов каждый элемент a может быть представлен в виде произведения неразложимых сомножителей и это представление однозначно с точностью до радикальных элементов.*

Доказательство. Возможность представления всякого элемента в виде произведения неразложимых множителей следует из леммы 7 и замечания 1. Покажем, что это представление однозначно. Пусть существуют два разложения элемента a на неразложимые множители

$$a = p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_m = q_1 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_n. \tag{4}$$

Мы всегда можем допустить, что a — не радикальный элемент. Действительно, в противном случае все множители в этих двух разложениях будут радикальными и тогда все доказано.

Далее, можно предположить, что среди сомножителей первого и второго разложения нет радикальных элементов. При этих предположениях мы покажем, что $m = n$ и p_i совпадают с q_i с точностью до порядка следования и до радикального элемента.

Для $m = 1$ теорема верна, так как в силу неразложимости элемента $a = p_1$, произведение $q_1 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_n$ может при наших предположениях содержать только один сомножитель $q_1 = p_1$.

Предположим, теперь, что утверждение доказано для произведения с меньшим, чем m числом множителей. Так как произведение $q_1 \circ q_2 \circ \ldots \circ q_n$ делится на простой элемент p_1, то, согласно лемме 6, один из множителей q_i делится на p_1. Переставляя соответствующим образом сомножители q_i, мы можем предположить, что

$$q_1 = p_1 \circ \rho, \tag{5}$$

где ρ — радикальный элемент. Подставляя значение q_1 из (5) в (4), получаем

$$p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_m = p_1 \circ \rho \circ q_2 \circ \cdots \circ q_n$$

или, сокращая на p_1,

$$p_2 \circ p_3 \circ \cdots \circ p_m = (\rho \circ q_2) \circ q_3 \circ \cdots \circ q_n. \tag{6}$$

Но, по индуктивному предположению, в равенстве (6) множители p_i и q_i совпадают с точностью до радикальных элементов. Так как $q_1 = p_1 \circ \rho$, то теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11. *Если в полурадикальном кольце всякий элемент разлагается однозначно на простые множители, то всякий простой элемент p порождает простой присоединенный идеал, а присоединенный идеал, порождаемый всяким разложимым элементом, не будет простым.*

Доказательство. Предположим, что p — неразложимый элемент, и пусть $a \circ b \equiv 0 \ (\mathfrak{A} \circ p)$, $a \not\equiv 0 \ (\mathfrak{A} \circ p)$. Тогда p входит в разложение произведения $a \circ b$ на простые множители. Но это разложение на мно-

жители получается из разложений на множители элементов a и b; следовательно, простой множитель p должен входить в a или b и так как, по предположению, p в разложение a не входит, то $b \equiv 0\ (\mathfrak{A} \circ p)$.

Предположим теперь, что элемент q — разложимый, т. е. $q = a \circ b$, где a и b — собственные делители q. Тогда имеем

$$a \circ b \equiv 0\ (\mathfrak{A} \circ q), \quad a \not\equiv 0\ (\mathfrak{A} \circ q), \quad b \not\equiv 0\ (\mathfrak{A} \circ q).$$

Следовательно, присоединенный идеал $\mathfrak{A} \circ q$ не является простым.

Замечание 2. Нетрудно показать, что если в области целости $\mathfrak{A}$ с единицей всякий элемент разлагается однозначно на простые множители в обычном смысле, то в любом подкольце $\mathfrak{B}$ кольца $\mathfrak{A}$, не содержащем единицу, которое, как было отмечено выше (см. § 4, пример 2), будет полурадикальным, имеет место однозначное разложение каждого элемента на простые множители в смысле присоединенного умножения.

Доказательство. Заметим сначала, что если элемент $1 - a$, где $a \in \mathfrak{A}$, простой в обычном смысле, то a будет простым элементом в смысле присоединенного умножения, так как если $a = b \circ c$, то

$$1 - a = 1 - b \circ c = (1 - b)(1 - c)$$

и поэтому, например, элемент $1 - c = \varepsilon$, где $\varepsilon\varepsilon^{-1} = 1$.

Положив $\varepsilon^{-1} = 1 - c'$, имеем

$$(1 - c)(1 - c') = 1,$$

т. е. $c \circ c' = 0$ и, следовательно, a — простой элемент. Обратно, если $a = b \circ c$ и $c \circ c' = 0$, то

$$1 - a = (1 - b)(1 - c),$$

причем $(1 - c)(1 - c') = 1$.

Пусть элемент $b \in \mathfrak{B}$. Тогда

$$1 - b = (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_m),$$

где $(1 - p_i)$ — простые множители в обычном смысле, или

$$b = p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_m,$$

где p_i — простые элементы в смысле присоединенного умножения.

Предположим, что существуют два разложения элемента b на простые множители в смысле присоединенного умножения, т. е.

$$b = p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_m = q_1 \circ q_2 \circ \cdots \circ q_n.$$

Тогда

$$1 - b = (1 - p_1)(1 - p_2) \cdots (1 - p_m) = (1 - q_1)(1 - q_2) \cdots (1 - q_n)$$

или, так как все элементы $1 - p_i$ и $1 - q_i$ простые в обычном смысле, причем $1 - b$, по предположению, разлагается одновременно на простые множители, будет

$$m = n \quad \text{и} \quad 1 - q_i = (1 - p_i)\,\varepsilon_i,$$

где $\varepsilon_i \varepsilon_i^{-1} = 1$. Положив

$$\varepsilon_i = 1 - \rho_i, \quad \varepsilon_i^{-1} = 1 - \rho_i',$$

имеем

$$1 - q_i = (1 - p_i)(1 - \rho_i),$$

т. е.

$$q_i = p_i \circ \rho_i,$$

причем $\rho_i \circ \rho_i' = 0$, что и требовалось доказать.

§ 11. Разложение присоединенных идеалов в коммутативных полурадикальных кольцах

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное коммутативное полурадикальное кольцо, а R — его радикальное кольцо отношений (см. § 6). Будем говорить, что дробь $\frac{a}{b} \in R$ есть *целый элемент* относительно кольца $\mathfrak{A}$, если существует такой элемент $c \in \mathfrak{A}$, что $c \circ \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} \in \mathfrak{A}$ при любом целом n, т. е. если все степени элемента $\frac{a}{b}$ выражаются дробями с одним и тем же знаменателем из $\mathfrak{A}$.

Будем говорить, что полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$ *целозамкнуто в своем радикальном кольце отношений* R, если всякий элемент из R, целый относительно $\mathfrak{A}$, принадлежит к $\mathfrak{A}$.

Нижеследующая теорема приводит к достаточному критерию целозамкнутости полурадикального кольца.

ТЕОРЕМА 12. *Всякое полурадикальное кольцо $\mathfrak{A}$, в котором имеет место однозначное разложение элементов на простые множители, целозамкнуто в своем радикальном кольце отношений R.*

Доказательство. Пусть $\frac{a}{b} \in R$ и предположим (что всегда можно сделать), что a и b не имеют общего простого множителя.

Если все степени дроби $\frac{a}{b}$ можно освободить от знаменателей, умножив на некоторый элемент $c \in \mathfrak{A}$, то $c \circ a^{(n)}$, где $a^{(n)} = \overbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}^{n \text{ раз}}$, а потому и c должно делиться на $b^{(n)}$ для любого n, что возможно только в том случае, когда b — радикальный элемент.

Из этой теоремы следует, в частности, что кольцо главных присоединенных идеалов целозамкнуто в своем радикальном кольце отношений.

Рассмотрим теперь полурадикальное коммутативное кольцо $\mathfrak{A}$, в котором выполняются следующие три условия:

I. Все возрастающие цепи присоединенных идеалов (т. е. цепи делителей) конечны.

II. Все простые присоединенные идеалы свободны от делителей.

III. $\mathfrak{A}$ целозамкнуто в своем радикальном кольце отношений.

В качестве примера кольца, удовлетворяющего условиям I, II, III, можно указать любое кольцо главных присоединенных идеалов.

Элементы кольца R, целые относительно $\mathfrak{A}$, т. е., ввиду III, элементы самого $\mathfrak{A}$ будем называть просто *целыми*.

Некоторое подмножество $\mathfrak{B}$ в R будем называть *присоединенным $\mathfrak{A}$-идеалом*, если:

1. Из $b \in \mathfrak{B}$ следует $x \circ b \in \mathfrak{B}$ для любого $x \in \mathfrak{A}$.

2. Из $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \mathfrak{B}$ следует $\sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i \in \mathfrak{B}$, где β_i — целые числа, причем $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$.

Если присоединенный $\mathfrak{A}$-идеал имеет конечный базис, то будем его называть также *дробным присоединенным идеалом*.

Если присоединенный $\mathfrak{A}$-идеал A состоит только из целых элементов, т. е. $A \subseteq \mathfrak{A}$, то A является присоединенным идеалом в кольце $\mathfrak{A}$ в обычном смысле. Такой присоединенный идеал будем называть *целым присоединенным идеалом*.

Сумму $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ двух присоединенных $\mathfrak{A}$-идеалов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ определяем как совокупность элементов вида

$$\sum_i \beta_i b_i + \sum_j \nu_j c_j,$$

где $b_i \in \mathfrak{B}$, $c_j \in \mathfrak{C}$, причем $\sum_i \beta_i + \sum_j \nu_j = 1$.

Произведением $\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C}$ двух присоединенных $\mathfrak{A}$-идеалов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ будем называть множество всех сумм $\sum_i \lambda_i (b_i \circ c_i)$, где $\sum_i \lambda_i = 1$.

Ясно, что сумма $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ и произведение $\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C}$ присоединенных $\mathfrak{A}$-идеалов $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ будут также присоединенными $\mathfrak{A}$-идеалами, причем если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ имеют конечный базис, то и $\mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C}$ имеют конечный базис.

В дальнейшем мы будем обозначать большими латинскими буквами только целые присоединенные идеалы, а буквой P — простой присоединенный идеал. Напомним, что присоединенный идеал P называется простым, если из $a \circ b \equiv 0\ (P)$ и $a \not\equiv 0\ (P)$ следует $b \equiv 0\ (P)$.

Переходим теперь к доказательству нескольких лемм, совершенно аналогичных по формулировке и доказательству тем, которые имеют место в теории идеалов области целостности [см. ([4]), §§ 100, 101].

ЛЕММА 8. *Для всякого присоединенного идеала A существует такое произведение простых присоединенных идеалов P_i, делителей A, которое делится на A, т. е.*

$$P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_n \equiv 0\ (A), \quad A \equiv 0\ (P_i).$$

Доказательство. Если A — простой присоединенный идеал, то лемма 8 очевидна. Предположим теперь, что A — не простой. Тогда существуют два таких элемента b и c, что

$$b \circ c \equiv 0(A), \quad b \not\equiv 0(A), \quad c \not\equiv 0(A).$$

Обозначая $B = \mathfrak{A} \circ b$ и $C = \mathfrak{A} \circ c$, имеем

$$B \circ C = \mathfrak{A} \circ (b \circ c) \equiv 0(A), \quad B \not\equiv 0(A), \quad C \not\equiv 0(A).$$

Рассмотрим теперь присоединенные идеалы

$$B + A = B' \text{ и } C + A = C'.$$

Эти присоединенные идеалы являются собственными делителями A, причем (см. § 8)

$$B' \circ C' = (B + A) \circ (C + A) = (B \circ C + A \circ C + B \circ A + A \circ A) \equiv 0(A).$$

Так как условие обрыва цепей делителей позволяет вести доказательство индукцией по делителям, то примем, что утверждение леммы уже доказано для присоединенных идеалов B' и C'.

Иными словами, существуют два таких произведения простых присоединенных идеалов

$$P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_m \quad \text{и} \quad P_{m+1} \circ \cdots \circ P_n,$$

что

$$P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_m \equiv 0(B'),$$
$$P_{m+1} \circ P_{m+2} \circ \cdots \circ P_n \equiv 0(C').$$

Из последних сравнений получаем

$$P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_n \equiv 0(B' \circ C') \equiv 0(A),$$

а потому лемма будет справедливой и для A.

ЛЕММА 9. *Если P — простой присоединенный идеал, то из $A \circ B \equiv 0(P)$ следует, что $A \equiv 0(P)$ или $B \equiv 0(P)$.*

Доказательство. Предположим, что $A \not\equiv 0(P)$ и $B \not\equiv 0(P)$. Тогда существуют два таких элемента $a \in A$ и $b \in B$, что $a \not\equiv 0(P)$, $b \not\equiv 0(P)$. Но $a \circ b \equiv 0(A \circ B) \equiv 0(P)$, что противоречит определению простого присоединенного идеала P.

Обозначим через P' множество всех целых или дробных элементов a, для которых $a \circ p$ является целым элементом при произвольном $p \in P$, т. е. $a \circ P \subseteq \mathfrak{A}$. Нетрудно заметить, что P' является присоединенным $\mathfrak{A}$-идеалом. Действительно, пусть $a \circ P \subseteq \mathfrak{A}$. Тогда для любого $r \in \mathfrak{A}$ и любого $p \in P$ имеем $r \circ a \circ p \in \mathfrak{A}$; если $a_i \circ p \in \mathfrak{A}$ и $\sum_i \alpha_i = 1$, где α_i — целые числа, то

$$\left(\sum \alpha_i a_i\right) \circ p = \sum \alpha_i (a_i \circ p) \in \mathfrak{A}.$$

ЛЕММА 10. *Если $P \neq \mathfrak{A}$, то P' содержит не целый элемент.*

Доказательство. Пусть b — произвольный элемент из P. Согласно лемме 8, существует такое произведение простых присоединенных идеалов P_i, что

$$P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_n \equiv 0(\mathfrak{A} \circ b) \equiv 0(P).$$

Можно предположить, что это произведение несократимо, т. е. никакая его часть не сравнима с нулем по модулю $\mathfrak{A} \circ b$. Так как произведение $P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_n$ делится на P, то, согласно лемме 9, один из сомножителей P_i, например, P_1 делится на P, т. е. $P_1 \equiv 0\,(P)$. Но идеал P_1 — простой и поэтому, согласно условию II и предположению $P \neq \mathfrak{A}$, получаем $P = P_1$. Таким образом,

$$P \circ P_2 \circ \cdots \circ P_n \equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ b),$$
$$P_2 \circ \cdots \circ P_n \not\equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ b).$$

Следовательно, существует такой элемент $a \in \mathfrak{A}$, что

$$a \equiv 0\,(P_2 \circ \cdots \circ P_n), \quad a \not\equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ b).$$

Далее, имеем

$$P \circ a \equiv 0\,(P \circ P_2 \circ \cdots \circ P_n) \equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ b),$$

откуда получаем $P \circ \frac{a}{b} \equiv 0\,(\mathfrak{A})$, т. е. $\frac{a}{b} \in P'$. Но из $a \not\equiv 0\,(\mathfrak{A} \circ b)$ следует $\frac{a}{b} \not\equiv 0\,(\mathfrak{A})$, т. е. $\frac{a}{b}$ не является целым элементом, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 13. *Если $P \neq \mathfrak{A}$, то $P \circ P' = \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Согласно определению P', $\mathfrak{A} \subseteq P'$. Следовательно,

$$P = \mathfrak{A} \circ P \subseteq P' \circ P,$$

т. е. целый присоединенный идеал $P' \circ P$ делит P и поэтому, согласно условию II, $P \circ P' = P$ или $P \circ P' = \mathfrak{A}$. Предположим, что $P \circ P' = P$. Тогда, положив

$$P'^{(m)} = \overbrace{P' \circ P' \circ \cdots \circ P'}^{m \text{ раз}},$$

имеем

$$P = P \circ P' = (P \circ P') \circ P' = P \circ P'^{(2)} = \cdots = P \circ P'^{(m)}$$

для любого целого m. Следовательно, если p — произвольный элемент из P и b — произвольный элемент из P', то

$$p \circ b^{(m)} \in P'^{(m)} = P,$$

т. е. $p \circ b^{(m)}$ — целый элемент. Таким образом, b — целый элемент относительно $\mathfrak{A}$, а потому, согласно условию III, $b \in \mathfrak{A}$. Так как, однако, b был произвольным элементом из P', то это противоречит лемме 10. Отсюда следует, что $P \circ P' = \mathfrak{A}$.

Переходим теперь к доказательству основной теоремы.

ТЕОРЕМА 14. *Всякий присоединенный идеал A может быть представлен в виде произведения простых присоединенных идеалов.*

Доказательство. Если $A = \mathfrak{A}$, то утверждение очевидно. Предположим, следовательно, что $A \neq \mathfrak{A}$. Пусть, согласно лемме 8,

$$P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_n \equiv 0\,(A) \equiv 0\,(P_i) \tag{1}$$

и предположим, что это произведение несократимо. Умножая (1) на P'_1 и принимая во внимание теорему 13, получаем

$$P_2 \circ P_3 \circ \cdots \circ P_n \equiv 0\,(P'_1 \circ A) \equiv 0\,(P'_1 \circ P_1) \equiv 0\,(\mathfrak{A}).$$

Следовательно, $P'_1 \circ A$ будет целым присоединенным идеалом, причем $P'_1 \circ A$ делит произведение простых присоединенных идеалов с меньшим, чем n, числом сомножителей.

Теперь проводим доказательство индукцией по n. Если A делит только один простой присоединенный идеал P, т. е. если $P \equiv 0\,(A)$, то, согласно условию II и предположению $A \neq \mathfrak{A}$, будет $A = P$, и теорема доказана. Предположим теперь, что теорема справедлива для присоединенных идеалов, которые делят произведение $n-1$ простых присоединенных идеалов. Тогда теорема будет справедлива, в частности, для $P_1 \circ A$, т. е.

$$P'_1 \circ A \equiv \overline{P}_2 \circ \overline{P}_3 \circ \cdots \circ \overline{P}_r.$$

Умножив обе части последнего равенства на P_1, получаем

$$A = P_1 \circ \overline{P}_2 \circ \overline{P}_3 \circ \cdots \circ \overline{P}_r,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 15. *Если* $A \equiv 0\,(B)$ *и* $A = P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_m$, *где* $B = \overline{P}_1 \circ \overline{P}_2 \circ \cdots \circ \overline{P}_n$, *то всякий простой присоединенный идеал, отличный от* $\mathfrak{A}$ *и входящий в разложение идеала* B, *входит также в разложение идеала* A *и притом по меньшей мере столько же раз.*

Доказательство. Пусть $\overline{P}_1 \neq \mathfrak{A}$. Так как

$$P_1 \circ P_2 \circ \cdots \circ P_m \equiv 0\,(B) \equiv 0\,(\overline{P}_1),$$

то, согласно лемме 9, один из сомножителей P_i делится на $\overline{P}_1$. Пусть, например, $P_1 \equiv 0\,(\overline{P}_1)$. Тогда, согласно условию II и предположению $\overline{P}_1 \neq \mathfrak{A}$, получим $\overline{P}_1 = P_1$. Теперь имеем:

$$P'_1 \circ A \equiv 0\,(P'_1 \circ B),$$
$$P'_1 \circ A = P_2 \circ \cdots \circ P_m,$$
$$P'_1 \circ B = P'_2 \circ \cdots \circ P'_n$$

и идеалы $\overline{P}'_1 \circ A$, $P'_1 \circ B$ содержат уже меньше простых множителей, чем A и B. Допустим, что теорема 15 верна для случая, когда в разложении идеала B число простых множителей меньше n (если $n = 0$, то $B = \mathfrak{A}$, и теорема очевидна). Тогда каждый из присоединенных идеалов $\overline{P}_2, \ldots, \overline{P}_n$ будет встречаться по крайней мере столько же раз и среди идеалов $P_2, \ldots, P_m$ и, следовательно, теорема доказана.

Следствие 1. *Разложение присоединенных идеалов на простые множители однозначно с точностью до порядка следования множителей и до множителей* $\mathfrak{A}$.

Следствие 2. *Если* $A \equiv 0\,(B)$, *то* $A = B \circ C$, *где* C — *целый присоединенный идеал.*

Теорема об однозначном разложении любого присоединенного идеала A на простые множители является, как мы видели, следствием условий I, II и III. Имеет место и обратная теорема, а именно:

ТЕОРЕМА 16. *Если в полурадикальном кольце $\mathfrak{A}$ всякий присоединенный идеал A разлагается в произведение простых присоединенных идеалов и если из $A \equiv 0\,(B)$ следует, что сомножители из разложения идеала B, отличные от $\mathfrak{A}$, входят в разложение для A по меньшей мере столько же раз, сколько раз они встречаются в B, то в кольце $\mathfrak{A}$ выполняются условия* I, II *и* III.

Доказательство. Условие I, т. е. условие обрыва цепей делителей для присоединенных идеалов, следует непосредственно из того, что всякий присоединенный идеал

$$A = P_1^{\mu_1} \circ P_2^{\mu_2} \circ \cdots \circ P_m^{\mu_m}$$

имеет только конечное число делителей, а именно

$$B = P_1^{\nu_1} \circ \cdots \circ P_m^{\nu_m},$$

где $\nu_i \leqslant \mu_i$. В частности, простой присоединенный идеал P делится только на P и $\mathfrak{A}$ и, следовательно, условие II также выполняется.

Условие III, т. е. целозамкнутость $\mathfrak{A}$ в своем радикальном кольце отношений R, доказывается следующим образом: берем в R элемент $\frac{a}{b}$, целый относительно $\mathfrak{A}$, и рассматриваем присоединенный $\mathfrak{A}$-идеал $\mathfrak{B}$, порожденный кольцом $\mathfrak{A}$ и всеми степенями элемента $\frac{a}{b}$. Так как $\frac{a}{b}$ — целый элемент относительно $\mathfrak{A}$, то существует такой элемент $c \in \mathfrak{A}$, что $c \circ \mathfrak{B}$ будет целым идеалом и, следовательно, $c \circ \mathfrak{B}$ имеет, ввиду условия I, конечный базис, т. е.

$$c \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{A} \circ c + \mathfrak{A} \circ a_1 + \cdots + \mathfrak{A} \circ a_m.$$

Умножая последнее равенство на $c' = \frac{0}{c}$ и используя определение суммы присоединенных идеалов, получаем

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{A} \circ \frac{a_1}{c} + \mathfrak{A} \circ \frac{a_2}{c} + \ldots + \mathfrak{A} \cdot \frac{a_m}{c}.$$

Но $\mathfrak{B}^{(2)} = \mathfrak{B}$, так как $\mathfrak{B}^{(2)} \supseteq \mathfrak{A} \circ \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, а с другой стороны, очевидно, $\mathfrak{B}^{(2)} \subseteq \mathfrak{B}$. Умножив равенство $\mathfrak{B}^{(2)} = \mathfrak{B}$ на $(\mathfrak{A} \circ c)^{(2)}$, имеем

$$\mathfrak{B} \circ (\mathfrak{A} \circ c) \circ \mathfrak{B} \circ (\mathfrak{A} \circ c) = \mathfrak{B} \circ (\mathfrak{A} \circ c) \circ (\mathfrak{A} \circ c),$$

т. е.

$$(\mathfrak{B} \circ c) \circ (\mathfrak{B} \circ c) = (\mathfrak{B} \circ c) \circ (\mathfrak{A} \circ c),$$

откуда, в силу единственности разложения целых идеалов, получаем

$$\mathfrak{B} \circ c = \mathfrak{A} \circ c.$$

Умножив обе части на c', имеем $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$. Следовательно,

$$\frac{a}{b} \in \mathfrak{B} = \mathfrak{A},$$

что и требовалось доказать.

Поступило
25.XII.1946.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jacobson N., The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math. 67 (1945), 300—320.

[2] Foster A. L. and Bernstein B. A., Symmetric approach to commutative rings, with duality theorem; Boolean duality as special case, Duke Math. J., 11 (1944), 603—618.

[3] Baer R., Inverses and zero-divisors, Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1942), 630—638.

[4] Van der Waerden B. L., Moderne Algebra, Spronger, 1931.

[5] Hopkins Ch., Rings with minimal condition for left ideals, Ann. of Math., 40 (1939), 712—730.

[6] Brauer R., On the nilpotency of the radical of a ring, Bull. Math. Soc., 48 (1942), 752—758.

[7] Ore O., Linear equations in non-commutative fields, Ann. of Math., 32 (1931), 463—477.

[8] Wedderburn J. H., Non-commutative domains of integrity, J. f. reine angew. Math., 167 (1932), 120—141.

[9] Malcev A., On the Immersion of an Algebraic Ring into a Field, Math. Ann. 113 (1936), 686—691.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 179—192

А. А. ШНЕЙДЕР

О РЯДАХ ПО ФУНКЦИЯМ ВАЛЬША С МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Рассматривается вопрос о сходимости рядов из функций Вальша, определяемых по способу Paley и по способу Kaczmarz'а.

В настоящей работе рассматривается вопрос о сходимости рядов из функций Вальша с действительными коэффициентами, монотонно стремящимися к нулю. В этом направлении исследуются два различных способа определения функций Вальша: способ Paley и способ Kaczmarz'а (способ самого Вальша мы оставляем в стороне). Оба способа дают систему одних и тех же функций, но существенно отличаются порядком их расположения, т. е. одна и та же функция имеет, вообще говоря, разные номера у Kaczmarz'а и у Paley. Для этих двух порядков вопрос о сходимости рядов с монотонными коэффициентами решается совершенно различно. Именно, мы показываем, что для порядка Paley все такие ряды сходятся всюду на $[0,1)$, кроме, быть может, точки $x=0$ (в которой ряд сходится или расходится вместе с рядом из коэффициентов), причем равномерно в каждом интервале $(\delta,1)$, где $0<\delta<1$.

Для порядка Kaczmarz'а мы доказываем следующие предложения:

1) если коэффициенты c_n образуют монотонную последовательность и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n^2<\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ сходится почти всюду на $[0,1)$.

2) Если коэффициенты c_n образуют монотонную последовательность и $c_n \neq o\left(\frac{1}{\log n}\right)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ расходится почти всюду на $[0,1)$.

Эти факты показывают естественность постановки следующих вопросов (мы ограничиваемся функциями Вальша, хотя вопросы можно поставить и для других систем):

1. Существует ли для всякого расположения функций Вальша граничная функция (зависящая от этого расположения) $W(n)$ такая, что если c_n монотонны и $c_n=o(W(n))$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x)$ сходится

почти всюду на $[0,1)$, и если c_n монотонны и $c_n \neq o(W(n))$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ расходится почти всюду на $[0,1)$?

2. Каково множество функций $W(n)$ (при всевозможных расположениях функций Вальша)?

§ 1

Положим $\Phi_m(x) = \operatorname{sgn} \sin 2^{m+1} \pi x$. Система $\{\Phi_m(x)\}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ на $[0,1)$ является системой функций Rademacher'a. Образуем теперь следующую систему функций: для $n = 1$ положим $\varphi_1(x) \equiv 1$, для

$$n = 1 + \sum_{j=1}^{l_n} 2^{m_{j,n}} \quad (m_{j+1,n} > m_{j,n} \geqslant 0) \tag{1}$$

положим

$$\varphi_n(x) \equiv \prod_{j=1}^{l_n} \Phi_{m_{j,n}}(x),$$

изменив еще значения $\varphi_n(x)$ в некоторых двоично-рациональных точках так, чтобы всюду выполнялось соотношение

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2} [\varphi_n(x-0) + \varphi_n(x+0)]. \tag{2}$$

Система $\{\varphi_n(x)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ на $[0,1)$ является системой функций Вальша в расположении, данном Paley.

ЛЕММА. *Частные суммы ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \tag{3}$$

ограничены во всех точках, кроме $x = 0$, *причем равномерно в каждом интервале* $(\delta, 1)$, *где* $0 < \delta < 1$.

Доказательство. Пусть $\frac{1}{2^{k+1}} < x < \frac{1}{2^k}$. Мы утверждаем, что в таком случае частные суммы ряда (3) в точке x не превосходят по абсолютной величине числа 2^k.

Для точки x, очевидно, имеем

$$\Phi_0(x) = \Phi_1(x) = \cdots = \Phi_{k-1}(x) = +1, \quad \Phi_k(x) = -1. \tag{4}$$

При $1 < n \leqslant 2^k$ максимальный индекс $m_{l_n, n}$ в разложении (1) удовлетворяет неравенству $m_{l_n, n} \leqslant k-1$, поэтому из (4) следует, что

$$\varphi_n(x) = +1 \text{ при } n = 1, 2, 3, \ldots, 2^k,$$

и, значит,

$$\sum_{n=1}^{r} \varphi_n(x) = r \text{ при } 1 \leqslant r \leqslant 2^k;$$

в частности,

$$\sum_{n=1}^{2^k} \varphi_n(x) = 2^k.$$

Далее, при $n=2^k+r$ $(1\leqslant r\leqslant 2^k)$ максимальный индекс $m_{l_n,n}$ в разложении (1) равен k, поэтому из (4) следует, что

$$\varphi_n(x)=-1 \text{ при } n=2^k+1,\ 2^k+2,\ \ldots,\ 2\cdot 2^k$$

и, значит,

$$\sum_{n=1}^{2^k+r}\varphi_n(x)=2^k-r \quad \text{при} \quad 1\leqslant r\leqslant 2^k;$$

в частности,

$$\sum_{n=1}^{2\cdot 2^k}\varphi_n(x)=0.$$

Предположим, что для номера $p-1\geqslant 1$ уже доказано, что

$$\sum_{n=1}^{2(p-1)\cdot 2^k}\varphi_n(x)=0, \tag{5}$$

$$\left|\sum_{n=1}^{s}\varphi_n(x)\right|\leqslant 2^k \quad \text{при} \quad s\leqslant 2(p-1)\cdot 2^k. \tag{6}$$

Докажем справедливость (5) и (6) при замене $p-1$ на p $(p>1)$.

Заметим, что при

$$n=2(p-1)\cdot 2^k+r \quad (1\leqslant r\leqslant 2^k)$$

член 2^k не входит в разложение (1) числа n (так как двоичное разложение числа $2(p-1)2^k$ начинается с члена 2^ν, где $\nu\geqslant k+1$, а разложение (1) числа r содержит лишь члены со степенями $<k$; разложение же (1) числа n представляется, очевидно, в виде суммы указанных разложений для чисел r и $2(p-1)2^k$), поэтому функция Φ_k не входит в разложение функции φ_n; группа же членов разложения (1) со степенями, большими k, постоянна для всех n, заключающихся в указанных пределах; поэтому из (4) следует, что

$$\varphi_n(x)=(-1)^{\alpha_{p-1}} \text{ при } n=2(p-1)2^k+1,\ \ldots,\ (2p-1)2^k,$$

и, значит (учитывая (5)),

$$\sum_{n=1}^{2(p-1)2^k+r}\varphi_n(x)=(-1)^{\alpha_{p-1}}r \text{ при } 1\leqslant r\leqslant 2^k;$$

в частности,

$$\sum_{n=1}^{(2p-1)2^k}\varphi_n(x)=(-1)^{\alpha_{p-1}}\cdot 2^k.$$

Далее, при $n=(2p-1)\cdot 2^k+r$ $(1\leqslant r\leqslant 2^k)$ член 2^k входит в разложение (1) числа n (так как с него начинается двоичное разложение числа $(2p-1)\cdot 2^k$, а разложение (1) числа r содержит лишь члены со степенями $<k$), поэтому функция Φ_k входит в разложение функции φ_n; группа же членов разложения (1) со степенями, большими k, здесь та же, что и в предыдущем случае; поэтому из (4) следует, что

$$\varphi_n(x)=-(-1)^{\alpha_{p-1}} \text{ при } n=(2p-1)\cdot 2^k+1,\ \ldots,\ 2p\cdot 2^k$$

и, значит,

$$\sum_{n=1}^{(2p-1)2^k+r} \varphi_n(x) = (-1)^{\alpha_{p-1}} (2^k - r) \text{ при } 1 \leqslant r \leqslant 2^k;$$

в частности,

$$\sum_{n=1}^{2p\cdot 2^k} \varphi_n(x) = 0,$$

и соотношения (5) и (6) доказаны при замене $p-1$ на p.

Проведенная индукция показывает, что (6) верно при любых s.

Если, теперь, $x = \frac{1}{2^k}$, то, ввиду (2), имеем

$$\sum_{n=1}^{s} \varphi_n(x) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{s} \varphi_n(x-0) + \sum_{n=1}^{s} \varphi_n(x+0)\right]$$

и, значит,

$$\left|\sum_{n=1}^{s} \varphi_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{2}[2^k + 2^{k-1}] < 2^k.$$

Из доказанного следует как ограниченность частных сумм ряда (3) во всех точках, кроме $x=0$, так и равномерная ограниченность их на $(\delta, 1)$.

ТЕОРЕМА. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ *с монотонно стремящимися к нулю коэффициентами* c_n *сходится всюду, кроме, быть может, точки* $x=0$ *(в которой он сходится или расходится вместе с рядом* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$*), причем равномерно в каждом интервале* $(\delta, 1)$, *где* $0 < \delta < 1$.

Доказательство. Справедливость теоремы сразу получается из только что доказанной леммы и следующего известного предложения, являющегося следствием преобразования Абеля: если частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно ограничены на множестве E и $\{v_n\}$ — последовательность чисел, монотонно стремящаяся к нулю, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n u_n(x)$ равномерно сходится на E.

В точке $x = 0$ (считая, по определению, что $\varphi_n(0) = \frac{1}{2}[\varphi_n(1-0) + \varphi_n(0+0)]$) имеем

$$\sum_{n=1}^{s} c_n\varphi_n(0) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{s} c_n\varphi_n(1-0) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{s} c_n\varphi_n(0+0) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{s} c_n\varphi_n(1-0) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{s} c_n,$$

где первая сумма правой части стремится к конечному пределу при $s \to \infty$, в силу леммы и цитированного предложения.

§ 2

В этом параграфе займемся рассмотрением функций Вальша в расположении Kaczmarz'а.

Пусть попрежнему

$$\Phi_n(x) = \operatorname{sgn} \sin 2^{n+1} \pi x \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

—система Rademacher'а.

Введем матрицы B_n и вспомогательные функции

$$\psi_{2^n+i}(x) = \psi_{n,i}(x) \quad (1 \leqslant i \leqslant 2^n)$$

(вместо индекса $2^n + i$ будем иногда писать двойной индекс n, i).

Положим

$$B_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}, \; B_2 = B_1 \odot B_1, \ldots, B_n = B_{n-1} \odot B_1, \ldots, \tag{7}$$

где знак $\odot$ обозначает прямое перемножение матриц.

Матрица $B_n = \| b_{i,j}^{(n)} \|$ имеет порядок 2^n, ее элементы равны ± 1, она является ортогональной (как прямое произведение ортогональных матриц). Положим

$$\psi_{n,i}(x) = b_{i,j}^{(n)} \text{ при } \frac{j-1}{2^n} < x < \frac{j}{2^n}$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, 2^n, \; i = 1, 2, \ldots, 2^n, \; n = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Определим теперь систему функций $\{\varphi_m(x)\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ на $[0,1)$ следующим образом:

$$\varphi_1(x) \equiv 1, \quad \varphi_2(x) \equiv \Phi_0(x);$$

при $m = 2^n + i$ $(n \geqslant 1, \; 1 \leqslant i \leqslant 2^n)$ полагаем

$$\varphi_m(x) = \varphi_{2^n+i}(x) = \varphi_{n,i}(x) = \Phi_n(x) \cdot \psi_{n,i}(x), \tag{9}$$

доопределив $\varphi_m(x)$ в концах интервалов (8) так, чтобы всюду иметь

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{2} [\varphi_m(x-0) + \varphi_m(x+0)]. \tag{10}$$

Покажем, что система функций $\{\varphi_m(x)\}$ (система Вальша в расположении Kaczmarz'а) отличается от таким же образом обозначенной системы предыдущего параграфа только перестановкой номеров у функций. Для этого докажем, что для всех n при $1 \leqslant r \leqslant 2^n$ имеют место соотношения:

$$\text{если } r = 1, \text{ то } \psi_{n,1}(x) \equiv 1, \tag{11}$$

$$\text{если } r = 1 + \sum_{j=1}^{\lambda_r} 2^{\mu_{j,r}} \quad (\mu_{j+1,r} > \mu_{j,r} \geqslant 0), \text{ то } \psi_{n,r}(x) = \prod_{j=1}^{\lambda_r} \Phi_{n-1-\mu_{j,r}}(x). \tag{12}$$

При $n = 1$ эти соотношения, очевидно, выполнены. Пусть их справедливость уже установлена для $n = p \geqslant 1$; покажем, что в таком случае они будут верны и при $n = p + 1$.

Матрицу B_{p+1} схематически можно представить в виде:

$$B_{p+1} = \left\| \begin{array}{c:c} B_p & B_p \\ \hdashline B_p & -B_p \end{array} \right\|. \tag{13}$$

Отсюда сразу получаем справедливость (11) для $n = p+1$. Для доказательства (12) при $n = p+1$ рассмотрим два случая:

1°. $1 \leqslant r \leqslant 2^p$. Согласно предположению, имеем

$$\psi_{p,r}(x) = \prod_{j=1}^{\lambda_r} \Phi_{p-1-\mu_{j,r}}(x),$$

и, принимая во внимание представление (13) и величину индекса r, получаем

$$\psi_{p+1,r}(x) = \psi_{p,r}(2x).$$

Замечая, что для любого целого ν имеет место тождество

$$\Phi_\nu(2x) = \Phi_{\nu+1}(x),$$

окончательно получаем

$$\psi_{p+1,r}(x) = \prod_{j=1}^{\lambda_r} \Phi_{p-1-\mu_{j,r}}(2x) = \prod_{j=1}^{\lambda_r} \Phi_{(p+1)-1-\mu_{j,r}}(x).$$

2°. $r = 2^p + r'$ $(1 \leqslant r' \leqslant 2^p)$. Принимая во внимание представление (13) и величину индекса r, получаем

$$\psi_{p+1,r}(x) = \psi_{p,r'}(2x) \cdot \Phi_0(x),$$

и, значит (так как $\mu_{\lambda_r, r} = p$),

$$\psi_{p+1,r}(x) = \Phi_0(x) \prod_{j=1}^{\lambda_{r'}} \Phi_{p-1-\mu_{j,r'}}(2x) =$$

$$= \Phi_{(p+1)-1-\mu_{\lambda_r,r}}(x) \cdot \prod_{j=1}^{\lambda_{r'}} \Phi_{(p+1)-1-\mu_{j,r'}}(x) = \prod_{j=1}^{\lambda_r} \Phi_{(p+1)-1-\mu_{j,r}}(x),$$

где последнее равенство имеет место в силу того, что $\mu_{j,r} = \mu_{j,r'}$ при $j = 1, 2, 3, \ldots, \lambda_r - 1 = \lambda_{r'}$.

Итак, (11) и (12) доказаны для любых n.

Из (12) получаем, что для $2 < m = 1 + \sum_{j=1}^{\lambda_m} 2^{\mu_{j,m}}$ функция $\varphi_m(x)$ представляется в виде

$$\varphi_m(x) = \Phi_{\mu_{\lambda_m,m}}(x) \prod_{j=1}^{\lambda_m - 1} \Phi_{\mu_{\lambda_m,m}-1-\mu_{j,m}}(x).$$

Отсюда, очевидно, следует, что система $\{\varphi_m(x)\}$ действительно отличается лишь перестановкой функций от системы $\{\varphi_n(x)\}$ предыдущего

параграфа, причем даже группы функций с номерами $2^k < m \leqslant 2^{k+1}$ ($k=0, 1, \ldots$) совпадают в обоих определениях, так что системы отличаются лишь перетасовкой функций внутри этих групп.

Отметим некоторые свойства матриц B_k. Мы утверждаем, что

a) $b_{i,1}^{(k)}=1$ при $i=1, 2, \ldots, 2^k$, откуда $\sum_{i=1}^{2^k} b_{i,1}^{(k)}=2^k$;

b) при $j \neq 1$ имеем $\sum_{i=1}^{2^k} b_{i,j}^{(k)}=0$.

При $k=1$ свойства a) и b), очевидно, выполняются. Пусть их справедливость уже доказана для $k=p \geqslant 1$; тогда, принимая во внимание представление (13), мы сразу убеждаемся в справедливости a) и b) и для $k=p+1$.

Докажем теперь более общие свойства матриц B_n, частные случаи которых мы только что установили. Пусть $k \leqslant n$; тогда

A) при $j=1+l\cdot 2^k$ $\quad (l=0, 1, \ldots, 2^{n-k}-1)$, $1 \leqslant i \leqslant 2^k$ имеем $b_{i,j}^{(n)}=1$, откуда

$$\sum_{i=1}^{2^k} b_{i,j}^{(n)}=2^k \text{ (при указанных индексах } j),$$

B) при $j \neq 1+l\cdot 2^k$ $(l=0, 1, \ldots, 2^{n-k}-1)$, $q=0, 1, \ldots, 2^{n-k}-1$ имеем

$$\sum_{i=q\cdot 2^k+1}^{(q+1)\cdot 2^k} b_{i,j}^{(n)}=0,$$

откуда

$$\left|\sum_{i=1}^{h} b_{i,j}^{(n)}\right| < 2^k \quad \text{(при указанных индексах } j \text{ и } h=1, 2, 3, \ldots, 2^n).$$

Действительно, из (13) следует справедливость такого представления:

$$B_n=\left\|\begin{array}{cccc} B_k & B_k & \cdots & \cdots \\ B_k & -B_k & & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \\ & & \pm B_k & \\ \cdots & & \cdots & \cdots \end{array}\right\|.$$

Применяя a) и b), мы сразу убеждаемся в справедливости A) и B).

Положим

$$A_{2^n+h}(x)=A_{n,h}(x)=\sum_{i=2^n+1}^{2^n+h} \varphi_i(x)=\sum_{i=1}^{h} \varphi_{n,i}(x) \quad (1 \leqslant h \leqslant 2^n).$$

Из (9) следует, что

$$|A_{n,h}(x)| = \left|\sum_{i=1}^{h} \psi_{n,i}(x)\right| .$$

Принимая во внимание определение (8) и свойства A) и B), получим, что при $k \leqslant n$ на интервалах

$$\frac{l \cdot 2^k}{2^n} < x < \frac{l \cdot 2^k + 1}{2^n} \quad (l = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n-k} - 1) \tag{14}$$

имеет место равенство

$$|A_{n,2^k}(x)| = 2^k; \tag{15}$$

если же x не принадлежит ни одному из интервалов (14), то

$$|A_{n,2^k}(x)| = 0, \tag{16}$$

$$|A_{n,h}(x)| < 2^k \text{ для } h = 1, 2, 3, \ldots, 2^n. \tag{17}$$

ЛЕММА. *Если* $|c_m| \geqslant |c_{m+1}|$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *и* $\sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 < \infty$, *то*

$$c_{n,g} \cdot A_{n,h}(x) \to 0 \tag{18}$$

почти всюду на $[0, 1)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно по индексам* g_n *и* h, *удовлетворяющим неравенствам:* $1 \leqslant g \leqslant 2^n$, $1 \leqslant h \leqslant 2^n$.

Доказательство. Обозначим через $E_n^{(k)}$ множество всех точек, содержащихся в интервалах (14). Мера множества $E_n^{(k)}$, очевидно, равна $\frac{1}{2^k}$. Для всякого целого $p > 0$ можно образовать множество

$$G_p = \sum_{m=0}^{\infty} E_{p+2m}^{(p+m)},$$

для меры которого имеем оценку

$$|G_p| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |E_{p+2m}^{(p+m)}| = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+m}} = \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Положим, теперь, $G^{(p)} = G_p + G_{p+1}$. Для меры $G^{(p)}$ имеем

$$|G^{(p)}| \leqslant \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} < \frac{1}{2^{p-2}} .$$

Всюду вне множества $G^{(p)}$, в силу (17), имеем

$$|A_{p+2m,h}(x)| < 2^{p+m} \quad (h = 1, 2, 3, \ldots, 2^{p+2m};\ m = 0, 1, 2, \ldots), \tag{19}$$

$$|A_{p+1+2m,h}(x)| < 2^{p+1+m} \quad (h = 1, 2, 3, \ldots, 2^{p+1+2m};\ m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Мы утверждаем, что соотношение (18) справедливо всюду вне $G^{(p)}$. Предположим, что это не так, т. е. для некоторой точки $x \not\subset G^{(p)}$ существует число $\alpha > 0$ такое, что имеется бесконечно возрастающая последовательность номеров $t_q = p + 2m_q + \theta_q$ (где $\theta_q = 0$ или 1) такая, что

$$|c_{t_q,g_q} \cdot A_{t_q,h_q}(x)| > \alpha$$

(для некоторых g_q, h_q). Тогда, ввиду (19) и (20), имеем

$$|c_{t_q,g_q}| > \frac{\alpha}{2^{t_q - m_q}}$$

и, возводя в квадрат,

$$c^2_{t_q, g_q} > \frac{a^2}{2^{2t_q - 2m_q}}.$$

Отсюда, в силу монотонности $\{c^2_m\}$, получаем

$$c^2_{t_q - 1, g} > \frac{a^2}{2^{2t_q - 2m_q}} \quad (1 \leqslant g \leqslant 2^{t_q - 1})$$

и, значит,

$$\sum_{g=1}^{2^{t_q-1}} c^2_{t_q-1, g} > \frac{a^2}{2^{2t_q - 2m_q}} \cdot 2^{t_q - 1} = \frac{a^2}{2^{p+\delta_q+1}} \geqslant \frac{a^2}{2^{p+2}},$$

что означает расходимость ряда $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c^2_m$, вопреки предположению.

Итак, соотношение (18) выполняется всюду вне $G^{(p)}$ для всякого $p > 0$. Но $|G^{(p)}| \to 0$ при $p \to \infty$, а потому (18) имеет место почти всюду на $[0, 1)$, и лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Если* $c_m \geqslant c_{m+1} \geqslant 0$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *и* $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c^2_m < \infty$, *то ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x) \tag{21}$$

сходится почти всюду на $[0,1)$.

Доказательство. Ряд (21) есть ряд Fourier функции $f(x) \subset L^2$. Заменим группу первых 2^n функций системы Вальша на такую же группу функций системы Haar'а; тогда, очевидно, получим некоторую полную ортонормированную систему функций. Если разложить $f(x)$ в ряд Fourier по этой последней системе и сравнить полученный ряд с рядом (21), то увидим, что у этих двух рядов будут совпадать все члены, начиная с номера $2^n + 1$. Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{m=2^n+1}^{\infty} c_m \varphi_m(x)$ сходится в среднем к функциям

$$f(x) - S_{2^n}(x) \text{ и } f(x) - S^{\chi}_{2^n}(x),$$

где через $S_\lambda(x)$ обозначена частная сумма ряда (21), а через $S^{\chi}_\lambda(x)$ — частная сумма разложения $f(x)$ по системе Haar'а и, значит,

$$f(x) - S_{2^n}(x) = f(x) - S^{\chi}_{2^n}(x), \quad S_{2^n}(x) = S^{\chi}_{2^n}(x)$$

почти всюду. Но ряд Fourier функции $f(x)$ по системе Haar'а сходится почти всюду (как известно, система Haar'а является системой сходимости), поэтому из последнего равенства следует, что $S_{2^n}(x)$ сходятся почти всюду при $n \to \infty$, и для установления справедливости теоремы нам нужно лишь доказать, что

$$S_{2^n+h}(x) - S_{2^n}(x) = \sum_{i=1}^{h} c_{n,i}\, \varphi_{n,i}(x) \to 0$$

почти всюду при $n \to \infty$ равномерно по индексам h, $1 \leqslant h \leqslant 2^n$.

Применяя к $\sum_{i=1}^{h} c_{n,i}\varphi_{n,i}(x)$ преобразование Абеля, получим

$$\sum_{i=1}^{h} c_{n,i}\varphi_{n,i}(x)=\sum_{n=1}^{h}(c_{n,i}-c_{n,i+1})A_{n,i}(x)+c_{n,h+1}\cdot A_{n,h}(x).$$

Второе слагаемое в правой части, согласно предыдущей лемме, стремится к нулю почти всюду на $[0,1)$; для первого же слагаемого мы можем написать

$$\left|\sum_{i=1}^{h}(c_{n,i}-c_{n,i+1})A_{n,i}(x)\right|\leqslant\sum_{i=1}^{h}(c_{n,i}-c_{n,i+1})\,|A_{n,i}(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{1\leq i\leq h}|A_{n,i}(x)|\cdot\sum_{i=1}^{h}(c_{n,i}-c_{n,i+1})\leqslant|A_{n,j}(x)|\cdot c_{n,1},$$

что, согласно той же лемме, стремится к нулю почти всюду на $[0,1)$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА. *Если* $c_m\geqslant c_{m+1}>0$ $(m=1,2,\ldots)$ *и* $c_m\neq o\left(\frac{1}{\log m}\right)$, *то ряд* $\sum_{m=1}^{\infty}c_m\varphi_m(x)$ *расходится почти всюду на* $[0,1)$.

Доказательство. Положим

$$M_k=\sum_{n=2k}^{2^{k+2}}E_n^{(k)},\tag{22}$$

где $E_n^{(k)}$ $(n\geqslant k)$ обозначает, как и выше, множество точек, принадлежащих интервалам (14). Мы утверждаем, что

$$|M_k|>\frac{1}{4}\tag{23}$$

для всех $k=2,3,4,\ldots$ Докажем это.

Мы уже отмечали, что $|E_n^{(k)}|=\frac{1}{2^k}$. Введем множества

$$Q_n^{(k)}=\left\{\sum_{i=k}^{n}E_i^{(k)}\right\}-\left\{\sum_{i=k}^{n-1}E_i^{(k)}\right\}\quad(n=k+1,\ k+2,\ldots).$$

Множества $Q_n^{(k)}$ $(n=k+1,\ k+2,\ldots)$ попарно не пересекаются, и мы можем написать

$$\left.\begin{aligned}M_k&=E_{2k}^{(k)}+\sum_{n=2k+1}^{2^{k+2}}Q_n^{(k)},\\|M_k|&\geqslant\sum_{n=2k+1}^{2^{k+2}}|Q_n^{(k)}|.\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Докажем справедливость неравенства

$$|Q_n^{(k)}|\geqslant\frac{2^{k+1}+2k-1-n}{2^{2k+2}}\quad\text{при } n>2k,\tag{25}$$

из которого уже легко будет получить неравенство (23).

Обозначим через $\delta_\lambda^{(n)}$ λ-й интервал множества $E_n^{(k)}$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ $\ldots, 2^{n-k})$ (сравнивая с обозначениями (14), имеем: $\lambda = l+1$).

При $n > i \geqslant k$ интервал $\delta_\lambda^{(n)}$ либо находится внутри некоторого $\delta_\mu^{(i)}$, либо $\delta_\lambda^{(n)}$ не пересекается с $E_i^{(k)}$. Действительно, множество $E_n^{(k)}$ состоит из интервалов типа $\left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right)$, а $E_i^{(k)}$ — из интервалов типа $\left(\frac{q}{2^i}, \frac{q+1}{2^i}\right)$, но при $n > i$ все концы вторых интервалов являются в то же время концами и для некоторых из первых интервалов, поэтому интервалы $\left(\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}\right)$ и $\left(\frac{q}{2^i}, \frac{q+1}{2^i}\right)$ либо не пересекаются, либо первый содержится во втором. Отсюда следует, что множество $Q_n^{(k)}$ состоит из интервалов $\delta_\lambda^{(n)}$, не попавших ни в какой интервал ни одного из множеств $E_i^{(k)}$ $(i = k, k+1, \ldots, n-1)$.

Дальнейший подсчет разобьем на несколько пунктов.

1. При $n > i \geqslant k$ в интервалы множества $E_i^{(k)}$ попадает по равному числу интервалов множества $E_n^{(k)}$.

Это следует из строго равномерного расположения интервалов $\delta_\lambda^{(n)}$ и того, что левый конец $\frac{(\mu-1)\cdot 2^k}{2^i}$ каждого интервала $\delta_\mu^{(i)}$ является в то же время левым концом некоторого $\delta_\lambda^{(n)}$:

$$\frac{(\mu-1)\cdot 2^k}{2^i} = \frac{(\mu-1)\cdot 2^{n-i}\cdot 2^k}{2^n} = \frac{(\lambda-1)\,2^k}{2^n}.$$

2. При $n > k$ все интервалы $\delta_\lambda^{(n)}$ с нечетными номерами λ содержатся в множестве $E_{n-1}^{(k)}$.

Действительно, левые концы указанных интервалов имеют вид $\frac{(\lambda-1)\cdot 2^k}{2^n}$, где $\lambda-1$—четное число, поэтому

$$\frac{(\lambda-1)\cdot 2^k}{2^n} = \frac{\frac{\lambda-1}{2}\cdot 2^k}{2^{n-1}} = \frac{(\mu-1)\,2^k}{2^{n-1}}$$

и, значит, $\delta_\lambda^{(n)} \subset \delta_\mu^{(n-1)}$.

3. При $n > 2k$ наибольший индекс множества $E_i^{(k)}$ $(k \leqslant i < n)$, в которое попадает хоть один интервал $\delta_\lambda^{(n)}$ с четным номером λ, есть $i = n-k-1$.

В самом деле, при $i \geqslant n-k$ правый конец интервала $\delta_1^{(i)}$ имеет абсциссу $\frac{1}{2^i}$, а левый конец интервала $\delta_2^{(n)}$ имеет абсциссу $\frac{2^k}{2^n} = \frac{1}{2^{n-k}} \geqslant \frac{1}{2^i}$ и, значит, $\delta_1^{(i)}$ содержит лишь один интервал множества $E_n^{(k)}$ (именно, $\delta_1^{(n)}$).

Согласно пункту 1, отсюда следует, что и все интервалы $\delta_\mu^{(i)}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, 2^{i-k})$ содержат лишь по одному интервалу множества $E_n^{(k)}$, и множество $E_i^{(k)}$ содержит всего 2^{i-k} $(i-k \geqslant n-2k > 0)$ интервалов $\delta^{(n)}$.

Разность между номерами λ_ν интервалов $\delta_{\lambda_\nu}^{(n)}$, содержащихся в двух соседних интервалах $\delta_\mu^{(i)}$ и $\delta_{\mu+1}^{(i)}$, равна, очевидно, $2^{n-k} : 2^{i-k} = 2^{n-i}$

$(n-i>0)$ — четному числу и, значит, все эти номера λ_j нечетные, так как $\lambda_1=1$.

4. При $n>k$ каждый интервал $\delta_\lambda^{(n)}$, попавший в $\sum\limits_{i=k}^{n-1} E_i^{(k)}$, обязательно попадет либо в $E_k^{(k)}$, либо в какой-то интервал с *четным* номером одного из $E_i^{(k)}$ $(i=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n-1)$.

Это объясняется тем, что если $\delta_\lambda^{(n)}$ попадает в нечетный интервал $\delta^{(p)}$ множества $E_p^{(k)}$ $(k<p<n)$, то, согласно пункту 2, интервал $\delta^{(p)}$ сам содержится в некотором интервале $\delta^{(p-1)}$ множества $E_{p-1}^{(k)}$; если и $\delta^{(p-1)}$ имеет нечетный номер, то он, в свою очередь, содержится в интервале $\delta^{(p-2)}$ множества $E_{p-2}^{(k)}$. Продолжая, в случае необходимости, это рассуждение, мы убедимся в справедливости пункта 4.

5. При $n>2k$ в множество $E_k^{(k)}$ попадает 2^{n-2k-1} четных интервалов множества $E_n^{(k)}$ с суммарной длиной $\frac{1}{2^{2k+1}}$.

Действительно, множество $E_k^{(k)}$ состоит из одного интервала $\left(0, \frac{1}{2^k}\right)$. Расстояние между левыми концами двух соседних интервалов множества $E_n^{(k)}$ равно $\frac{1}{2^{n-k}}$ и, значит, в $E_k^{(k)}$ попадет всего $\frac{1}{2^k}:\frac{1}{2^{n-k}}=2^{n-2k}$ интервалов множества $E_n^{(k)}$, из них 2^{n-2k-1} с четными номерами, и суммарная длина последних равна $\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-2k-1}=\frac{1}{2^{2k+1}}$.

6. При $n>2k$ и $k<i\leqslant n-k-1$ в четные интервалы множества $E_i^{(k)}$ попадают четные интервалы множества $E_n^{(k)}$ с суммарной длиной $\frac{1}{2^{2k+2}}$.

Действительно, в один интервал множества $E_i^{(k)}$ попадет $\frac{1}{2^i}:\frac{1}{2^{n-k}}=2^{n-k-i}$ интервалов множества $E_n^{(k)}$, из них $2^{n-k-i-1}$ четных. Значит, во все интервалы множества $E_i^{(k)}$ попадут четные интервалы множества $E_n^{(k)}$ с суммарной длиной $2^{i-k}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot 2^{n-k-i-1}=\frac{1}{2^{2k+1}}$ и, значит, в четные интервалы множества $E_i^{(k)}$ попадут четные интервалы множества $E_n^{(k)}$ с суммарной длиной $\frac{1}{2^{2k+2}}$.

При $n>2k$ мера множества $Q_n^{(k)}$ равна мере $E_n^{(k)}$ за вычетом суммарной длины всех интервалов множества $E_n^{(k)}$, попавших в $\sum\limits_{i=k}^{n-1} E_i^{(k)}$. Но суммарная длина этих вычитаемых интервалов равна, согласно пунктам 2 и 4, сумме длин всех нечетных интервалов множества $E_n^{(k)}$ плюс сумма длин четных интервалов множества $E_n^{(k)}$, попавших в $E_k^{(k)}$ и в *четные* интервалы множества $E_i^{(k)}$, где индекс i, согласно пункту 3, принимает значения $i=k+1,\ k+2,\ldots,n-k-1$.

Учитывая сделанные в пунктах 5 и 6 подсчеты, окончательно получаем

$$|Q_n^{(k)}|\geqslant\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}-\frac{1}{2^{2k+2}}(n-2k-1)=\frac{2^{k+1}+2k-1-n}{2^{2k+2}},$$

и неравенство (25) доказано.

Так как при $k \geqslant 0$

$$2^{k+2} > 2^{k+1} + 2k - 1,$$

то из (24) и (25) получаем

$$|M_k| \geqslant \sum_{n=2k+1}^{2^{k+1}+2k-1} |Q_n^{(k)}| \geqslant \sum_{n=2k+1}^{2^{k+1}+2k-1} \frac{2^{k+1}+2k-1-n}{2^{2k+2}} = \frac{1}{2^{2k+2}} \sum_{m=0}^{2^{k+1}-2} m =$$
$$= \frac{1}{2^{2k+2}} \cdot \frac{(2^{k+1}-2)(2^{k+1}-1)}{2} = \frac{2^{2k+2} - 3 \cdot 2^{k+1} + 2}{2^{2k+3}} > \frac{1}{2} - \frac{3}{2^{k+2}} > \frac{1}{4},$$

где последнее неравенство имеет место для всех $k \geqslant 2$, и (23) доказано.

Теперь уже нетрудно убедиться в справедливости теоремы. Согласно условию, имеется число $\alpha > 0$ и последовательность возрастающих номеров m_p таких, что $c_{m_p} \cdot \log m_p > \alpha$. Определим целые числа k_p из условий

$$2^{k_p+3} < \log m_p \leqslant 2^{k_p+4}$$

(очевидно, $k_p \to \infty$ при $p \to \infty$). Тогда (считая для простоты, что логарифм берется по основанию 2) имеем:

$$m_p > 2^{2^{k_p+3}} > 2^n + 2^{k_p} \text{ при } n \leqslant 2^{k_p+2}, \tag{26}$$
$$c_{m_p} > \frac{\alpha}{\log m_p} \geqslant \frac{\alpha}{2^{k_p+4}} = \frac{\alpha}{16} \cdot \frac{1}{2^{k_p}}. \tag{27}$$

Если $x \subset M_{k_p}$ (т. е. $x \subset E_{n_p}^{(k_p)}$ для некоторого номера n_p, $2k_p \leqslant n \leqslant 2^{k_p+2}$), то, принимая во внимание (15) и (26), получаем

$$\left|\sum_{i=1}^{2^{k_p}} c_{n_p,i}\, \varphi_{n_p,i}(x)\right| = \sum_{i=1}^{2^{k_p}} c_{n_p,i} \geqslant 2^{k_p} \cdot c_{m_p} > \frac{\alpha}{16}.$$

Отсюда следует, что на множестве $M = \overline{\lim\limits_{p\to\infty}} M_{k_p}$ ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m \varphi_m(x)$ расходится. Покажем, что $|M| = 1$. Множество M записывается в виде

$$M = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{p=i}^{\infty} M_{k_p},$$

и нам нужно лишь показать, что $\left|\sum\limits_{p=i}^{\infty} M_{k_p}\right| = 1$ для всякого $i > 0$. Не ограничивая общности, можно, очевидно, предполагать, что

$$k_{p+1} \geqslant 2^{k_p+2} \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Множество $E_{2^{k_p+2}}^{(k_p)}$ (последнее из множеств $E_n^{(k_p)}$, входящих в M_{k_p}) состоит из интервалов длины $\frac{1}{2^{2^{k_p+2}}}$; это — минимальная длина интервалов для всех $E_n^{(k_q)}$ $(n = 2k_q, \ldots, 2^{k_q+2})$, $q = 1, 2, \ldots, p$. Расстояние же между концами соседних интервалов множества $E_{2k_{p+1}}^{(k_{p+1})}$ (первое из множеств $E_n^{(k_{p+1})}$, входящих в $M_{k_{p+1}}$) равно $\frac{1}{2^{k_{p+1}}} \leqslant \frac{1}{2^{2^{k_p+2}}}$, и, значит, $M_{k_{p+1}}$ имеет периоды: $\frac{1}{2^{k_{p+1}}}$, и тем более, $\frac{1}{2^{2^{k_p+2}}}$ (как кратное предыдущей величи-

ны). Отсюда следует, что мера части $M_{k_{p+1}}$, попавшей в $\sum_{q=i}^{p} M_{k_q}$, равна $\left|\sum_{q=i}^{p} M_{k_q}\right| \cdot |M_{k_{p+1}}|$ и, значит,

$$\left|\sum_{p=i}^{\infty} M_{k_p}\right| = \left|M_{k_i}\right| + \sum_{p=i}^{\infty} \left\{|M_{k_{p+1}}| - |M_{k_{p+1}}| \cdot \left|\sum_{q=i}^{p} M_{k_q}\right|\right\} =$$

$$= |M_{k_i}| + \sum_{p=i}^{\infty} |M_{k_{p+1}}| \left\{1 - \left|\sum_{q=i}^{p} M_{k_q}\right|\right\}. \qquad (28)$$

Если бы мы теперь предположили, что $\left|\sum_{p=i}^{\infty} M_{k_p}\right| = 1 - \eta_i$, где $\eta_i > 0$, то тогда

$$\left|\sum_{q=i}^{p} M_{k_q}\right| \leqslant \left|\sum_{q=i}^{\infty} M_{k_q}\right| = 1 - \eta_i \quad (p = i,\ i+1, \ldots),$$

$$1 - \left|\sum_{q=i}^{p} M_{k_q}\right| \geqslant \eta_i \quad (p = i,\ i+1, \ldots)$$

и из (28), принимая во внимание (23), следовало бы

$$\left|\sum_{p=i}^{\infty} M_{k_p}\right| \geqslant \left|M_{k_i}\right| + \sum_{p=i}^{j} \left|M_{k_{p+1}}\right| \left\{1 - \left|\sum_{q=i}^{p} M_{k_q}\right|\right\} >$$

$$> \frac{1}{4} + \sum_{p=i}^{j} \frac{1}{4}\eta_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\eta_i (j - i + 1),$$

что невозможно, так как правая часть неограниченно возрастает при $j \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\left|\sum_{p=i}^{\infty} M_{k_p}\right| = 1 \quad (i = 1,\ 2, \ldots),$$

и теорема доказана.

Поступило
29.V.1947

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 193–212

А. И. ГУСЕЙНОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком* **М. В. Келдышем**)

В работе изучаются нелинейные сингулярные уравнения вида (1). Методом неподвижной точки доказывается существование решения этого уравнения, а при дополнительных ограничениях, налагаемых на функцию $K(x, s, u(s))$, методом последовательных приближений доказывается существование и единственность решения.

Введение

В настоящей статье изучается нелинейное сингулярное интегральное уравнение вида

$$u(x) = \lambda \int_a^b \frac{K(x, s, u(s))}{s-x} ds \qquad (1)$$

для малого значения параметра λ, где (x, s) — точка двумерного пространства, и интеграл понимается в смысле главного значения по Коши (ограничения, которые мы налагаем на функцию $K(x, s, u(s))$ даются в начале § 2)*.

Мы будем рассматривать пространство H, элементы которого удовлетворяют условиям:

$$|u(x)| \geqslant \frac{k}{|x-a|^\alpha |x-b|^\beta},$$

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| \leqslant \frac{k}{|x-a|^\alpha |x+\Delta x-b|^\beta} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x-b|}\right)^\delta,$$

где $k > 1$ — некоторая константа, $0 < \alpha, \beta, \alpha+\delta, \beta+\delta < 1$ и

$$|\Delta x| < \min\left\{\frac{|x-a|}{4}, \frac{|x-b|}{4}\right\}.$$

Очевидно, множество H выпуклое, т. е. если f и g принадлежат к H, то $jf + \tau g$ также принадлежит к H; здесь $j + \tau = 1$, $j > 0$, $\tau > 0$.

В пространство H вводится следующая метрика:

$$\rho(u, v) = \max |u - v| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta}. \qquad (*)$$

---

* Ранее [см. (1)] мы изучали нелинейные сингулярные интегральные уравнения с периодическим ядром.

Доказательство существования решения уравнения (1) будет основано на принципе Шаудера ([2]). Далее, при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на функцию $K(x, s, u(s))$, методом последовательных приближений будет доказано существование и единственность решения уравнения (1).

§ 1. Основные леммы

ЛЕММА 1. *Если в (a, b) функция $f(x, s)$ удовлетворяет условиям*

$$|f(x, s)| < \frac{A}{|s-a|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.1}$$

$$|f(x+\Delta x, s+\Delta s) - f(x,s)| < \frac{A}{|s-a|^{\alpha+\delta}}(|\Delta x|^{\delta_1} + |\Delta s|^{\delta}), \; 0 < \delta < \delta_1 < 1, \tag{1.2}$$

то при $|x-a| < \frac{4}{7}(b-a)$ и $0 < \Delta x < \frac{|x-a|}{4}$ функция

$$w(x) = \int_a^b \frac{f(x, s)}{s-x} ds$$

будет удовлетворять условиям

$$|w(x)| < \frac{cA}{|x-a|^{\alpha}}, \tag{1.3}$$

$$|w(x+\Delta x) - w(x)| < \frac{cA}{|x-a|^{\alpha}} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}, \tag{1.4}$$

где c — числовая константа, не зависящая от A.

Доказательство. Докажем сначала справедливость неравенства (1.3). Для этой цели разобьем промежуток (a, b) на три части: $(a, x-\varepsilon)$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $(x+\varepsilon, b)$. Тогда

$$w(x) = \int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x, s)}{s-x} ds + \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{f(x, s) - f(x, x)}{s-x} ds + \int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{f(x, s)}{s-x} ds. \tag{1.5}$$

Пусть $\varepsilon = \frac{|x-a|}{2}$; нетрудно видеть, что в промежутке $\left(a, x-\frac{|x-a|}{2}\right)$

$$|s-x| > \frac{|x-a|}{2}. \tag{1.6}$$

Следовательно, в силу (1.1) и (1.6),

$$\left|\int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(x, s)}{s-x} ds\right| < \frac{2^{\alpha}}{1-\alpha} \cdot \frac{A}{|x-a|^{\alpha}}. \tag{1.7}$$

Заметим, что в промежутке $(x+\varepsilon, b)$

$$|s-x| > \frac{|s-a|}{3}, \tag{1.8}$$

следовательно, принимая во внимание (1.1), для третьего интеграла в правой части неравенства (1.5) получаем

$$\left|\int_{x+\varepsilon}^{b} \frac{f(x, s)}{s-x} ds\right| < \frac{3 \cdot 2^{\alpha}}{\alpha} \cdot \frac{A}{|x-a|^{\alpha}}. \tag{1.9}$$

Оценим теперь второй интеграл в правой части (1.5). В силу (1.2),

$$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{f(x, s)-f(x, x)}{s-x} ds\right| < \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{A\,|x-s|^{\delta-1}}{|s-a|^{\alpha+\delta}} ds. \tag{1.10}$$

Так как в промежутке $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

$$|s-a| > \frac{|x-a|}{2},$$

то из (1.10) получаем

$$\left|\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{f(x, s)-f(x, x)}{s-x} ds\right| < \frac{l \cdot A}{|x-a|^{\alpha}}, \tag{1.11}$$

где

$$l = \frac{2^{\alpha+\delta}+1}{2^{\alpha} \cdot \delta}.$$

Итак, из (1.5), (1.7), (1.8), (1.11) получаем

$$|w(x)| < \frac{\bar{c} A}{|x-a|^{\alpha}}, \tag{1.12}$$

где

$$\bar{c} = \frac{2^{\alpha}}{1-\alpha} + \frac{3 \cdot 2^{\alpha}}{\alpha} + l.$$

Докажем теперь справедливость неравенства (1.4). Разность $w(x+\Delta x)-w(x)$ можно представить в виде

$$w(x+\Delta x)-w(x) = \int_{\Delta_1} \frac{\Delta x \cdot f(x+\Delta x, s)\, ds}{(s-x-\Delta x)(s-x)} + \int_{\Delta_2} \frac{\Delta x \cdot f(x+\Delta x, s)\, ds}{(s-x-\Delta x)(s-x)} +$$

$$+\int_{\Delta_1} \frac{f(x+\Delta x, s)-f(x, s)}{s-x} ds + \int_{\Delta_2} \frac{f(x+\Delta x, s)-f(x, s)}{s-x} ds +$$

$$+\int_{\Delta} \left[\frac{f(x+\Delta x, s)}{s-x-\Delta x} - \frac{f(x, s)}{s-x}\right] ds, \tag{1.13}$$

где

$$\Delta_1 = \left(a, x-\frac{|x-a|}{2}\right), \quad \Delta_2 = \left(x+\Delta x+\frac{|x-a|}{2}, b\right),$$

$$\Delta = \left(x-\frac{|x-a|}{2}, x+\Delta x+\frac{|x-a|}{2}\right).$$

Обозначим интегралы в правой части (1.13) соответственно через J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 и оценим каждый из них в отдельности. Заметим, что когда $s \in \Delta_1$

$$|s-x-\Delta x| > |s-x| > \frac{|x-a|}{2}. \tag{1.14}$$

Пользуясь неравенствами (1.1) и (1.14), получаем

$$|J_1| < \frac{2^{\alpha+1}}{1-\alpha} \cdot \frac{A}{|x-a|^{\alpha}} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}. \tag{a$_1$}$$

Оценим величину $J_2=\int\limits_{\Delta_2}\frac{\Delta x\cdot f(x+\Delta x, s)\,ds}{(s-x-\Delta x)(s-x)}$. В промежутке Δ_2

$$|s-a|>|s-x|>|s-x-\Delta x|, \tag{1.15}$$

следовательно, на основании (1.1) и (1.15),

$$|J_2|<\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot\frac{A}{|x-a|^\alpha}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta. \tag{a$_2$}$$

Пользуясь неравенствами (1.2) и (1.14), оценим величину J_3:

$$|J_3|<\frac{2A|\Delta x|^{\delta_1}}{|x-a|}\left[\frac{|s-a|^{-\alpha-\delta+1}}{1-\alpha-\delta}\right]_a^{x-\frac{|x-a|}{2}}, \tag{a$_3$}$$

откуда

$$|J_3|<\frac{2^{\alpha+\delta}(b-a)^{\delta_1-\delta}}{1-\alpha-\delta}\cdot\frac{A}{|x-a|^\alpha}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta.$$

В силу (1.2) и (1.15), можно легко оценить величину J_4:

$$|J_4|<\int\limits_{x+\Delta x+\frac{|x-a|}{2}}^{b}\frac{|\Delta x|^{\delta_1}A\,ds}{|s-x|\cdot|s-a|^{\alpha+\sigma}}<\int\limits_{x+\Delta x-\frac{|x-a|}{2}}^{b}\frac{A|\Delta x|^{\delta_1}\,ds}{|s-x-\Delta x|^{\alpha+\delta+1}},$$

или

$$|J_4|<\frac{2^{\alpha+\delta}(b-a)^{\delta_1-\delta}}{\alpha+\delta}\cdot\frac{A}{|x-a|^\alpha}\cdot\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta. \tag{a$_4$}$$

Остается оценить величину

$$|J_5|=\int\limits_{\Delta}\left[\frac{f(x+\Delta x, s)}{s-x-\Delta x}-\frac{f(x, s)}{s-x}\right]ds.$$

Нетрудно видеть, что J_5 можно представить в виде

$$J_5=\int\limits_{\Delta}\frac{f(x+\Delta x, s)-f(x, s)}{s-x-\Delta x}ds-\int\limits_{\Delta}\frac{f(x, s)-f(x, x)}{s-x}ds+$$
$$+\int\limits_{\Delta}\frac{f(x+\Delta x, x+\Delta x)}{s-x-\Delta x}ds+\int\limits_{\Delta}\frac{f(x, s)}{s-x}ds. \tag{1.16}$$

Обозначив интегралы в правой части (1.16) соответственно через $J_5^{(1)}$, $J_5^{(2)}$, $J_5^{(3)}$, $J_5^{(4)}$, оценим каждый из них в отдельности.

$$J_5^{(4)}=\int\limits_{\Delta}\frac{f(x, s)}{s-x}ds=\int\limits_{x-\frac{|x-a|}{2}}^{x+\frac{|x-a|}{2}}\frac{f(x, s)}{s-x}ds+\int\limits_{x+\frac{|x-a|}{2}}^{x+\Delta x+\frac{|x-a|}{2}}\frac{f(x, s)}{s-x}ds. \tag{1.17}$$

Величина первого интеграла в правой части (1.17), в силу симметрии, равна нулю, а в промежутке $\left(x+\frac{|x-a|}{2},\ x+\Delta x+\frac{|x-a|}{2}\right)$

$$|s-x|>\frac{|x-a|}{2}. \tag{1.18}$$

Следовательно, в силу (1.1), (1.17) и (1.18),

$$|J_5^{(4)}|<\frac{2}{|x-a|}\cdot\frac{A|\Delta x|}{|x-a|}<\frac{2A}{|x-a|^\alpha}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta. \tag{b$_4$}$$

Далее,

$$J_5^{(3)} = \int\limits_{x-\frac{|x-a|}{2}}^{x+\Delta x-\frac{|x-a|}{2}} \frac{f(x+\Delta x,\, x+\Delta x)}{s-x-\Delta x}\, ds + \int\limits_{x+\Delta x-\frac{|x-a|}{2}}^{x+\Delta x+\frac{|x-a|}{2}} \frac{f(x+\Delta x,\, x+\Delta x)}{s-x-\Delta x}\, ds.$$

В силу симметрии, второй интеграл равен нулю, а в промежутке $\left(x-\frac{|x-a|}{2},\; x+\Delta x-\frac{|x-a|}{2}\right)$

$$|s-x-\Delta x| > \frac{|x-a|}{2}, \tag{1.19}$$

следовательно, в силу (1.1) и (1.19),

$$|J_5^{(3)}| < \frac{2A}{|x-a|^\alpha}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta. \tag{b$_3$}$$

Прежде чем оценить $J_5^{(1)}$ и $J_5^{(2)}$, заключим точки x и $x+\Delta x$ внутри интервала длины $2\Delta x$ и представим разность $J_5^{(1)}-J_5^{(2)}$ в следующем виде:

$$J_5^{(1)}-J_5^{(2)} = \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{3\Delta x}{2}} \frac{f(x+\Delta x,\, s)-f(x+\Delta x,\, x+\Delta x)}{s-x-\Delta x}\, ds -$$

$$-\int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{3\Delta x}{2}} \frac{f(x,\, s)-f(x,\, x)}{s-x}\, ds + \int\limits_{\Delta'+\Delta''} \frac{f(x+\Delta x,\, s)-f(x+\Delta x,\, x+\Delta x)}{s-x-\Delta x}\, ds -$$

$$-\int\limits_{\Delta'+\Delta''} \frac{f(x,\, s)-f(x,\, x)}{s-x}\, ds, \tag{1.20}$$

где

$$\Delta' = \left(x-\frac{|x-a|}{2},\; x-\frac{\Delta x}{2}\right), \quad \Delta'' = \left(x+\frac{3\Delta x}{2},\; x+\Delta x+\frac{|x-a|}{2}\right).$$

Обозначив интегралы в правой части (1.20) соответственно через $J_{5,1}^{(1)}$, $J_{5,1}^{(1)}$, $J_{5,2}^{(1)}$, $J_{5,2}^{(2)}$ и заметив, что в промежутке $\left(x-\frac{|x-a|}{2},\; x+\frac{3\Delta x}{2}\right)$

$$|s-a| > \frac{|x-a|}{2}, \tag{1.21}$$

$$|x+\Delta x-a| > \frac{|x-a|}{2}, \tag{1.22}$$

в силу (1.2), (1.21) и (1.22), будем иметь

$$|J_{5,1}^{(1)}| < \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\Delta x} \frac{A\,|s-x-\Delta x|^\delta\, ds}{|s-x-\Delta x|\cdot|s-a|^{\alpha+\delta}} + \int\limits_{x+\Delta x}^{x+\frac{3\Delta x}{2}} \frac{A\,|s-x-\Delta x|^\delta\, ds}{|s-x-\Delta x|\cdot|x+\Delta x-a|^{\alpha+\delta}}.$$

Отсюда получаем

$$|J_{5,1}^{(1)}| < \frac{2^\alpha(3^\delta+1)}{\delta}\cdot\frac{A}{|x-a|^\alpha}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta. \tag{b$_1^{(1)}$}$$

Оценим величину

$$|J^{(2)}_{5,1}| = \left| \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x+\frac{3\Delta x}{2}} \frac{f(x,s)-f(x,x)}{s-x}\,ds \right|. \tag{1.23}$$

Принимая во внимание (1.2) и (1.21), из (1.22) находим

$$|J^{(2)}_{5,1}| < \int\limits_{x-\frac{\Delta x}{2}}^{x} \frac{A\cdot|x-s|^\delta\,ds}{|x-s|\cdot|s-a|^{\alpha+\delta}} + \int\limits_{x}^{x+\frac{3\Delta x}{2}} \frac{A\,|s-x|^\delta\,ds}{|s-x|\cdot|x-a|^{\alpha+\delta}},$$

или

$$|J^{(2)}_{5,1}| < \frac{2^{\alpha+\delta}+3^\delta}{2^\delta\cdot\delta}\cdot\frac{A}{|x-a|^\alpha}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta. \tag{b$_1^{(2)}$}$$

Прежде чем оценить $J^{(1)}_{5,2}$ и $J^{(2)}_{5,2}$, представим их разность в виде:

$$J^{(1)}_{5,} - J^{(2)}_{5,} = \int\limits_{\Delta'} \frac{\Delta x\,[f(x,s)-f(x,x)]}{(s-x-\Delta x)(s-x)}\,ds + \int\limits_{\Delta'} \frac{f(x+\Delta x,s)-f(x,s)}{s-x-\Delta x}\,ds -$$

$$-\int\limits_{\Delta'} \frac{f(x+\Delta x,x+\Delta x)-f(x,x)}{s-x-\Delta x}\,ds + \int\limits_{\Delta''} \frac{\Delta x\cdot[f(x+\Delta x,s)-f(x+\Delta x,x+\Delta x)]}{(s-x-\Delta x)(s-x)}\,ds +$$

$$+\int\limits_{\Delta''} \frac{f(x+\Delta x,s)-f(x,s)}{s-x}\,ds - \int\limits_{\Delta''} \frac{f(x+\Delta x,x+\Delta x)-f(x,x)}{s-x}\,ds \tag{l}$$

или

$$I = I_1 + I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6, \tag{l$'$}$$

где $I, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ означают, соответственно, разность $J^{(1)}_{5,2} - J^{(2)}_{5,2}$ и интегралы, стоящие в правой части (l). Оценим каждый из них в отдельности. В промежутке Δ'

$$|s-x-\Delta x| > |s-x|,\quad x+\Delta x > s,\quad |s-a| > \frac{|x-a|}{2}. \tag{1.24}$$

Следовательно, в силу (1.2) и (1.24),

$$|I_1| < \int\limits_{x-\frac{|x-a|}{2}}^{x-\frac{\Delta x}{2}} \frac{A\,|\Delta x|\,|s-x|^\delta\,ds}{|s-x|^2\,|s-a|^{\alpha+\delta}}$$

или

$$|I_1| < \frac{2^{\alpha+1}}{1-\delta}\cdot\frac{A}{|x-a|^\alpha}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta. \tag{l$'_1$}$$

В промежутке Δ''

$$|s-x| > |s-x-\Delta x|,\quad s > x+\Delta x,\quad |x+\Delta x-a| > |x-a|. \tag{1.25}$$

Следовательно, аналогично предыдущему,

$$|I_4| < \frac{2^{1-\delta}}{1-\delta}\cdot\frac{A}{x-a|^\alpha}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^\delta. \tag{l$'_4$}$$

Далее,

$$|I_2| < \frac{2^{\alpha+\delta} A |\Delta x|^{\delta_1}}{|x-a|^{\alpha+\delta}} [-\log|x+\Delta x - s|]_{x-\frac{|x-a|}{2}}^{x-\frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\delta} A |\Delta x|^{\delta}}{|x-a|^{\alpha+\delta}} |\Delta x|^{\delta_1-\delta} \log\left(\frac{\Delta x + \frac{|x-a|}{2}}{3\frac{\Delta x}{2}}\right) < \frac{2^{\alpha+\delta} AM}{|x-a|^{\alpha}} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta},$$

где

$$|\Delta x|^{\delta_1-\delta} \log\left(\frac{x+\frac{|x-x|}{2}}{\frac{3\Delta x}{2}}\right) < M.$$

Итак,

$$|I_2| < 2^{\alpha+\delta} M \frac{A}{|x-a|^{\alpha}} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}. \qquad (\mathrm{l}'_{(2)})$$

Аналогично,

$$|I_5| < M \frac{A}{|x-a|^{\alpha}} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}. \qquad (\mathrm{l}'_{(5)})$$

Легко видеть, что

$$\int_{\Delta'} \frac{f(x+\Delta x, x+\Delta x) - f(x, x)}{x+\Delta x - s} ds - \int_{\Delta''} \frac{f(x+\Delta x, x+\Delta x) - f(x, x)}{s-x} ds = 0. \qquad (\mathrm{l}'_{(3)+(6)})$$

Таким образом, в силу $(\mathrm{l}'_{(1)})$, $(\mathrm{l}_{(2)})$, $(\mathrm{l}'_{(3)})$, $(\mathrm{l}'_{(4)})$, $(\mathrm{l}'_{(5)})$, $(\mathrm{l}'_{(3)+(6)})$, из (l') получаем

$$|I| < \frac{mA}{|x-a|^{\alpha}}, \qquad (\mathrm{b}_1^{(3)})$$

где

$$m = \frac{2^{\alpha+\delta} + 2^{1-\delta}}{1-\delta} + M(2^{\alpha+\delta} + 1).$$

Объединяя $(\mathrm{b}_1^{(1)})$, $(\mathrm{b}_1^{(2)})$, $(\mathrm{b}_1^{(3)})$, из (1.20) находим

$$|J_5^{(1)} - J_5^{(2)}| < \frac{\overline{m} \cdot A}{|x-a|^{\alpha}} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}, \qquad (\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$$

где

$$\overline{m} = \frac{2^{\alpha}(3^{\delta}+1)}{\delta} + \frac{2^{\alpha+\delta} + 3^{\delta}}{2^{\delta} \cdot \delta} + m.$$

Таким образом, в силу $(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$, (b_3), (b_4), из (1.16) имеем

$$|J_5| < \frac{\overline{\overline{m}} \cdot A}{|x-a|^{\alpha}} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta},$$

где $\overline{\overline{m}} = m + 4$.

Наконец, объединяя (a_1), (a_2), (a_3), (a_4), (a_5), из (1.13) получаем

$$|w(x+\Delta x) - w(x)| < \frac{\overline{\overline{c}} A}{|x-a|^{\alpha}} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}, \qquad (1.26)$$

где

$$\overline{\overline{c}} = \frac{2^{\alpha+2}}{1-\alpha^2} + \frac{2^{\alpha+\delta}(b-a)^{\delta_1-\delta}}{1-(\alpha+\delta)} + \frac{2^{\alpha+\delta}(b-a)^{\delta_1-\delta}}{\alpha+\beta} + \overline{\overline{m}}.$$

Пусть $c = \max\{\bar{c}, \bar{c}\}$; тогда из (1.12) и (1.25) следует

$$|w(x)| < \frac{cA}{|x-a|^{\alpha}}, \tag{1.3}$$

$$|w(x+\Delta x) - w(x)| < \frac{cA}{|x-a|^{\alpha}}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}, \tag{1.4}$$

что и требовалось доказать.

Заменив в нашем рассуждении a на b, легко докажем, что

$$|w(x)| < \frac{c'A'}{|x-b|^{\beta}}, \tag{1.3'}$$

$$|w(x+\Delta x) - w(x)| < \frac{c'A'}{|x+\Delta x-b|^{\beta}}\left(\frac{|\Delta x|}{|x+\Delta x-b|}\right)^{\delta}, \tag{1.4'}$$

где

$$|x-b| < \frac{4}{7}(b-a), \quad |\Delta x| < \frac{|x-b|}{4}.$$

Нетрудно показать, что имеет место следующая

ЛЕММА 2. *Если в (a, b) функция $f(x, s)$ удовлетворяет условиям*

$$|f(x, s)| < \frac{B}{|s-a|^{\alpha}|s-b|^{\beta}}, \tag{1.27}$$

$$|f(x+\Delta x, s+\Delta s) - f(x, s)| < \frac{B(|\Delta x|^{\delta_1} + |\Delta s|^{\delta})}{|s-a|^{\alpha+\delta}\cdot|s+\Delta s-b|^{\beta+\delta}}, \tag{1.28}$$

то функция

$$w(x) = \int_a^b \frac{f(x, s)\,ds}{s-x} \tag{1.29}$$

при всех x из (a, b) и $0 < \Delta x < \min\left\{\frac{|x-a|}{4}, \frac{|x-b|}{4}\right\}$ удовлетворяет условиям

$$|w(x)| < \frac{L\cdot B}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}}, \tag{1.30}$$

$$|w(x+\Delta x) - w(x)| < \frac{L\cdot B}{|x-a|^{\alpha}|x+\Delta x-b|^{\beta}}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a||x+\Delta x-b|}\right)^{\delta}. \tag{1.31}$$

Доказательство. Рассмотрим интервал $(a, b-\sigma)$ такой, что $\frac{4}{7}(b-\sigma-a) \geqslant \frac{b-a}{2}$. Отсюда $\sigma \leqslant \frac{b-a}{8}$. При доказательстве леммы будем полагать $\sigma = \frac{b-a}{10}$. Тогда, очевидно, $\frac{4}{7}(b-\sigma-a) > \frac{b-a}{2}$.

В промежутке $(a, b-\sigma)$ условия (1.27), (1.28) перепишутся так:

$$|f(x, s)| < \frac{B'B}{|s-a|^{\alpha}}, \tag{1.27'}$$

$$|f(x+\Delta x, s+\Delta s) - f(x, s)| < \frac{B'B(|\Delta x|^{\delta_1} + |\Delta s|^{\delta})}{|s-a|^{\alpha+\delta}}, \tag{1.28'}$$

где $B' = \max\{\sigma^{-\beta}, \sigma^{-\beta-\delta}\}$.

Разобьем промежуток (a, b) на две части: $(a, b-\sigma)$, $(b-\sigma, b)$ и представим $w(x)$ в виде

$$w(x)=w_1(x)+w_2(x),$$

где

$$w_1(x)=\int_a^b \frac{f(x, s)}{s-x}\, ds, \quad w_2(x)=\int_{b-\sigma}^b \frac{f(x, s)}{s-x}\, ds.$$

Применив лемму 1 к $w_1(x)$, получим

$$|w_1(x)|<\frac{C(BB')}{|x-a|^{\alpha}}.$$

Далее, оценим величину $w_2(x)$. Заметим, что в промежутке $(b-\sigma, b)$

$$|s-x|>\frac{27}{70}(b-a), \quad |s-a|>\frac{9(b-a)}{10}.$$

Следовательно, в силу (1.27) и последних двух неравенств,

$$|w_2(x)|=\left|\int_{b-\sigma}^b \frac{f(x, s)}{s-x}\, ds\right|<B\cdot B'' \tag{1.32}$$

где

$$B''=\frac{\sigma^{1-\delta}}{\frac{27}{70}(b-a)\left[\frac{9}{10}(b-a)\right]^{\alpha}(1-\beta)}.$$

Таким образом, для $w(x)$ имеет место неравенство

$$|w(x)|<\frac{C(B\cdot B')}{|x-a|^{\alpha}}+B\cdot B''. \tag{1.33}$$

Так как

$$\left(\frac{b-a}{|x-b|}\right)^{\beta}>1, \quad \frac{(b-a)^{\beta+\alpha}}{|x-a|^{\alpha}|x-b|^{\beta}}>1,$$

то из (1.33) получаем

$$|w(x)|<\frac{L_1\cdot B}{|x-a|^{\alpha}\,|x-b|^{\beta}}, \tag{1.34}$$

где

$$L_1=(b-a)^{\beta}\cdot(CB'+B'(b-a)^{\alpha}).$$

Оценим теперь разности $w(x)-w(x+\Delta x)$:

$$w(x+\Delta x)-w(x)=[w_1(x+\Delta x)-w_1(x)]+[w_2(x+\Delta x)-w_2(x)]. \tag{1.35}$$

По доказанному в лемме 1, оценка (1.35), в силу (1.28), годится и для $w_1(x)$:

$$|w_1(x+\Delta x)-w_1(x)|<\frac{C(B\cdot B')}{|x-a|^{\alpha}}\cdot\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}. \tag{1.36}$$

Остается оценить разности для $w_2(x)$:

$$w_2(x+\Delta x)-w_2(x)=\int_{b-\sigma}^b \frac{f(x+\Delta x, s)-f(x, s)}{s-x-\Delta x}\, ds+\int_{b-\sigma}^b \frac{\Delta x\cdot f(x, s)\, ds}{(s-x-\Delta x)(s-x)}.$$

Заметив, что в промежутке $(b-\sigma, b)$

$$|s-a|>\frac{9}{10}(b-a), \quad |s-x|>\frac{27}{70}(b-a), \quad |s-x-\Delta x|>\frac{18}{70}(b-a)$$

и функция $f(x, s)$ удовлетворяет условиям (1.27), (1.28), имеем

$$|w_2(x+\Delta x) - w_2(x)| < B''' \cdot B |\Delta x|^\delta, \tag{1.37}$$

где B''' — некоторая абсолютная константа.

Аналогично предыдущему, в силу (1.36) и (1.37), из (1.35) получаем

$$|w(x+\Delta x) - w(x)| < \frac{L_2 \cdot B \cdot |\Delta x|^\delta}{|x-a|^{\alpha+\delta} |x+\Delta x - b|^{\beta+\delta}}.$$

Выбирая общие константы $\overline{L} = \max\{L_1, L_2\}$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} |w(x)| &< \frac{\overline{L} \cdot B}{|x-a|^\alpha \cdot |x-b|^\beta}, \\ |w(x+\Delta x) - w(x)| &< \frac{\overline{L} \cdot B}{|x-a|^\alpha |x+\Delta x-b|^\beta} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x - b|}\right)^\delta. \end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Итак, мы доказали справедливость леммы в промежутке $(a, b-\sigma)$.

Заменив в том же рассуждении a на b, легко докажем, что

$$\left.\begin{aligned} |w(x)| &< \frac{\overline{\overline{L}} \cdot B}{|x-a|^\alpha \cdot |x-b|^\beta}, \\ |w(x+\Delta x) - w(x)| &< \frac{\overline{\overline{L}} \cdot B}{|x-a|^\alpha \cdot |x+\Delta x-b|^\beta} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x - b|}\right)^\delta. \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

Выбирая константы $L = \max\{\overline{L}, \overline{\overline{L}}\}$, в силу (*) и (**), окончательно во всем интервале (a, b) получим

$$|w(x)| < \frac{L \cdot B}{|x-a|^\alpha \cdot |x-b|^\beta},$$

$$|w(x+\Delta x) - w(x)| < \frac{L \cdot B}{|x-a|^\alpha \cdot |x+\Delta x-b|^\beta} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x - b|}\right)^\delta,$$

что и требовалось даказать.

§ 2. Применение принципа неподвижной точки к доказательству существования решения уравнения (1)

Выделим из пространства H некоторое выпуклое множество $H(k)$, элементы которого удовлетворяют условиям

$$|u(x)| < \frac{K}{|x-a|^\alpha \cdot |x-b|^\beta}, \tag{2.1}$$

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| < \frac{K}{|x-a|^\alpha \cdot |x-b|^\beta} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x - b|}\right)^\delta, \tag{2.2}$$

где $K > 1$ — некоторая константа.

Рассмотрим правую часть уравнения (1) как оператор $A(u)$:

$$A(u) \equiv \lambda \int_a^b \frac{K(x, s, u)}{s-x}\, ds. \tag{L}$$

При отображении выпуклого множества $H(k)$ посредством оператора $A(u)$ получается множество $\overline{H}(k)$, элементы которого будем обозначать через $U(x)$.

Для доказательства существования решения уравнения (1) докажем, прежде всего, некоторые вспомогательные леммы.

ЛЕММА 1. *Если в* (a, b) *функции* $K(x, s, u(s))$ *и* $u(x)$ *удовлетворяют условиям*

$$|K(x, s, u(s))| < \overline{A}|u| + \overline{B}, \tag{2.3}$$

где $\overline{A}$ *и* $\overline{B}$ — *некоторые константы,*

$$|K(x+\Delta x, s+\Delta s, u(s+\Delta s)) - K(x, s, u(s))| < \\ < A_1|\Delta x|^{\delta_1} + A_2|\Delta s|^{\delta} + A_3|u(s+\Delta s) - u(s)|, \tag{2.4}$$

$$|u(x)| \leqslant \frac{K}{|x-a|^{\alpha} \cdot |x-b|^{\beta}}, \tag{2.5}$$

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| \leqslant \frac{K}{|x-a|^{\alpha} \cdot |x+\Delta x-b|^{\beta}} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x-b|}\right)^{\delta}, \tag{2.6}$$

то оператор

$$U(x) = A(u) \equiv \lambda \int_a^b \frac{K(x, s, u(s))}{s-x}\, ds \tag{2.7}$$

при всех x *из* (a, b) *и* $0 < \Delta x < \min\left\{\frac{|x-a|}{4}, \frac{|x-b|}{4}\right\}$ *при достаточно малом* λ *преобразует множество* $H(k)$ *в* $H(k)$.

Доказательство. Докажем сперва, что функция $K(x, s, u(s))$ удовлетворяет условиям леммы 2 § 1.

Принимая во внимание (2.5) и (2.6), из (2.3) и (2.4) получаем

$$|K(x, s, u(s))| < \frac{M_1 \cdot K}{|s-a|^{\alpha} \cdot |s-b|^{\beta}}, \tag{2.8}$$

$$K(x+\Delta x, s+\Delta s, u(s+\Delta s), - K(x, s, u(s))| \leqslant \frac{M_2 K(|\Delta x|^{\delta_1} + |\Delta s|^{\delta})}{|s-a|^{\alpha+\delta} |s+\Delta s-b|^{\beta+\delta}}, \tag{2.9}$$

где

$$M_1 = \overline{A} + \overline{B}(b-a)^{\alpha+\beta}, \quad M_2 = \max\{A_1(b-a)^{\alpha+\beta+2\delta}, \quad A_3 + A_2(b-a)^{\alpha+\beta+2\delta}\}.$$

Из двух последних неравенств видно, что функция $K(x, s, u(s))$ удовлетворяет условиям леммы 2 § 1 с новой константой $C \cdot K$ вместо B, где $C = \max\{M_1, M_2\}$. Следовательно, применив лемму 2 § 1 к функции

$$U(x) = \lambda \int_a^b \frac{K(x, s, u(s))}{s-x}\, ds,$$

получим

$$|U(x)| \leqslant \frac{|\lambda| \cdot L \cdot CK}{|x-a|^{\alpha} \cdot |x-b|^{\beta}},$$

$$|U(x+\Delta x) - U(x)| \leqslant \frac{|\lambda| LCK}{|x-a|^{\alpha} \cdot |x+\Delta x-b|^{\beta}} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x-b|}\right)^{\delta}.$$

Полагая $|\lambda| \cdot L \cdot C = q < 1$, находим

$$|U(x)| \leqslant \frac{K}{|x-a|^{\alpha} \cdot |x-b|^{\beta}}, \tag{P$_1$}$$

$$|U(x+\Delta x) - U(x)| \leqslant \frac{K}{|x-a|^{\alpha} \cdot |x+\Delta x-b|^{\beta}} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x-b|}\right)^{\delta}. \tag{P$_2$}$$

Докажем теперь непрерывность оператора $A(u)$..

ЛЕММА 2. *Если в (a, b) функции $K(x, s, u(s))$ и $u(x)$ удовлетворяют условиям*

$$|K(x, s, u(s))| < A'(u) + B', \tag{2.3'}$$

$$|K(x+\Delta x, s+\Delta s, u(s+\Delta s)) - K(x, s, u(s))| <$$
$$< A_1' |\Delta x|^{\delta_1} + A_2' |\Delta s|^{\delta} + A_3' |u(s+\Delta s) - u(s)|, \tag{2.4'}$$

$$|u(x)| \leqslant \frac{K'}{|x-a|^{\alpha}}, \tag{2.5'}$$

$$|u(x+\Delta x) - u(x)| \leqslant \frac{K'}{|x-a|^{\alpha}} \cdot \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|}\right)^{\delta}, \tag{2.6'}$$

то при $|x-a| < \frac{4}{7}(b-a)$ *и* $0 < \Delta x < \frac{|x-a|}{4}$ *оператор* $A(u)$ *непрерывен.*

Доказательство. Введем следующую метрику:

$$\rho(u, v) = \max |u-v| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} \quad (\alpha > 0, \delta > 0, \alpha+\delta < 1).$$

Покажем, что из $\rho(u_n, u) \to 0$ следует $\rho(A(u_n), A(u)) \to 0$, другими словами, для каждого произвольно малого положительного числа ε можно определить такое положительное число γ, что из выполнения неравенства

$$|u_n - u| < \frac{\gamma}{|x-a|^{\alpha+\delta}} \tag{2.10}$$

следует

$$|A(u_n) - A(u)| < \frac{\varepsilon}{|x-a|^{\alpha+\delta}}. \tag{2.11}$$

Разобьем промежуток (a, b) на части:

$$\left(a, x-\frac{|x-a|}{2}\right), \quad \Delta = \left(x - \frac{x-a|}{2}, x+\frac{|x-a|}{2}\right), \quad \left(x+\frac{|x-a|}{2}, b\right).$$

Тогда разность $A(u_n) - A(u)$ можно представить в виде

$$A(u_n) - A(u) =$$
$$= \int_a^{x-\frac{|x-a|}{2}} \frac{K(x, s, u_n(s)) - K(x, s, u(s))}{s-x} ds + \int_\Delta \frac{[\ldots] ds}{s-x} + \int_{x+\frac{|x-a|}{2}}^{b} \frac{[\ldots] ds}{s-x}. \tag{F}$$

В силу (2.4'), (2.10) и того, что в промежутке $\left(a, x-\frac{|x-a|}{2}\right)$

$$|s-x| > \frac{|x-a|}{2},$$

имеем

$$\left|\lambda \int_a^{x-\frac{|x-a|}{2}} \frac{K(x, s, u_n(s)) - K(x, s, u(s))}{s-x} ds\right| < \frac{2|\lambda| A_3'}{1-\alpha-\delta} \cdot \frac{\gamma}{|x-a|^{\alpha+\delta}}. \tag{2.12}$$

Оценим третий интеграл в правой части (F). В промежутке $\left(x+\frac{|x-a|}{2}, b\right)$

$$|s-x| > \frac{|s-a|}{3},$$

следовательно, на основании (2.4′) и (2.10),

$$\left|\lambda\int\limits_{x+\frac{|x-a|}{2}}^{b}\frac{K(x,s,u_n(s))-K(x,s,u(s))}{s-x}\,ds\right|<\frac{3.2^{\alpha+\delta}|\lambda|A_3'}{\alpha+\delta}\cdot\frac{\gamma}{|x-a|^{\alpha+\delta}}. \tag{2.13}$$

Для оценки второго интеграла в правой части (F) представим его в виде:

$$\int\limits_{\Delta}\frac{K(x,s,u_n(s))-K(x,s,u(s))}{s-x}\,ds=\int\limits_{x-\frac{|x-a|}{2}}^{x-\eta}\frac{K(x,s,u_n(s))-K(x,s,u(s))}{s-x}\,ds+$$

$$+\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta}\frac{[K(x,s,u_n(s))-K(x,x,u_n(x))]-[K(x,s,u(s))-K(x,x,u(x))]}{s-x}\,ds+$$

$$+\int\limits_{x+\eta}^{b+\frac{|x-a|}{2}}\frac{K(x,s,u_n(s))-K(x,s,u(s))}{s-x}\,ds. \tag{2.14}$$

Если $s\in\left(x-\frac{|x-a|}{2},\ x-\eta\right)$, то

$$|s-a|>\frac{|x-a|}{2},$$

поэтому, на основании (2.4′) и (2.10),

$$\left|\int\limits_{x-\frac{|x-a|}{2}}^{x-\eta}\frac{K(x,s,u_n(s))-K(x,s,u(s))}{s-x}\,ds\right|<\frac{2^{\alpha+\delta}\cdot|\lambda|\cdot A_3'\cdot l\cdot\eta^{\delta}}{|x-a|^{\alpha+\delta}}, \tag{2.15}$$

где

$$\gamma=\eta,\quad l>\eta^{1-\delta}\log\frac{\frac{|x-a|}{2}}{\eta}.$$

Аналогично можно оценить третий интеграл в правой части (2.14):

$$\left|\lambda\int\limits_{x+\eta}^{x+\frac{|x-a|}{2}}\frac{K(x,s,u_n(s))-K(x,s,u(s))}{s-x}\,ds\right|<\frac{|\lambda|\cdot A_3'\cdot l\cdot\eta^{\delta}}{|x-a|^{\alpha+\delta}}. \tag{2.16}$$

В промежутке $(x-\eta,\ x+\eta)$

$$|s-a|>\frac{|x-a|}{2},$$

следовательно, в силу (2.4′) и (2.6′), для второго интеграла в правой части (2.14) имеем

$$\left|\lambda\int\limits_{x-\eta}^{x+\eta}\frac{[\ldots]-[\ldots]}{s-x}\,ds\right|<\frac{|\lambda|\,[2A_2'(b-a)^{\alpha+\delta}\;(2^{\alpha+\delta}A_3'+A_3')}{\delta}\cdot\frac{\eta^{\delta}}{|x-a|^{\alpha+\delta}}. \tag{2.17}$$

Соединяя (2.12), (2.13), (2.15), (2.16), (2.17) и считая $\eta<1$, из (F) получим

$$|A(u_n)-A(u)|<\frac{m\cdot\varepsilon}{|x-a|^{\alpha+\delta}}, \tag{N}$$

где

$$m=\frac{2|\lambda|\cdot A_3'}{1-\alpha-\delta}+\frac{3.2^{\alpha+\delta}|\lambda|A_3'}{\alpha+\delta}+l(1+2^{\alpha+\delta})|\lambda|A_3'+$$
$$+\frac{|\lambda|[2A_2'(b-a)^{\alpha+\delta}+A_3'(2^{\alpha+\delta}+1)]}{\delta}.$$

Подбирая $\eta<\sqrt[\delta]{\frac{\varepsilon}{m}}$, найдем

$$|A(u_n)-A(u)|<\frac{\varepsilon}{|x-a|^{\alpha+\delta}}. \qquad (2.18)$$

Отсюда следует непрерывность оператора $A(u)$.

ЛЕММА 3. *Если выполняются все условия леммы 1 настоящего параграфа, то оператор $A(u)$ непрерывен в смысле метрики* (*).

Доказательство. Рассмотрим интервал $(a, b-\sigma)$, где σ имеет то же значение, что и в лемме 2 § 1.

Покажем, что в выбранном таким образом промежутке оператор $A(u)$ непрерывен, т. е. из

$$|u_n-u|<\frac{\gamma}{|x-a|^{\alpha+\delta}\cdot|x-b|^{\beta+\delta}} \qquad (2.19)$$

следует

$$|A(u_n)-A(u)|<\frac{\varepsilon}{|x-a|^{\alpha+\delta}|x-b|^{\beta+\delta}}. \qquad (2.20)$$

Неравенство (2.19) имеет место в интервале (a, b), следовательно, оно справедливо и в интервале $(a, b-\sigma)$. С другой стороны, когда $x\in(a, b-\sigma)$, то $|x-a|\geqslant\sigma$. Потому из (2.19) получаем

$$|u_n-u|<\frac{\gamma\cdot\sigma^{-\beta-\delta}}{|x-a|^{\alpha+\delta}}, \qquad (2.21)$$

следовательно, в силу леммы 2, для $A_1(u)=\lambda\int\limits_a^{b-\sigma}\frac{K(x, s, u(s))}{s-x}ds$ справедливо [см. (N)]

$$|A_1(u_n)-A_1(u)|<\frac{m_1\cdot\varepsilon}{|x-a|^{\alpha+\delta}}. \qquad (2.22)$$

Оператор $A(u)$ можно представить в следующем виде:

$$A(u)=A_1(u)+\lambda\int\limits_{b-\sigma}^{b}\frac{K(x, s, u(s))}{s-x}ds,$$

откуда

$$A(u_n)-A(u)=A_1(u_n)-A_1(u)+\lambda\int\limits_{b-\sigma}^{b}\frac{K(x, s, u_n)-K(x, s, u)}{s-x}ds. \qquad (2.23)$$

Оценим интеграл в правой части (2.23). На основании условий (2.19), (2.4) и ввиду того, что в промежутке $(a, b-\sigma)$

$$|s-a|>\frac{9(b-a)}{10}, \quad |s-x|>\frac{27}{70}(b-a),$$

имеем

$$\left|\lambda\int\limits_{b-\sigma}^{b}\frac{K(x, s, u_n)-K(x, s, u)}{s-x}ds\right|<A_3'm_2\eta^{\delta}, \qquad (2.24)$$

где

$$m_2 = \frac{|\lambda| \sigma^{1-(\beta+\delta)}}{\frac{27}{70}(b-a)\left[\frac{9}{10}(b-a)\right]^{\alpha+\delta}(1+\beta-\delta)}.$$

Принимая во внимание (2.22) и (2.24), можно легко оценить модуль разности $A(u_n) - A(u)$. В самом деле,

$$|A(u_n) - A(u)| <$$

$$< \frac{1}{|x-a|^{\alpha+\delta}|x-b|^{\beta+\delta}}[m_1|x-b|^{\beta+\delta}\eta^\delta + A_3' m_2 |x-a|^{\alpha+\delta}|x-b|^{\beta+\delta}\eta^\delta]$$

или

$$|A(u_n) - A(u)| < \frac{\overline{m}\cdot\eta^\delta}{|x-a|^{\alpha+\delta}\cdot|x-b|^{\beta+\delta}}, \qquad (N')$$

где

$$\overline{m} = (m_1 + A_3' m_2 (b-a)^{2+\delta})(b-a)^{\beta+\delta}.$$

Аналогично предыдущему, из (N′) получаем

$$|A(u_n) - A(u)| < \frac{\varepsilon}{|x-a|^{\alpha+\delta}|x-b|^{\beta+\delta}}.$$

Этим доказана непрерывность оператора $A(u)$ в интервале $(a, b-\sigma)$. Заменив в том же рассуждении a на b, докажем, что оператор $A(u)$ непрерывен в интервале $(a+\sigma, b)$ и, следовательно, во всем промежутке (a, b).

Докажем, теперь, компактность семейства функций $\{U(x)\}$.

ЛЕММА 4. *Семейство функций $\{U(x)\}$ во всяком внутреннем к (a, b) интервале $[a+\eta, b-\eta]$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть x и $x+\Delta x$ принадлежат к промежутку $[a+\eta, b-\eta]$; тогда

$$|x-a| \geqslant \eta, \quad |x-b| \geqslant \eta, \quad |x+\Delta x - b| \geqslant \eta.$$

Так как $U(x) \in H$, то

$$|U(x)| < \frac{K}{|x-a|^\alpha \cdot |x-b|^\beta},$$

$$|U(x+\Delta x) - U(x)| \leqslant \frac{K}{|x-a|^{\alpha+\delta}\cdot|x+\Delta x-b|^{\beta+\delta}}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|\cdot|x+\Delta x-b|}\right)^\delta.$$

Отсюда получаем

$$|U(x)| \leqslant K\cdot\eta^{-\alpha-\beta},$$

$$|U(x+\Delta x) - U(x)| \leqslant K\cdot\eta^{-\alpha-\beta-2\delta}.$$

Из последних двух неравенств следует равномерная ограниченность и равностепенная непревывность семейства $\{U(x)\}$ в $[a+\eta, b-\eta]$.

ЛЕММА 5. *Семейство функций*

$$U^*(x) = U(x)\cdot|x-a|^{\alpha+\delta}\cdot|x-b|^{\beta+\delta}$$

компактно в смысле равномерной сходимости.

Доказательство. Разобьем интервал (a, b) на три части:

$$(a, a+\eta], \quad [a+\eta, b-\eta], \quad [b-\eta, b).$$

Семейство функций $\{U(x)\}$, в силу леммы 4, компактно в промежутке $[a+\eta, b-\eta]$. Поэтому из всякой последовательности $U_n(x) \in \{U(x)\}$ всегда можно выбрать подпоследовательность $U_{n_k}(x)$, сходящуюся к некоторой функции $\Psi(x)$ в смысле равномерной сходимости.

Пусть $U_n^*(x)$ и $U_{n_k}^*(x)$ будут соответствующие последовательности из семейства $\{U^*(x)\}$. Докажем, что подпоследовательность $U_{n_k}^*(x)$ сходится в (a, b) в смысле равномерной сходимости. В самом деле,

$$\begin{aligned}\rho(U_{n_{k+p}}^*, U_{n_k}^*) \leqslant & \max_{(a,\, a+\eta]} |U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta} + \\ & + \max_{[a+\eta,\, b-\eta]} |U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} |x-b|^{\beta+\delta} + \\ & + \max_{[b-\eta)} |U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Пусть ε — заданное сколь угодно малое положительное число. В силу равномерной сходимости $U_{n_k}(x)$ в $[a+\eta, b-\eta]$, можно указать такое натуральное число N, что для всех $k \geqslant N$ и при $p > 0$

$$\max_{[a+\eta,\, b-\eta]} |U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)^{\alpha+\beta+2\delta}}.$$

Следовательно,

$$\max_{[a+\eta,\, b-\eta]} |U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.26}$$

Подберем число $\eta < \sqrt[\delta]{\frac{\varepsilon}{6k(b-a)^{\delta}}}$. Тогда, в силу ($P_1$),

$$\max_{a,\, a+\eta]} |U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta} \leqslant 2k(b-a)^{\delta} \cdot \max |x-a|^{\delta}.$$

Но для всех $x \in (a, a+\eta]$

$$|x-a| \leqslant \eta.$$

Поэтому

$$\max_{(a,\, a+\eta]} |U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.27}$$

Аналогично,

$$\max_{[b-\eta,\, b)} |U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| \cdot |x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.28}$$

Объединяя (2.26), (2.27) и (2.28), из (2.25) получаем

$$\rho(U_{n_{k+p}}^*(x), U_{n_k}^*(x)) < \varepsilon, \tag{2.29}$$

т. е. последовательность $U_{n_k}^*(x)$ сходится в смысле равномерной сходимости. Это и значит, что семейство функций $\{U^*(x)\}$ компактно, что и требовалось доказать.

Теперь можно легко получить сходимость $U_{n_k}(x)$ в смысле нашей метрики.

В самом деле, из определения $U^*(x)$,

$$|U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| = \frac{|U_{n_{k+p}}^*(x) - U_{n_k}^*(x)|}{|x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta}}. \tag{2.30}$$

В силу (2.29), из (2.30) получаем

$$|U_{n_{k+p}}(x) - U_{n_k}(x)| < \frac{\varepsilon}{|x-a|^{\alpha+\delta} \cdot |x-b|^{\beta+\delta}}.$$

Отсюда следует сходимость последовательности $U_{n_k}(x)$ в смысле нашей метрики, т. е. семейство $\{U(x)\}$ компактно. Далее, нетрудно показать, что множество $H(k)$ замкнуто и выпукло. Значит, в линейном полном пространстве H посредством непрерывного оператора $A(u)$ замкнутое выпуклое компактное множество $H(k)$ преобразуется в себя, следовательно, в силу принципа Шаудера, существует неподвижная точка, т. е. решение нашего уравнения.

Итак, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Если в* (a, b) *функция* $K(x, s, u(s))$ *удовлетворяет условиям*

$$|K(x, s, u(s))| < \overline{A} \cdot |u| + \overline{B},$$
$$|K(x+\Delta x, s+\Delta s, u(s+\Delta s)) - K(x, s, u(s))| <$$
$$< A_1|\Delta x|^{\delta_1} + A_2|\Delta s|^{\delta} + A_3|u(s+\Delta s) - u(s)|,$$

то существует такое число $\lambda_0 = \frac{1}{CL}$ *(CL — числовая константа), что при* $|\lambda| < \lambda_0$ *сингулярное интегральное уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно решение* $u(x) \in H(k)$.

§ 3. Метод последовательных приближений

Будем последовательно строить функции

$$u_n(x) = \lambda \int_a^b \frac{K(x, s, u_{n-1}(s))}{s-x}\, ds, \tag{3.1}$$

принимая за исходную функцию $u_0(x) \in H(k)$.

Докажем некоторые вспомогательные леммы, в силу которых будет доказана сходимость процесса.

ЛЕММА 1. *Если функция* $\Psi_n(x) = u_n(x) - u_{n-1}(x)$ *удовлетворяет условиям*

$$|\Psi_n(x)| < \frac{K_n}{|x-a|^{\alpha} \cdot |x-b|^{\beta}}, \tag{3.2}$$

$$|\Psi_n(x+\Delta x) - \Psi_n(x)| <$$
$$< \frac{K_n}{|x-a|^{\alpha} \cdot |x+\Delta x-b|^{\beta}} \left(\frac{|\Delta x|}{|x-a| \cdot |x+\Delta x-b|}\right)^{\delta}, \tag{3,3}$$

а функция $K(x, s, u(s))$ — *условиям:*

$$|K(x, s, u(s))| < \overline{K} \cdot |u| + B, \tag{3.4}$$

$$|K(x+\Delta x, s+\Delta s, u(s+\Delta s)) - K(x, s, u(s))| <$$
$$< A_1|\Delta x|^{\delta_1} + A_2|\Delta s|^{\delta} + A_3|u(s+\Delta s) - u(s)|, \tag{3.5}$$

$$|K'_u(x, s, u(s))| < l, \tag{3.6}$$

$$|K'_u(x+\Delta x, s+\Delta s, u(s+\Delta s)) - K'_u(x, s, u(s))| < \overline{A}_1|\Delta x|^{\delta_1} + \overline{A}_2|\Delta s|^{\delta} +$$
$$+ \overline{A}_3|u(s+\Delta s) - u(s)| \cdot |s-a|^{\alpha} \cdot |s+\Delta s-b|^{\beta}, \tag{3.7}$$

то функция

$$\omega_n(x, s) = K(x, s, u_n(s)) - K(x, s, u_{n-1}(s)) \tag{3.8}$$

будет удовлетворять условиям

$$|\omega_n(x, s)| < \frac{A_3 \cdot K_n}{|s-a|^\alpha \cdot |s-b|^\beta}, \tag{3.9}$$

$$|\omega_n(x+\Delta x, s+\Delta s) - \omega_n(x, s)| < \frac{AK_n(|\Delta x|^{\delta_1} + |\Delta s|^\delta)}{|s-a|^{\alpha+\delta} \cdot |s+\Delta s-b|^{\beta+\delta}}, \tag{3.10}$$

где $\overline{A}$ и A — числовые константы, не зависящие от K_n.

Доказательство. В силу (3.5) и (3.2), имеем

$$|\omega_n(x, s)| < \overline{A}_3 |u_n(s) - u_{n-1}(s)| < \frac{2\overline{A}_3 \cdot K_n}{|s-a|^\alpha \cdot |s-b|^\beta}.$$

Чтобы установить справедливость неравенства (3.10), рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = K[x+\Delta x, s+\Delta s, u_{n-1}(s+\Delta s) + t(u_n(s+\Delta s) - u_{n-1}(s+\Delta s))] - \\ - K[x, s, u_{n-1}(s) + t(u_n(s) + u_{n-1}(s))].$$

По теореме о среднем, при некотором $0 < \overline{t} < 1$

$$F(1) - F(0) = F'(\overline{t}).$$

Далее, легко видеть, что

$$\omega_n(x+\Delta x, s+\Delta s) - \omega_n(x, s) = F'(\overline{t}). \tag{3.11}$$

С другой стороны,

$$F'(\overline{t}) = K'_u[x+\Delta x, s+\Delta s, u_{n-1}(s+\Delta s) + \overline{t}(u_n(s+\Delta s) - u_{n-1}(s+\Delta s))] \cdot \\ \cdot [\Psi_n(s+\Delta s) - \Psi_n(s)] + \{K'_u[x+\Delta x, s+\Delta s, u_{n-1}(s+\Delta s) + \\ + \overline{t}(u_n(s+\Delta s) - u_{n-1}(s+\Delta s))] - K'_u[x, s, u_{n-1}(s) + \\ + t'(u_n(s) - u_{n-1}(s))]\} \cdot \Psi_n(s). \tag{3.12}$$

Из соотношений (3.11) и (3.12) получаем

$$|\omega_n(x+\Delta x, s+\Delta s) - \omega_n(x, s)| < \frac{\overline{l} \cdot K_n \cdot |\Delta s|^\delta}{|s-a|^{\alpha+\delta} \cdot |s+\Delta s-b|^{\beta+\delta}} + \\ + \frac{K_n}{|x-a|^\alpha \cdot |x-b|^\beta} \{\overline{A}_1 |\Delta x|^{\delta_1} + \overline{A}_2 |\Delta s| + \overline{A}_3 [\overline{t} |u_n(s+\Delta s) - u_n(s)| + \\ + (1-\overline{t}) \cdot |u_{n-1}(s+\Delta s) - u_{n-1}(s)|] \cdot |s-a|^\alpha \cdot |s+\Delta s-b|^\beta\}$$

или

$$|\omega_n(x+\Delta x; s+\Delta s) - \omega_n(x, s)| < \frac{A \cdot K_n[|\Delta x|^{\delta_1} + |\Delta s|^\delta]}{|s-a|^{\alpha+\delta} |s+\Delta s-b|^{\beta+\delta}},$$

где

$$A = \max\{\overline{A}_1(b-a)^{2\delta}, \overline{A}_2(b-a)^{2\delta} + \overline{A}_3\}.$$

ЛЕММА 2. *Если $\Psi_n(x)$ и $\omega_n(x, s)$ удовлетворяют условиям* (3.2), (3.3), (3.9) *и* (3.10), *то функция*

$$\Psi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b \frac{\omega_n(x, s)}{s-x} ds \tag{3.13}$$

удовлетворяет условиям:

$$|\Psi_{n+1}(x)| < \frac{|\lambda| \cdot K \cdot \overline{A}_3 \cdot K_n}{|x-a|^\alpha \cdot |x-b|^\beta}, \tag{3.14}$$

$$|\Psi_{n+1}(x+\Delta x)-\Psi_{n+1}(x)|<$$
$$<\frac{|\lambda|\cdot K\cdot A\cdot K_n}{|x-a|^{\alpha}\cdot|x+\Delta x-b|^{\beta}}\left(\frac{|\Delta x|}{|x-a|\cdot|x+\Delta x-b|}\right)^{\delta}. \qquad (3.15)$$

Доказательство. Пусть $B=\max\{\overline{A}_3\cdot K_n,\ A\cdot K_n\}$, тогда из (3.9) и (3.10) видно, что функция $\omega_n(x, s)$ удовлетворяет условиям (1.27) и (1.28) леммы 2 § 1. Следовательно, применив лемму 2 § 1 к интегралу $\lambda\int\limits_a^b\frac{\omega_n(x,s)}{s-x}ds$, для $\Psi_{n+1}(x)$ получаем

$$|\Psi_{n+1}(x)|<\frac{|\lambda|\cdot L\cdot\overline{A}_3\cdot K_n}{|x-a|^{\alpha}\cdot|x-b|^{\beta}},$$

$$|\Psi_{n+1}(x+\Delta x)-\Psi_{n+1}(x)|<\frac{|\lambda|\cdot L\cdot A\cdot K_n\,|\Delta x|^{\delta}}{|x-a|^{\alpha+\delta}\,|x+\Delta x-b|^{\beta+\delta}}.$$

Докажем теперь сходимость процесса. Для этой цели достаточно показать сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(u_n-u_{n-1})$, $u_{-1}\equiv 0$. Оценим абсолютные величины членов этого ряда. Если взять $|\lambda|\cdot\overline{A}_3\cdot L<q<1$, где q — произвольное число, меньшее единицы, то

$$|\Psi_{n+1}(x)|<\frac{q^n\cdot K_0}{|x-a|^{\alpha}\cdot|x-b|^{\beta}}.$$

Отсюда следует сходимость последовательных приближений к некоторой предельной функции $u(x)$:

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=u(x).$$

Докажем, далее, что предельная функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению (1). Для этого достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\chi_n(x)=0,$$

где

$$\chi_n(x)=\lambda\int\limits_a^b\frac{K(x,s,u(s))-K(x,s,u_n(s))}{s-x}ds.$$

Можно легко показать, что функция

$$\overline{\omega}_n(x,s)=K(x,s,u(s))-K(x,s,u_n(s))$$

удовлетворяет условиям леммы 2 § 1. Тогда, применив эту лемму к функции

$$\chi_n(x)=\lambda\int\limits_a^b\frac{\overline{\omega}_n(x,s)}{s-x}ds,$$

получим

$$|\chi_n(x)|<\frac{\overline{q}^{n-1}\cdot M_0}{|x-a|^{\alpha}\cdot|x-b|^{\beta}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b \frac{K(x, s, u(s))}{s-x}\,ds-\int_a^b \frac{K(x, s, u_n(s))}{s-x}\,ds\right]=0.$$

Наконец, покажем, что полученное таким образом решение единственно. Предположим, что, кроме $u(x)$, существует другое решение $v(x)$, причем в промежутке (a, b) $u(x) \not\equiv v(x)$. Так как $v(x)$ есть решение уравнения (1), то

$$v(x)=\lambda\int_a^b \frac{K(x, s, v(s))}{s-x}\,ds. \tag{3.16}$$

Покажем, что $v(x)=\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x)$. Этим будет доказана единственность решения уравнения (1).

Рассмотрим функцию

$$\mathfrak{R}_n(x)\equiv v(x)-u_n(x)=\lambda\int_a^b \frac{\Omega_n(x, s)}{s-x}\,ds,$$

где

$$\Omega_n(x, s)=K(x, s, v(s))-K(x, s, u_{n-1}(s)).$$

Аналогично предыдущему, можно легко получить

$$|\mathfrak{R}_n(x)|<\frac{a^{n-1}\cdot h_0}{|x-a|^{\alpha}\cdot|x-b|^{\beta}} \quad (a<1).$$

Таким образом,

$$\lim_{n\to\infty}\mathfrak{R}_n(x)=0,$$

что и требовалось доказать. Итак, доказана

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $K(x, s, u(s))$ удовлетворяет условиям:*

$$|K(x, s, u(s))|<\overline{K}\cdot|u|+B, \tag{3.4}$$

$$|K(x+\Delta x, s+\Delta s, u(s+\Delta s))-K(x, s, u(s))|<A_1|\Delta x|^{\delta_1}+A_2|\Delta s|^{\delta}+$$
$$+A_3|u(s+\Delta s)-u(s)|, \tag{3.5}$$

$$|K'_u(x, s, u(s))|<l, \tag{3.6}$$

$$K'_u(x+\Delta x, s+\Delta x, u(s+\Delta s))-K'_u(x, s, u(s))|<\overline{A}_1|\Delta x|^{\delta_1}+\overline{A}_2|\Delta s|^{\delta}+$$
$$+\overline{A}_3|u(s+\Delta s)-u(s)|\cdot|s-a|^{\alpha}\cdot|s+\Delta s-b|^{\beta}, \tag{3.7}$$

то при достаточно малом λ нелинейное сингулярное интегральное уравнение

$$u(x)=\lambda\int_a^b \frac{K(x, s, u(s))}{s-x}\,ds \tag{1}$$

имеет единственное решение, принадлежащее к H.

Это решение может быть получено методом последовательных приближений.

Институт математики и физики
Ак. Наук Азербайджанской ССР

Поступило
31.I.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гусейнов А. И., Теоремы существования и единственности для нелинейных сингулярных интегральных уравнений, Математ. сб., 20 (62) : 2 (1947), 293—309.
[2] Schauder J., Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, Studia Mathematica, t. III (1930), 171—180.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 213—222

Я. И. ХУРГИН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ *

(*Представлено академиком* И. Г. Петровским)

В работе доказывается, что для линейных дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих специальный вид, но по любому конечному числу независимых переменных, любого порядка и произвольного типа (эллиптического, параболического, ультрагиперболического и т. д.) при естественных предположениях о дифференцируемости коэффициентов задача Коши имеет единственное решение (если оно существует).

Настоящая работа посвящена изучению вопроса о единственности решения задачи Коши для линейных дифференциальных уравнений в частных производных в предположении существования такого решения.

Мы не будем здесь останавливаться на истории вопроса, которая изложена в статье И. Г. Петровского [(1), стр. 44—46, 59—60]. Отметим лишь, что для линейных неаналитических уравнений с числом независимых переменных, большим двух, вопрос о единственности решения задачи Коши до сего времени в значительной степени остается открытым.

В настоящей работе удалось доказать единственность для уравнений некоторого специального вида, но по любому (конечному) числу независимых переменных, любого порядка и произвольного типа (эллиптического, параболического, ультрагиперболического и т. д.) при естественных предположениях о дифференцируемости коэффициентов.

Ограничения, налагаемые на вид рассматриваемых уравнений, повидимому, вызваны методами, которые мы применяем в данной работе.

Мы будем пользоваться результатами спектральной теории линейных операторов в объеме изложенного в статье А. И. Плеснера (2), однако в связи с еще не установившейся терминологией приведем некоторые определения и обозначения.

---

* Работа написана во время моего пребывания в аспирантуре Института математики при Московском государственном университете. Я пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность моему руководителю проф. И. М. Гельфанду за многолетнее систематическое руководство моей работой, а также многократную консультацию и ряд существенных указаний при написании этой работы.

Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное гильбертово пространство [см. ([2]), § 1].

Оператор A, определенный на всюду плотном множесте $\Omega_A \subset \mathfrak{H}$ называется **симметрическим** *, если для любых двух векторов $u, v \in \Omega$ имеет место равенство

$$(Au, v) = (u, Av).$$

Оператор A, определенный на всюду плотном множестве $\Omega_A \in \mathfrak{H}$, называется **гипермаксимальным** **, если $A = A^*$, т. е. область определения Ω_{A^*} сопряженного оператора A^* совпадает с Ω_A — областью определения оператора A:

$$\Omega_A = \Omega_{A^*}$$

и для любых двух $u, v \in \Omega_A$ имеет место

$$(Au, v) = (u, Av).$$

Далее, $E(\Delta)$ будет обозначать спектральную функцию [([2]), § 6, n° 2] гипермаксимального оператора.

§ 1. Единственность решения задачи Коши для операторного уравнения

Пусть A — гипермаксимальный оператор и пусть $\{u(t)\}$ — семейство всех вектор-функций, принадлежащих Ω_A и m раз дифференцируемых (в сильном смысле) по параметру $t\ (t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$.

Рассмотрим уравнение

$$\sum_{k=0}^{m} b_k(t) \frac{d^k u(t)}{dt^k} = Au(t) \quad (b_m(t) \neq 0,\ m > 0), \tag{1}$$

где $b_k(t)$ — непрерывные функции на отрезке $[t_0, t_1]$.

Под задачей Коши для уравнения (1) мы понимаем определение вектор-функции $u(t) \in \Omega_A$, удовлетворяющей на отрезке $[t_0, t_1]$ уравнению (1) и начальным условиям

$$u(t_0) = \varphi_0, \quad \left.\frac{du(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \varphi_1, \ \ldots, \left.\frac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}\right|_{t=t_0} = \varphi_{m-1}, \tag{2}$$

где $\varphi_k \in \Omega_A$ — заданные векторы.

ТЕОРЕМА 1. *Если существует решение $u(t)$ задачи Коши (2) для уравнения (1), то это решение единственно.*

Пусть существуют два решения этой задачи Коши: $u^*(t)$ и $u^{**}(t)$. Тогда вектор-функция

$$u(t) = u^*(t) - u^{**}(t) \tag{3}$$

также удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям

$$u(t_0) = \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = \ldots = \left.\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}}\right|_{t=t_0} = 0. \tag{2 bis}$$

Таким образом, достаточно доказать, что верна

---

* По терминологии статьи ([2]), такой оператор называется **самосопряженным** (§ 10, n° 1).

** По терминологии статьи ([2]), такой оператор называется **эрмитовым** 7, n° 2; . 10 n° 3).

ТЕОРЕМА 1 bis. *Если существует решение $u(t)$ задачи Коши* (2 bis) *для уравнения* (1), *то это решение единственно.*

Доказательство. Пусть $u(t)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее (2 bis). Положим

$$u_\Delta(t) = E(\Delta)\, u(t), \tag{4}$$

где $E(\Delta)$ — спектральная функция оператора A, и Δ — ограниченный интервал спектра.

Очевидно, что на множестве Ω_Δ векторов $u_\Delta(t)$ оператор A определен и ограничен. Кроме того, имеем

$$E(\Delta)\frac{d^k u(t)}{dt^k} = \frac{d^k u_\Delta(t)}{dt^k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Применяя к обеим частям уравнения (1) оператор $E(\Delta)$ и учитывая, что оператор A перестановочен с $E(\Delta)$, имеем

$$\sum_{k=0}^{m} b_k(t)\, \frac{d^k u_\Delta(t)}{dt^k} = A u_\Delta(t), \tag{5}$$

причем в уравнении (5) справа стоит ограниченный оператор (поскольку он применяется только к векторам из Ω_Δ).

Условия (2 bis), в силу (4), дают

$$u_\Delta(t_0) = \ldots = \left.\frac{d^{m-1}u_\Delta}{dt^{m-1}}\right|_{t=t_0} = 0. \tag{6}$$

Легко показать, пользуясь методом последовательных приближений Пикара, что для уравнения (5) задача Коши (6) имеет единственное решение:

$$u_\Delta(t) \equiv 0 \quad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1).$$

Действительно, если разрешить уравнение (5) относительно старшей производной, воспользовавшись тем, что $b_m(t) \neq 0$, и положить

$$\frac{1}{b_m(t)} = b_m^*(t), \quad \frac{-b_k(t)}{b_m(t)} = b_k^*(t) \quad (k = 0, \ldots, m-1),$$

то получим

$$\frac{d^m u_\Delta(t)}{dt^m} = \sum_{k=0}^{m-1} b_k^*(t)\, \frac{d^k u_\Delta(t)}{dt^k} + b_m^*(t)\, A u_\Delta(t). \tag{5 bis}$$

Для того чтобы уравнение (5 bis) имело единственное решение задачи Коши (6), достаточно [см., например, ([3]), стр. 142], чтобы правая часть (5 bis) была непрерывна по всем аргументам и удовлетворяла условию Липшица по аргументам

$$u_\Delta, \quad \frac{du_\Delta}{dt}, \ldots, \frac{d^{m-1}u_\Delta}{dt^{m-1}}.$$

В нашем случае эти условия выполнены. В самом деле, коэффициенты $b_k^*(t)$ $(k = 0, \ldots, m)$ непрерывны на отрезке $[t_0, t_1]$, откуда,

в силу линейности правой части по $\frac{du_\Delta}{dt}, \ldots, \frac{d^{m-1}u_\Delta}{dt^{m-1}}$, следует выполнение условия Липшица по этим аргументам. Кроме того, оператор A ограничен, т. е. существует такая постоянная K_Δ, что

$$\| Au_\Delta \| \leqslant K_\Delta \| u_\Delta \|,$$

откуда, в силу линейности оператора A, следует непрерывность и выполнимость условия Липшица по u_Δ.

Таким образом,

$$E(\Delta)\, u(t) \equiv 0$$

для любого конечного интервала Δ, откуда непосредственно следует

$$u(t) \equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Дифференциальные операторы

Рассмотрим формально самосопряженный (как это понимают в теории дифференциальных уравнений) линейный дифференциальный оператор

$$A = \sum_{k_1+\ldots+k_n \leqslant m} a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}. \tag{7}$$

При этом на вещественные коэффициенты $a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1, \ldots, x_n)$ наложены требования гладкости*, необходимые для того, чтобы имела место обобщенная формула Грина:

$$\iint_D \cdots \int [uAv - vAu]\, dx_1 \cdots dx_n = \int_S \cdots \int B[u, v]\, ds, \tag{8}$$

где u и v — достаточно гладкие функции от $(x_1, \ldots, x_n)$, D — n-мерная ограниченная область с кусочно гладкой границей S, а $B[u, v]$ означает соответствующее билинейное выражение от u и v и их производных до $m-1$-го порядка (причем сумма порядков в каждом члене не превосходит $m-1$), которое нам нет необходимости выписывать подробно.

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ комплексных функций

$$u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1, \ldots, x_n) + iu_2(x_1, \ldots, x_n)$$

от n вещественных переменных $x_1, \ldots, x_n$, заданных в шаре

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2. \tag{9}$$

* Мы не ставим своей задачей сведéние к минимуму требований на коэффициенты и функции, поэтому не уточняем этих требований. Заметим только, что достаточно потребовать, чтобы коэффициенты $a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1, \ldots, x_n)$ имели конечные и непрерывные производные до порядка, равного сумме их индексов, а функции u и v имели конечные и непрерывные производные до n-го порядка.

В $\mathfrak{H}$ введена обычная норма

$$\|u\| = \iint\limits_D \cdots \int |u|^2 \, dx_1 \cdots dx_n < \infty.$$

Обозначим через Ω подмножество всех m раз дифференцируемых функций $u \in \mathfrak{H}$, у которых m-е производные принадлежат $\mathfrak{H}$, и на сфере

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = r^2 \tag{10}$$

функции и их производные до $m-1$-го порядка обращаются в нуль.

В силу формулы Грина (8), на множестве Ω оператор A, определенный формулой (7), есть симметрический оператор.

Как известно [см. (2), § 12], для того чтобы симметрический оператор A можно было расширить до гипермаксимального, необходимо и достаточно, чтобы размерности собственных подпространств T_i и T_{-i} оператора A^*, сопряженного (в смысле теории операторов) с A, были одинаковы, т. е. чтобы индексы дефекта оператора A были равны. Здесь под T_i и T_{-i} понимаются подпространства функций, удовлетворяющих соответственно уравнениям

$$A^*u = iu, \tag{11}$$

$$A^*u = -iu. \tag{12}$$

Пусть функция u_0 удовлетворяет уравнению (11), т. е.

$$A^*u_0 = iu_0. \tag{13}$$

Если обозначить через $\overline{u}_0$ функцию, комплексно сопряженную с u_0, то $\overline{u}_0$ удовлетворяет уравнению (12):

$$A^*\overline{u}_0 = -i\overline{u}_0. \tag{14}$$

Действительно, пусть v — произвольная функция из Ω_A. Умножая скалярно обе части (13) на v и пользуясь определением сопряженного оператора, имеем

$$(A^*u_0, v) = (iu_0, v) = (u_0, Av).$$

Взяв комплексно сопряженные к обеим частям последнего равенства, получаем

$$(-i\overline{u}_0, \overline{v}) = (\overline{u}_0, A\overline{v}),$$

ибо оператор A с вещественными коэффициентами и, следовательно, $\overline{Av} = A\overline{v}$. Из равенства

$$(-i\overline{u}_0, \overline{v}) = (\overline{u}_0, A\overline{v}), \tag{15}$$

по самому определению сопряженного оператора, получаем

$$A^*\overline{u}_0 = -i\overline{u}_0.$$

Таким образом, каждой функции $u_0 \in T_i$ соответствует функция $\bar{u}_0 \in T_{-i}$ и обратно. Это и доказывает, что размерности подпространств T_i и T_{-i} одинаковы.

Иными словами, построенный выше симметрический оператор A имеет равные индексы дефекта и, следовательно, допускает расширение до гипермаксимального оператора.

§ 3. Единственность решения задачи Коши

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение в частных производных

$$\sum_{k=0}^{l} b_k(t) \frac{\partial^k u}{\partial t^k} =$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_n \leq m} a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f(x_1, \ldots, x_n, t), \quad (16)$$

где $b_k(t)$ и $f(x_1, \ldots, x_n, t)$ — непрерывные функции своих аргументов, $l > 0$, а оператор

$$A = \sum_{k_1+\ldots+k_n \leq m} a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \quad (17)$$

удовлетворяет условиям, наложенным на оператор (7) и, следовательно, симметрический оператор, построенный в предыдущем параграфе, допускает расширение до гипермаксимального оператора.

Пусть G_0 — ограниченная $(n+1)$-мерная область в пространстве $(t, x_1, \ldots, x_n)$ с кусочно гладкой границей F_0, содержащая внутри начало координат. Обозначим через F часть этой n-мерной поверхности F_0, лежащую в полупространстве $t > 0$, и через G—часть области G_0, лежащую в том же полупространстве.

Таким образом, поверхность F вместе с некоторой областью на гиперплоскости $t = 0$ являются полной границей области G.

Поскольку мы занимаемся лишь проблемой единственности для линейных уравнений, то, используя рассуждения, проведенные в начале доказательства теоремы 1, заключаем, что достаточно рассматривать однородное уравнение

$$\sum_{k=0}^{l} bt^k(t) \frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \sum_{k_1+\ldots k_n+\leq m} a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \quad (18)$$

при нулевых начальных условиях. Поэтому мы будем доказывать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Если* (M *раз дифференцируемое* *) *решение* $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ *уравнения* (18), *определенное во всей области* G, *на поверхности* F *удовлетворяет условиям Коши:*

---

* $M = \max(m, l)$; интеграл квадрата модуля каждой M-й производной от u, распространенный на область G, предполагается конечным.

$$
\begin{gathered}
u|_F=0, \quad \left.\frac{\partial^p u}{\partial t^p}\right|_F=0 \quad (p=1, 2, \ldots, l-1),\\
\left.\frac{\partial^q u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right|_F=0 \quad (k_1+\ldots+k_n=q,\ q=1, 2, \ldots, m-1),
\end{gathered} \tag{19}
$$

то $u \equiv 0$.

Доказательство. В силу сделанных предположений относительно поверхности F начальных данных, существует такое число $r>0$, что поверхность F заключена внутри полусферы

$$
t^2+\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2, \quad t>0. \tag{20}
$$

Для доказательства определим изучаемое решение u в цилиндре T

$$
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant r,
$$

доопределив его в области $T-G$, где положим $u \equiv 0$. Тогда во всем цилиндре T функция u является решением уравнения (18), причем при каждом фиксированном t $(0 \leqslant t \leqslant r)$ на поверхности сферы S

$$
\sum_{i=1}^{n} x_i^2=r^2
$$

мы имеем

$$
u|_S=0, \quad \left.\frac{\partial^q u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right|_S=0 \quad (k_1+\ldots+k_n=q, \quad q=1, \ldots, m-1). \tag{21}
$$

Будем считать функции $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ вектор-функциями, заданными в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ функций от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ и зависящими от параметра t.

Согласно сказанному в предыдущем параграфе, оператор A, определенный на классе Ω функций, удовлетворяющих условиям (21), есть симметрический оператор (при каждом фиксированном t).

Согласно предположениям, наложенным на оператор A, мы можем расширить его до гипермаксимального оператора, определенного на множестве Ω_A, причем $\Omega \subset \Omega_A \subset \mathfrak{H}$.

Таким образом, уравнение (18) сводится к операторному уравнению

$$
\sum_{k=0}^{l} b_k(t) \frac{d^k u(t)}{dt^k}=Au(t),
$$

где A — гипермаксимальный оператор, а $u(t)$ — вектор-функции, принадлежащие Ω_A (мы здесь можем заменить частные производные на обыкновенные, ибо в этой интерпретации вектор-функции u зависят только от параметра t).

Кроме того, в силу нашего доопределения, при $t=r$

$$u(r)=\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=r}=\ldots,=\left.\frac{d^{l-1}u}{dt^{l-1}}\right|_{t=r}=0.$$

Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 1 bis § 1, в силу которой

$$u\equiv 0,$$

что и требовалось доказать.

Резюмируя результаты, полученные нами выше, мы видим, что доказана единственность решения задачи Коши в предположении существования решения для дифференциальных уравнений в частных производных вида (16). В частности, предполагая оператор A отрицательно определенным, $l=m$, и, перенося его в левую часть уравнения (16), мы получаем уравнение

$$Lu\equiv\sum_{k=0}^{m}b_k(t)\frac{\partial^k u}{\partial t^k}+$$

$$+\sum_{k_1+\ldots+k_n\leq m}a_{k_1,\ldots,k_n}(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}u}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=f(x_1,\ldots,x_n,t) \qquad (16\,\text{bis})$$

эллиптического типа (мы поменяли знаки у коэффициентов, чтобы уравнение имело более привычный вид), для которого имеет место сформулированная выше теорема о единственности решения задачи Коши.

Выбирая оператор A соответствующего типа, мы получаем доказательство единственности решения задачи Коши для уравнений гиперболического, параболического, ультрагиперболического или смешанного типов (при наших предположениях о коэффициентах и поверхности начальных данных).

§ 4. Уравнения с коэффициентами, зависящими от одного независимого переменного

В этом параграфе мы будем рассматривать дифференциальные уравнения в частных производных вида

$$Lu\equiv\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n\leq m}a_{k_0,k_1,\ldots,k_n}(t)\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n}u}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}=$$
$$=f(t,x_1,\ldots,x_n), \qquad (22)$$

где $a_{k_0,k_1,\ldots,k_n}(t)$ — достаточно гладкие* функции.

Пусть F — поверхность, определенная в предыдущем параграфе, и G — область, в которой определено решение u уравнения (22).

Обозначим через L^* дифференциальный оператор, сопряженный с L в смысле теории дифференциальных уравнений:

$$L^*v\equiv\sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n<m}a^*_{k_0,k_1,\ldots k_n}(t)\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots k_n}v}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}. \qquad (23)$$

* См. сноску на стр. 216.

Положим

$$v(t, x, \ldots, x_n) = y(t)\, e^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} \tag{24}$$

где $y(t)$ — произвольная достаточное число раз дифференцируемая функция, а α_k $(k=1, \ldots, n)$ — произвольные вещественные числа.

Тогда

$$L^* v = L^* \{y(t)\, e^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}\} = \left\{ \sum_{k_0=0}^{l} b_{k_0}(t) \frac{d^{k_0} y(t)}{dt^{k_0}} \right\} e^{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}, \tag{25}$$

где l есть наивысший порядок дифференцирования по t, входящий в выражение для L^*, и

$$b_{k_0}(t) = \sum_{k_0+k_1+\ldots+k_n \leq m} a_{k_0, k_1, \ldots, k_n}(t)\, \alpha_1^{k_1} \alpha_2^{k_2} \ldots \alpha_n^{k_n} \quad (k_0 = 0, \ldots, l). \tag{26}$$

Будем предполагать, что $l \geqslant 1$ и что хотя бы при одной комбинации вещественных чисел $\alpha_1 = A_1, \ldots, \alpha_n = A_n$ старший коэффициент

$$b_l(t) = \sum_{l+k_1+\ldots+k_n \leqslant m} a_{l, k_1, \ldots k_n}(t)\, A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n} \neq 0 \tag{27}$$

на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$, где $T = \max\limits_{t \in G} t$ при $t \in G$.

Аналогично сказанному выше, для доказательства единственности решения задачи Коши для уравнения (22) в предположении его существования в области G достаточно доказать следующую теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Если m раз дифференцируемое* решение $u(t, x_1, \ldots, x_n)$ уравнения*

$$Lu \equiv \sum_{k_0+k_1+\ldots k_n \leq m} a_{k_0, k_1, \ldots, k_n}(t) \frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n} u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = 0, \tag{28}$$

определенное во всей области G, на поверхности F удовлетворяет условиям Коши

$$u|_F = 0, \quad \left.\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_n} u}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}\right|_F = 0 \quad (k_0 + k_1 + \ldots + k_n \leqslant m-1), \tag{29}$$

то $u \equiv 0$.

Доказательство. При достаточно гладких** коэффициентах для любых достаточно гладких** функций u и v имеет место формула Грина [см. § 2, формула (8)]

$$\iint \underset{G}{\ldots} \int [vLu - uL^*v]\, dt\, dx_1 \ldots dx_n = \int \underset{S}{\ldots} \int B[u, v]\, ds, \tag{30}$$

где L^* — оператор, сопряженный с L (в смысле теории дифференциальных уравнений), а S — полная граница G.

---

* См. сноску на стр. 218.

** См. сноску на стр. 216.

Если u есть решение уравнения (28), удовлетворяющее условиям теоремы, то, во-первых, $Lu=0$ и, во-вторых,

$$\int_F \cdots \int B[u,v]\,ds=0. \tag{31}$$

Обозначим через F_1 часть границы S без F:

$$F_1=F-S. \tag{32}$$

F_1 есть область на гиперплоскости $t=0$.

Таким образом, для любой достаточно гладкой функции $v(t, x_1, \ldots, x_n)$ и нашего решения u мы имеем тождество

$$-\iint_G \cdots \int uL^*v\,dt\,dx_1 \ldots dx_n=\int_{F_1} \cdots \int B[u,v]\,ds. \tag{33}$$

Подставим функцию (24) в (33), подчинив $y(t)$ условиям

$$y(0)=y'(0)=\ldots=y^{(l)}(0)=0. \tag{34}$$

В силу этих условий, интеграл по F_1 обратится в нуль, и тождество (33) примет вид

$$\iint_G \cdots \int u(t, x_1, \ldots, x_n)\left\{\sum_{k_0=0}^{l} b_{k_0}(t)\frac{d^{k_0}y(t)}{dt^{k_0}}\right\}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k x_k}\,dt\,dx_1 \ldots dx_n=0. \tag{35}$$

Превратим теперь $\iint_G \cdots \int$ в формуле (35) в повторный интеграл, произведя интеграцию при фиксированном t по области $G(t)$, являющейся пересечением области G с гиперплоскостью $t=\text{const}$, и затем по t от 0 до T.

Имеем, в частности, при $\alpha_k=A_k$ $(k=1, \ldots, n)$

$$\int_0^T dt\left\{\sum_{k_0=0}^{l} b_{k_0}(t)\frac{d^{k_0}y(t)}{dt^{k_0}}\right\}\int_{G(t)} \cdots \int u(t, x_1, \ldots, x_n)\,e^{\sum\limits_{k=1}^{n}A_k x_k}\,dx_1 \ldots dx_n=0. \tag{36}$$

Очевидно, при сделанных предположениях относительно решения u, функция

$$\varphi(t)=\int_{G(t)} \cdots \int u(t, x_1, \ldots, x_n)\,e^{\sum\limits_{k=1}^{n}A_k x_k}\,dx_1 \ldots dx_n \tag{37}$$

есть непрерывная функция от t на отрезке $[0, T]$.

Формула (36) есть тождество при любой функции $y(t)$, удовлетворяющей условиям (34). Мы можем выбрать $y(t)$ так, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\sum_{k_0=0}^{l} b_{k_0}(t)\,y^{(k_0)}(t)=\varphi(t). \tag{38}$$

Действительно, согласно (27), старший коэффициент в (38) отличен от нуля и, следовательно, в силу существования решения задачи Коши (34) для обыкновенных дифференциальных уравнений вида (38), такая функция $y(t)$ существует. Подставляя ее в (36), мы имеем

$$\int_0^T \varphi^2(t)\,dt = 0, \tag{39}$$

т. е.

$$\varphi(t) = 0 \tag{40}$$

при любом t $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Используя непрерывность функций $a^*_{k_0, k_1, \ldots, k_n}(t)$, легко заключить, что существует целая область $\alpha^*_i < \alpha_i < \alpha^{**}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, причем $\alpha^*_i < A_i < \alpha^{**}_i$, в которой условие (27) сохраняется. Заметим, что те же рассуждения приводят нас к тождеству

$$\varphi(t) = \iint\limits_{G(t)} \ldots \int u(t, x_1, \ldots x_n)\, e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \tag{41}$$

когда $\alpha^*_i < \alpha_i < \alpha^{**}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Дифференцируя последнее тождество по α_k, мы получим

$$\iint\limits_{G(t)} \ldots \int u(t, x_1, \ldots, x_n)\, e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k}\, x_1^{m_1} \ldots x_1^{m_n} dx_1 \ldots dx_n = 0 \tag{42}$$

при любых целых положительных $m_1, \ldots, m_n$ и при каждом фиксированном t $(0 \leqslant t \leqslant T)$.

Вследствие полноты системы полиномов от n переменных, из (42) мы заключаем, что

$$u(t, x_1, \ldots, x_n)\, e^{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k} \equiv 0$$

и, следовательно, $u(t, x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ во всей области G.

Поступило
23. 1. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровский И. Г., О некоторых проблемах теории уравнений с частными производными, Успехи матем. наук, т. 1, вып. 3—4 (13—14) (1946), 44—70.

[2] Плеснер А. И., Спектральная теория линейных операторов, Успехи матем. наук, т. IX (1941), 3—124.

[3] Степанов В. В., Курс дифференциальных уравнений, М.—Л., 1939.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

12 (1948), 225—248

И. М. ВИНОГРАДОВ

ОБ ОЦЕНКЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ С ПРОСТЫМИ ЧИСЛАМИ

Доказываются две теоремы, позволяющие для весьма общих случаев оценивать тригонометрические суммы с простыми числами. Даются также некоторые применения этих теорем.

Теорема 1 гл. VI моей книги (3)* позволяет для весьма общих случаев оценивать тригонометрические суммы вида

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F(x)},$$

где m — целое положительное число и $F(x)$ — целый многочлен степени $n+1 \geqslant 12$:

$$F(x) = a_{n+1}x^{n+1} + \ldots + a_1 x.$$

Теорема 2.а той же главы позволяет оценивать суммы вида

$$\sum_{x=N+1}^{N+P} e^{2\pi i f(x)},$$

где $f(x)$ — функция, в известном смысле хорошо аппроксимируемая целым многочленом степени n.

В настоящей работе доказываются теоремы, позволяющие оценивать аналогичные суммы при условии, что x пробегает простые числа, не превосходящие P. Близкие к этим теоремы, служащие для той же цели, без доказательства были опубликованы мною ранее [(1), (2)].

Обозначения. θ обозначает число, модуль которого не превосходит 1; c — положительное постоянное, $\varkappa$ — положительное постоян-

* В формулировке этой теоремы мною был допущен недосмотр. Именно, при том доказательстве, которое приведено в этой книге, формулировку случаев 1 и 3 этой теоремы, очевидно, следует заменить такой:

$$1.\quad P^{\tau} \ll q \leqslant c_1 P,$$
$$3.\quad c_2 P^{r-1} \leqslant q \ll P^{r-\tau},$$

где τ — постоянное число с условием $0 < \tau \leqslant 1$. В соответствии с этим аналогичное видоизменение формулировки следует сделать и в теореме гл. VIII. Можно также, замечая, что в формулировке леммы гл. VI указанной моей книги число k достаточно подчинить лишь условию $n < k \leqslant k_0$, где k_0 — постоянное, сохранить формулировку упомянутых случаев теоремы, но с оговоркой, что $\tau \geqslant \tau_0$, где τ_0 — положительное постоянное.

ное, не превосходящее 1, ε — произвольно малое положительное постоянное.

При $B>0$ обозначение $A \ll B$ показывает, что

$$|A| \leqslant cB.$$

Пусть совокупность значений переменного S полностью определена. Сумма каких-либо $\ll H$ слагаемых, каждое из которых принадлежит указанной совокупности, обозначается символом

$$\sum^{H} S.$$

Буквою C всегда обозначаем целое число. При вещественных A и B с условием $0<B-A<1$ обозначения

$$A<z<B \pmod 1, \quad A \leqslant z<B \pmod 1, \quad A<z \leqslant B \pmod 1,$$
$$A \leqslant z \leqslant B \pmod 1$$

соответственно показывают, что при некотором C будет

$$A+C<z<B+C, \quad A+C \leqslant z<B+C, \quad A+C<z \leqslant B+C,$$
$$A+C \leqslant z \leqslant B+C.$$

При вещественном x символом $\{x\}$ обозначаем дробную часть числа x, т. е. разность $x-[x]$, а символом (x) — расстояние числа x до ближайшего целого числа, т. е. $\min(\{x\}, 1-\{x\})$.

Буквою n обозначаем целое постоянное число, не меньшее 10; полагаем $\nu=\frac{1}{n}$.

Буквами N и P обозначаем числа с условиями $N>c_0$, $P>c_1$, где c_0 и c_1 достаточно велики.

Буквою p обозначаем простое число.

ЛЕММА 1. *При* $N^{0,5} \leqslant a \leqslant N$ *имеем*

$$\sum_{N-a<u \leqslant N} \tau(u) \ll a \log N.$$

ЛЕММА 2. (Марджанишвили). *При* $N^{0,9} \leqslant a \leqslant N$ *имеем*

$$\sum_{N-a<u \leqslant N} (\tau(u))^2 \ll a(\log N)^3.$$

ЛЕММА 3. *Пусть* k — *целое постоянное, превосходящее* n,

$$b=[1{,}25n+0{,}5], \quad h=n+2, \quad \sigma=(1-\nu)^k, \quad r=2b(k+h),$$

$$S=\sum_{z=1}^{P} e^{2\pi i f(z)}, \quad f(z)=\alpha_n z^n+\ldots+\alpha_1 z,$$

$$T=\int_0^1 \cdots \int_0^1 |S|^r \, d\alpha_n \cdots d\alpha_1.$$

Тогда имеем

$$T \ll P^{r-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\sigma}$$

Доказательство. Согласно лемме гл. VI моей книги ([3]), имеем

$$|S|^r \leqslant \sum_{s_1=1}^{\eta_1} \dots \sum_{s_k=1}^{\eta_k} \sum^{B} K(s_1, \dots, s_k).$$

Здесь $\eta_1, \dots, \eta_k$, B — положительные целые числа,

$$K(s_1, \dots, s_k) = \sum_{(x_1, \dots, x_n)} e^{2\pi i(X_1x_1+\dots+X_nx_n)}, \qquad X_s = \frac{f^{(s)}(x)}{s!},$$

x_0 — целое, суммирование распространяется на системы $(x_1, \dots, x_n)$, состоящие из целых чисел, причем каковы бы ни были целые числа $u_1, \dots, u_n$, число систем $(x_1, \dots, x_n)$ с условием

$$x_1 = u_1, \dots, x_n = u_n$$

будет $\ll \psi$, где ψ — положительное число, и

$$B\psi \ll P^{r-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\sigma}\, 2^{-s_1-\dots-s_k}.$$

От $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ здесь зависят только коэффициенты при степенях x_0 многочленов $X_1, \dots, X_n$.

Но легко находим

$$X_1 = \alpha_n \binom{n}{1} x_0^{n-1} + \alpha_{n-1}\binom{n-1}{1} x_0^{n-2} + \dots + \alpha_2 \binom{2}{1} x_0 + \alpha_1 \binom{1}{1},$$

$$X_2 = \alpha_n \binom{n}{2} x_0^{n-2} + \alpha_{n-1}\binom{n-1}{2} x_0^{n-3} + \dots + \alpha_2 \binom{2}{2},$$

. . . .

$$X_{n-1} = \alpha_n \binom{n}{n-1} x_0 + \alpha_{n-1}\binom{n-1}{n-1},$$

$$X_n = \alpha_n \binom{n}{n},$$

$$X_1x_1 + \dots + X_nx_n = Y_n\alpha_n + \dots + Y_1\alpha_1,$$

где имеем

$$Y_n = \binom{n}{1} x_0^{n-1}x_1 + \binom{n}{2} x_0^{n-2}x_2 + \dots + \binom{n}{n-1} x_0x_{n-1} + \binom{n}{n} x_n,$$

$$Y_{n-1} = \binom{n-1}{1} x_0^{n-2}x_1 + \binom{n-1}{2} x_0^{n-3}x_2 + \dots + \binom{n-1}{n-1} x_{n-1},$$

. . . .

$$Y_2 = \binom{2}{1} x_0x_1 + \binom{2}{2} x_2,$$

$$Y_1 = \binom{1}{1} x_1.$$

Поэтому

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 K(s_1, \dots, s_k)\, d\alpha_n \dots d\alpha_1 =$$

$$= \sum_{(x_1, \dots, x_n)} \int_0^1 \dots \int_0^1 e^{2\pi i(Y_n\alpha_n+\dots+Y_1\alpha_1)}\, d\alpha_n \dots d\alpha_1.$$

Но интеграл

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 e^{2\pi i(Y_n\alpha_n+\cdots+Y_1\alpha_1)}\,d\alpha_n\cdots d\alpha_1$$

равен нулю, за исключением случаев, когда $Y_n=\cdots=Y_1=0$, для которых он равен единице. Указанные случаи, очевидно, совпадают со случаями, когда $x_n=\cdots=x_1=0$; число же таких случаев $\ll\psi$. Поэтому

$$T\ll\sum_{s_1=1}^{\eta_1}\cdots\sum_{s_k=1}^{\eta_k}B\psi\ll P^{r-\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\sigma}.$$

ЛЕММА 4. *Пусть*

$$f(z)=a_nz^n+\ldots+a_1z,$$

где $a_n,\ldots,a_1$ — *вещественные, и пусть при некотором* s, *равном одному из чисел* $n,\ldots,1$, *имеем*

$$a_s=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q\tau},\quad (a,q)=1,\quad P^{\varkappa}\ll q<\tau,\quad \tau=P^{0,5s}.$$

Пусть, далее, t — *положительное, взаимно простое с* q,

$$\rho_0=\frac{0,0416\nu^2}{\log n+2},\qquad \Delta_0=P^{-\rho_0},\qquad \text{если } q>P^{0,25},$$

$$\rho_0=\frac{0,375\nu^2\varkappa}{\log\frac{n^2}{\varkappa}+4},\qquad \Delta_0=P^{-\rho_0}(\log P)^{2,5},\ \text{если } q\leqslant P^{0,25},$$

l — *целое число с условием* $0<l\leqslant P^{2\rho_0}$,

$$S=\sum_y\psi(y)\sum_x e^{2\pi i l f(t^2yx)},$$

где y *пробегает возрастающую последовательность целых положительных чисел, взаимно простых с* q, *с условием*

$$c'P^{0,25-\varepsilon}t^{-1}<y<c''P^{0,5}t^{-1}, \tag{1}$$

причем, независимо от того, как выбран интервал $Y-Y'<y\leqslant Y$ *длиною* $Y'\geqslant Y^{0,9}$, *полностью лежащий в интервале* (1), *имеем*

$$\sum_{Y-Y'<y\leqslant Y}|\psi(y)|\ll Y'\log P,\qquad \sum_{Y-Y'<y\leqslant Y}|\psi(y)|^2\ll Y'(\log P)^3.$$

Пусть, далее, x *независимо от* y *пробегает возрастающую последовательность целых положительных чисел и пусть суммирование распространяется лишь на точки* (x, y) *области*

$$0<t^2yx\leqslant P.$$

Тогда будем иметь

$$S\ll P\Delta_0t^{-1,1}.$$

Доказательство. Пусть k, b, h, σ, r имеют значения, указанные в лемме 3, и пусть $\rho_1=1,2\rho_0$. В случае $t>P^{\rho_1}$ наша лемма очевидна. Действительно, тогда

$$S\ll\sum_y|\psi(y)|\frac{P}{yt^2}.$$

А так как интервал (1) можно разбить на $\ll \log P$ интервалов вида

$$cY < y \leqslant Y, \quad 0{,}25 < c \leqslant 0{,}5, \tag{2}$$

причем, согласно условию леммы,

$$\sum_{cY<y\leqslant Y} |\psi(y)| \frac{P}{yt^2} \ll \frac{P}{Yt^2} \sum_{cY<y\leqslant Y} |\psi(y)| \ll \frac{P}{Yt^2} Y \log P = \frac{P}{t^2} \log P,$$

то будем иметь

$$S \ll \frac{P}{t^2} (\log P)^2 \ll \frac{P}{t^{1,1}} \frac{(\log P)^2}{P^{1,08\rho_0}} \ll \Delta_0 t^{-1,1}.$$

Поэтому в дальнейшем мы ограничимся лишь случаем $t \leqslant P^{\rho_0}$. Сохраняя в этом случае такое же деление интервала (1) на интервалы (2), мы часть суммы S, отвечающую выбранному интервалу (2), обозначим символом $S(Y)$. Полагая

$$H = [P^{\rho_1}], \quad Y_0 = (1-c) Y H^{-1},$$

итервал (2) мы разобьем на H интервалов вида

$$Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1. \tag{3}$$

Полагая

$$X = \frac{P}{t^2 Y_1},$$

мы можем часть S' суммы $S(Y)$, отвечающую интервалу (3), представить в форме

$$S' = \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} \psi(y) S'_y, \quad S'_y = \sum_{x \leqslant X} e^{2\pi i l f(t^2 yx)} + O(XP^{-\rho_1}).$$

Действительно, имеем

$$\frac{P}{t^2 y} - X \ll \frac{P(Y_1 - y)}{t^2 Y^2} \ll \frac{PY_0}{t^2 Y^2} \ll XP^{-\rho_1}.$$

Полагая $\beta_j = \beta_j(y) = la_j t^2 j y^j$, находим

$$S'_y = \sum_{x \leqslant X} e^{2\pi i(\beta_n x^n + \cdots + \beta_1 x)}.$$

При вещественных $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ положим

$$S''_y = \sum_{x \leqslant X} e^{2\pi i(\alpha_n x^n + \cdots + \alpha_1 x)}.$$

Если точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y) n-мерного пространства, ограниченной неравенствами

$$\beta_n - 0{,}5X^{-n}P^{-\rho_1} \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n + 0{,}5X^{-n}P^{-\rho_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\beta_1 - 0{,}5X^{-1}P^{-\rho_1} \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 + 0{,}5X^{-1}P^{-\rho_1},$$

то будем иметь

$$S'_y = S''_y + O(XP^{-\rho_1}), \quad |S'_y|^r \ll |S''_y|^r + X^r P^{-r\rho_1}.$$

Умножив последнее неравенство почленно на

$$X^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_1} d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

и интегрируя по области (Ω_y), получим

$$|S'_y|^r \ll X^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_1} \int_{(\Omega_y)} \ldots \int |S''_y|^r \, d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + X^r P^{-r\rho_1}.$$

Теперь оценим число G областей (Ω_y), отвечающих различным значениям y, содержащих точки, координаты которых могут отличаться лишь целыми слагаемыми от координат некоторой заданной точки. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две такие области; имеем

$$\beta_s(y) - \beta_s(y_0) = C + O(P^{-s-\rho_1}),$$

$$\frac{lat^{2s}(y^s - y_0^s)}{q} + \frac{\theta' t^{2s}(y^s - y_0^s)}{q\tau} = C + O(P^{-s-\rho_1}),$$

$$\frac{lat^{2s}(y^s - y_0^s)}{q} = C + O\left(\frac{P^{(n+2)\rho_1}}{q}\right).$$

Но, как известно, при данном C' число решений сравнения

$$lat^{2s} y^s \equiv C' \pmod q$$

будет $\ll \left(\frac{Y_0}{q} + 1\right) q^{\varepsilon_0} l$. Поэтому находим

$$G \ll \left(\frac{Y_0}{q} + 1\right) q^{\varepsilon_0} P^{(n+4)\rho_1}.$$

Следовательно (лемма 3),

$$\sum_{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1} |S'_y|^r \ll \left(\frac{Y_0}{q} + 1\right) q^{\varepsilon_0} X^{r + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{(2n+4)\rho_1} + Y_0 X^r P^{-r\rho_1}.$$

Далее, выводим (лемма 2)

$$|S'|^2 \ll \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1} |\psi(y)|^3 \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1} |S'_y|^2 \ll Y_0 (\log P)^3 \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1} |S'_y|^2,$$

$$|S'|^r \ll (|S'|^2)^{0,5r} \ll Y_0^{0,5r} (\log P)^{1,5r} Y_0^{0,5r-1} \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leq Y_1} |S'_y|^r \ll$$

$$\ll Y_0^r (\log P)^{1,5r} X^r \left(\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{Y_0}\right) q^{\varepsilon_0} X^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{(2n+4)\rho_1} + P^{-r\rho_1}\right),$$

$$S(Y) = \sum^{H} S', \qquad |S(Y)|^r \ll H^{r-1} \sum^{H} |S'|^r \ll$$

$$\ll Y^r X^r (\log P)^{1,5r} \left(\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{Y}\right) q^{\varepsilon_0} X^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{(2n+5)\rho_1} + P^{-r\rho_1}\right),$$

откуда, ввиду

$$\frac{1}{Y} \ll \frac{t}{P^{0,25-\varepsilon}}, \qquad Y^r X^r \ll P^r t^{-2r},$$

получаем

$$|S(Y)|^r \ll P^r t^{-1,5r} (\log P)^{1,5r} \left(\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{P^{0,25-\varepsilon}}\right) q^{\varepsilon_0} X^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{(2n+5)\rho_1} + P^{-r\rho_1}\right).$$

Теперь положим

$$k = \left[\frac{\log c_0 n(n+1)}{-\log(1-\nu)} + 1\right], \qquad c_0 > 1.$$

Тогда будем иметь

$$S \ll Pt^{-1,5}(\log P)^{2,5}\left(\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{P^{0,25-\varepsilon}}\right)q^{\varepsilon_0}P^{\frac{1}{2c_0}+(2n+5)\rho_1}+P^{-r\rho_1}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Пусть сначала $q > P^{0,25}$. Тогда, полагая $c_0 = 12,72$, находим

$$S \ll Pt^{-1,5}P^{-\frac{0,208}{r}},$$

$$\frac{0,208}{r} \geqslant \frac{0,208}{(2,5n+1)((n-0,5)\log 12,72n(n+1)+n+3)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{0,0832}{(1+0,4\nu)((1-0,5\nu)\log 12,72n^2+1+4\nu)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{0,0832}{\log 12,72n^2+(1+0,4\nu)(1+4\nu)} \geqslant \frac{0,0832}{2\log n+4},$$

что и доказывает лемму в случае $q > P^{0,25}$.

Пусть, теперь, $q \leqslant P^{0,25}$. Тогда, полагая $c_0 = 12,72\varkappa^{-1}$, находим

$$S \ll Pt^{-1,5}P^{-\frac{0,94}{r}}(\log P)^{2,5},$$

$$\frac{0,94\varkappa}{r} \geqslant \frac{0,375\nu^2\varkappa}{(1+0,4\nu)\left((1-0,5\nu)\log 12,72\frac{n^2}{\varkappa}+1+4\nu\right)} \geqslant \frac{0,375\nu^2\varkappa}{\log\frac{n^3}{\varkappa}+4},$$

что и доказывает лемму в случае $q \leqslant P^{0,25}$.

ЛЕММА 5. *Пусть* $a_n, \ldots, a_1$ — *вещественные,* s — *одно из чисел* $n, \ldots, 2$,

$$a_s = \frac{a}{q}+\frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q)=1, \quad P^{\varkappa} \ll q \leqslant \tau, \quad \tau = P^{0,5s},$$

$$b_j = la_jd^jt^j, \quad f(z) = b_nz^n+\ldots+b_1z, \quad P^{0,75} \leqslant M \leqslant P,$$

$$2M \leqslant M' < 4M, \quad S = \sum_{\substack{M<tz\leqslant M' \\ 0\leqslant dtz\leqslant P}} e^{2\pi i f(z)},$$

d — *положительное, взаимно простое с* q, $d < P^{0,25}$, t — *делитель числа* q, *не превосходящий* P^{ρ_0}, l — *целое число с условием* $0 < l \leqslant P^{2\rho_0}$,

$$\rho_0 = \frac{0,416\nu^2}{\log n+2}, \quad \textit{если} \quad q > P^{0,25},$$

$$\rho_0 = \frac{0,375\nu^2\varkappa}{\log\frac{n^2}{\varkappa}+4}, \quad \textit{если} \quad q \leqslant P^{0,25}.$$

Тогда будем иметь

$$S \ll \frac{M}{t}P^{-\rho_0}.$$

Доказательство. При $q > P^{0,25}$ имеем

$$s\rho_0 = \frac{0,416\nu^2s}{\log n+2} < 0,001\nu s < 0,0001s, \quad s\rho_0 < 0,004\cdot\frac{1}{4},$$

а при $q \leqslant P^{0,25}$ имеем

$$s\rho_0 = \frac{0,375\nu^2s\varkappa}{\log\frac{n^3}{\varkappa}+4} < 0,004\nu s\varkappa < 0,0001s, \quad s\rho_0 < 0,004\varkappa.$$

Поэтому

$$b_s = \frac{la_s d^s t^s}{q} + \frac{\theta l d^s t^s}{q\tau} = \frac{a_0}{q_0} + \frac{\theta'}{q_0 P^{0,499}}, \quad (a_0, q_0) = 1,$$

$$q^{0,996} < q_0 < P^{0,53}.$$

Пусть $Y = [P^{0,499}]$ и y пробегает целые числа интервала $0 < y \leqslant Y$. Очевидно,

$$S = \frac{1}{Y}\sum_y S_y + O(Y), \quad S_y = \sum_{Z<z\leqslant Z'} e^{2\pi i f(y+z)},$$

$$Z = Mt^{-1}, \quad Z' = \min\left(\frac{P}{d}t^{-1},\ M't^{-1}\right),$$

$$f(y+z) - f(y) = Y_n z^n + \ldots + Y_1 z, \quad Y_j = Y_j(y) = \frac{f^{(j)}(y)}{j!}.$$

Положим

$$S' = \sum_{Z<z\leqslant Z'} e^{2\pi i(\alpha_n z^n + \cdots + \alpha_1 z)}, \quad k = \left[\frac{\log c_0 n(n+1)}{-\log(1-\nu)} + 1\right], \quad c_0 > 1,$$

и пусть b, h, σ, r имеют значения, указанные в лемме 3.

Если точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y) n-мерного пространства, ограниченной неравенствами

$$Y_n - 0{,}5Z^{-n}P^{-\rho_0} \leqslant \alpha_n \leqslant Y_n + 0{,}5Z^{-n}P^{-\rho_0},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_1 - 0{,}5Z^{-1}P^{-\rho_0} \leqslant \alpha_1 \leqslant Y_1 + 0{,}5Z^{-1}P^{-\rho_0},$$

то имеем

$$|S_y| = |S'| + O(ZP^{-\rho_0}), \quad |S_y|^r \ll |S'|^r + Z^r P^{-r\rho_0}.$$

Умножая последнее неравенство почленно на

$$Z^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_0}\, d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

и распространяя интегрирование на область (Ω_y), получим

$$|S_y|^r \ll Z^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_0} \int \ldots \int |S'|^r\, d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + Z^r P^{-r\rho_0},$$

$$|S|^r \ll Z^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_0} Y^{-1} \sum_y \int \underset{(\Omega_y)}{\ldots} \int |S'|^r\, d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + Z^r P^{-r\rho_0}.$$

Теперь оценим число G областей (Ω_y), отвечающих различным значениям y, содержащих точки с координатами, отличающимися лишь целыми слагаемыми от координат некоторой заданной точки $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две такие области; имеем

$$Y_{n-1}(y) - Y_{n-1}(y_0) = C_{n-1} + O(Z^{-n+1}P^{-\rho_0}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$Y_{s-1}(y) - Y_{s-1}(y_0) = C_{s-1} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}),$$

что может быть записано так:

$$C_{n-1} + O(Z^{-n+1}P^{-\rho_0}) = \binom{n}{n-1} b_n (y - y_0),$$
$$C_{n-2} + O(Z^{-n+2}P^{-\rho_0}) = \binom{n}{n-2} b_n (y^2 - y_0^2) + \binom{n-1}{n-2} b_{n-1}(y - y_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_{s-1} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}) = \binom{n}{s-1} b_n (y^{n+1-s} - y_0^{n+1-s}) + \ldots + \binom{s}{s-1} b_s (y - y_0).$$

Умножая эти равенства почленно на

$$D_{n-1} = 1!,\ D_{n-2} = 1!\,2!,\ \ldots,\ D_{s-1} = 1!\,2!\ \ldots\ (n+1-s)!,$$

после очевидных преобразований получим равенства

$$C'_{n-2} + O(Z^{-n+2}P^{-\rho_0}) = D_{n-2}\binom{n-1}{n-2} b_{n-1}(y - y_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C'_{s-1} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}) = D_{s-1}\binom{n-1}{s-1} b_{n-1}(y^{n-s} - y_0^{n-s}) + \ldots$$
$$\ldots + D_{s-1}\binom{s}{s-1} b_s (y - y_0).$$

Отсюда путем аналогичных преобразований получим равенства

$$C''_{n-3} + O(Z^{-n+3}P^{-\rho_0}) = D_{n-3}\binom{n-2}{n-3} b_{n-2}(y - y_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C''_{s-1} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}) = D_{s-1}\binom{n-2}{s-1} b_{n-2}(y^{n-s-1} - y_0^{n-s-1}) + \ldots$$
$$\ldots + D_{s-1}\binom{s}{s-1} b_s (y - y_0)$$

и т. д.; наконец, мы получим одно равенство

$$C_{s-1}^{(n-s)} + O(Z^{-s+1}P^{-\rho_0}) = D_{s-1}\binom{s}{s-1} b_s (y - y_0).$$

Полагая здесь $D_{s-1}\binom{s}{s-1} = C_0$, при некотором c' получим

$$(C_0 b_s (y - y_0)) \leqslant c' Z^{-s+1} P^{-\rho_0},$$

откуда легко найдем

$$\left(\frac{C_0 a_0 (y - y_0)}{q_0}\right) \ll \frac{1}{q_0} + \frac{1}{P^{0,75(s-1)}}.$$

При $s > 2$ или также и при $s = 2$, но при $q_0 \leqslant P^{0,75}$, из последнего неравенства следует

$$\left(\frac{C_0 a_0 (y - y_0)}{q_0}\right) \ll \frac{1}{q_0}.$$

А так как при данном y_0 и при данном C' число решений сравнения

$$y - y_0 \equiv C' \pmod{q_0}$$

будет

$$\ll \frac{Y}{q_0} + 1,$$

то в рассматриваемом случае имеем

$$G \ll \frac{Y}{q_0} + 1 \ll Y\left(\frac{1}{q_0} + \frac{1}{Y}\right).$$

При $s=2$, но при $q_0 > P^{0,75}$, имеем

$$\left(\frac{C_0 a_0 (y-y_0)}{q_0}\right) \ll \frac{P^{0,25}}{q_0},$$

откуда легко найдем

$$G \ll P^{0,25} \ll YP^{-0,249}.$$

Таким образом, во всех случаях имеем

$$G \ll Y\left(\frac{1}{q_0}+\frac{1}{P^{0,249}}\right).$$

Ввиду всего доказанного, находим

$$S|^r \ll Z^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_0}\left(\frac{1}{q_0}+\frac{1}{P^{0,249}}\right)\int\limits_0^1 \cdots \int\limits_0^1 |S'|^r d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + Z^r P^{-r\rho_0},$$

откуда, применяя лемму 3, выводим

$$|S|^r \ll Z^{r+\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{n\rho_0}\left(\frac{1}{q_0}+\frac{1}{P^{0,249}}\right)+Z^r P^{-r\rho_0} \ll$$

$$\ll Z^r P^{n\rho_0+\frac{1}{2c_0}}\left(\frac{1}{q^{0,996}}+\frac{1}{P^{0,249}}\right)+Z^r P^{-r\rho_0},$$

$$S \ll Z\left(P^{n\rho_0+\frac{1}{2c_0}}\left(\frac{1}{q^{0,996}}+\frac{1}{P^{0,249}}\right)\right)^{\frac{1}{r}}+ZP^{-\rho_0}.$$

Пусть сначала $q > P^{0,25}$. Тогда, полагая $c_0 = 12,72$, находим

$$S \ll Z(P^{n\rho_0+0,0394-0,249})^{\frac{1}{r}}+ZP^{-\rho_0} \ll ZP^{-\frac{0,208}{r}}+ZP^{-\rho_0},$$

откуда, повторяя рассуждения конца доказательства леммы 4, получим

$$S \ll ZP^{-\rho_0}.$$

Пусть, теперь, $q \leqslant P^{0,25}$. Тогда, полагая $c_0 = 12,72\varkappa^{-1}$, находим

$$S \ll Z(P^{n\rho_0+0,0394\varkappa-0,996\varkappa})^{\frac{1}{r}}+ZP^{-\rho_0} \ll$$

$$\ll ZP^{\frac{-0,94\varkappa}{r}}+ZP^{-\rho_0} \ll ZP^{-\rho_0}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть l — целое положительное число,*

$$S=\sum_{p\leqslant P} e^{2\pi i l f(p)}, \quad f(p)=a_n p^n+\cdots+a_1 p,$$

причем $a_n, \ldots, a_1$ вещественные, и при некотором s, равном одному из чисел $n, \ldots, 2$, имеем

$$a_s=\frac{a}{q}+\frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q)=1, \quad P^{\varkappa} \ll q \leqslant \tau, \quad \tau=P^{0,5s}.$$

Тогда, полагая

$$\rho=\frac{0,041\nu^2}{\log n+2}, \quad \text{если } q > P^{0,25},$$

$$\rho=\frac{0,37\nu^2\varkappa}{\log\frac{n^2}{\varkappa}+4}, \quad \text{если } q \leqslant P^{0,25},$$

при соблюдении условия $l \leqslant P^{2\rho_0}$ *будем иметь*

$$S \ll P^{1-\rho}.$$

Доказательство. Пусть ρ_0 и Δ_0 имеют те же значения, что и в лемме 4.

Пусть F — произведение всех простых чисел, не превосходящих $P^{0,25}$ и не делящих q, пусть Q пробегает положительные числа, взаимно простые с Fq, d пробегает делители числа F, наконец, m пробегает положительные числа, взаимно простые с q. Находим

$$\sum_{Q \leqslant P} e^{2\pi i l f(Q)} = \sum_{dm \leqslant P}\sum \mu(d)\, e^{2\pi i l f(dm)}. \tag{4}$$

Пусть Q_j пробегает значения Q, имеющие ровно j простых сомножителей. Тогда левая часть равенства (4) представится в форме

$$S + S_2 + S_3 + O(P^{0,25}), \quad S_2 = \sum_{Q_2 \leqslant P} e^{2\pi i l f(Q_2)}, \quad S_3 = \sum_{Q_3 \leqslant P} e^{2\pi i l f(Q_3)}.$$

Сначала оценим S_2. Очевидно,

$$S_2 = \frac{1}{2} S_2' + O(\sqrt{P}), \quad S_2' = \sum_{Q_1 Q_1' \leqslant P}\sum e^{2\pi i l f(Q_1 Q_1')},$$

где Q_1' пробегает те же значения, что и Q_1. Находим

$$S_2' = \sum_{\substack{Q_1 Q_1' \leqslant P \\ Q_1 \leqslant \sqrt{P}}}\sum e^{2\pi i l f(Q_1 Q_1')} + \sum_{\substack{Q_1 Q_1' \leqslant P \\ Q_1' \leqslant \sqrt{P},\ Q_1' > \sqrt{P}}}\sum e^{2\pi i l f(Q_1 Q_1')}.$$

К обоим слагаемым суммы, стоящей справа, можно применить лемму 4 ($t = 1$, $\psi(y) = 1$, $P^{0,25} < Q_1 \leqslant P^{0,5}$). Получим

$$S_2' \ll P\Delta_0, \quad S_2 \ll P\Delta_0.$$

Теперь оценим S_3. Очевидно,

$$S_3 = \frac{1}{3} S_3' + O(P^{0,75}), \quad S_3' = \sum_{Q_1 Q_2 \leqslant P}\sum e^{2\pi i l f(Q_1 Q_2)}.$$

К сумме S_3' можно применить лемму 4, так как, ввиду $Q_2 > \sqrt{P}$, здесь Q_1 пробегает значения с условием

$$P^{0,25} < Q_1 < P^{0,5}.$$

Получим

$$S_3' \ll P\Delta_0, \quad S_3 \ll P\Delta_0.$$

Правую часть равенства (4) можно представить в виде $U_0 - U_1$, где

$$U_0 = \sum_{dm \leqslant P}{}' \sum e^{2\pi i l f(dm)}, \quad U_1 = \sum_{dm \leqslant P}{}'' \sum e^{2\pi i l f(dm)},$$

причем $\sum'$ распространяется на значения d с условием $\mu(d) = 1$, а $\sum''$ распространяется на значения d с условием $\mu(d) = -1$. Мы огра-

ничимся, далее, оценкой лишь суммы U_0, так как сумма U_1 оценивается аналогичным способом.

Весь интервал $0 < m \leqslant P$ можно разбить на $\ll \log P$ интервалов вида

$$M < m \leqslant M', \quad 2M \leqslant M' < 4m.$$

Часть $U_0(M)$ суммы U_0, отвечающая такому интервалу, представится в форме

$$U_0(M) = \sum_{\substack{dm \leqslant P \\ M < m \leqslant M'}}{}' \sum e^{2\pi i l f(dm)}.$$

Сначала рассмотрим случай $M \leqslant P^{0,25-c}$. Согласно лемме 5, гл. IX моей книги (³), при произвольно малом c все делители d числа F с условием $\mu(d) = 1$ мы можем распределить среди

$$< D = (\log P)^{\frac{\log \log P}{\log (1+c)}}$$

совокупностей, причем для каждой совокупности существует свое φ с условием, что принадлежащие этой совокупности значения d удовлетворяют неравенствам

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1+c}.$$

Для некоторых совокупностей может оказаться $\varphi \leqslant P^{0,25-c} M^{-1}$. Для каждой из оставшихся совокупностей существует свое целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел u и v такие, что все значения u лежат в интервале

$$P^{0,25-c} M^{-1} < u \leqslant P^{0,5} M^{-1},$$

причем все значения d рассматриваемой совокупности, взятые каждое B раз, получим, если из всех произведений uv выберем лишь те, которые удовлетворяют условию $(u, v) = 1$. Пусть U' — часть суммы $U_0(M)$, отвечающая выбранной совокупности.

Пусть сначала

$$\varphi \leqslant P^{0,25-c} M^{-1}.$$

Тогда, очевидно, имеем

$$U' \ll P^{(0,25-c)(1+c)} \ll P\Delta_0.$$

Пусть, далее,

$$\varphi > P^{0,25-c} M^{-1}.$$

Тогда U' можно представить в форме

$$U' = \sum_m \sum_u \sum_v e^{2\pi i l f(muv)},$$

где суммирование распространяется на значения m, u, v с условиями

$$M < m \leqslant M', \quad P^{0,25-c} M^{-1} < u \leqslant P^{0,5} M^{-1}, \quad muv \leqslant P, \quad (uv) = 1.$$

Заставляя t пробегать делители числа F, имеем

$$U' = \sum_t \mu(t) U'_t, \quad U'_t = \sum_m \sum_{u_1} \sum_{v_1} e^{2\pi i l f(t^2 m u_1 v_1)},$$

где u_1 и v_1 пробегают частные от деления на t чисел u и v, кратных t, и суммирование распространяется на область

$$M < m \leqslant M', \quad P^{0,25-c} M^{-1} t^{-1} < u_1 \leqslant P^{0,5} M^{-1} t^{-1}, \quad t^2 m u_1 v_1 \leqslant P.$$

Но число $\psi(y)$ решений неопределенного уравнения $mu_1 = y$ не превосходит $\tau(y)$; поэтому $\psi(y)$ удовлетворяет условиям леммы 4.

Имеем

$$U'_t = \sum_y \psi(y) \sum_{v_1} e^{2\pi i l f(t^2 y v_1)},$$

где суммирование распространяется на область

$$P^{0,25-c} t^{-1} \ll y \ll P^{0,5} t^{-1}, \quad t^2 y v_1 \leqslant P.$$

Поэтому, применяя лемму 4, легко найдем

$$U'_t \ll P \Delta_0 t^{-1,1};$$

вместе с тем получим

$$U' \ll \sum_t P \Delta_0 t^{-1,1} \ll P \Delta_0.$$

Следовательно, в случае $M \leqslant P^{0,25-c}$ имеем

$$U_0(M) \ll D P \Delta_0.$$

Пусть, теперь, $P^{0,25-c} < M \leqslant P^{0,5}$. Тогда (полагая $m = y$, $d = x$, $t = 1$, $\psi(y) = 1$) мы можем применить лемму 4. Получим

$$U_0(M) \ll P \Delta_0.$$

Пусть $P^{0,5} < M \leqslant P^{0,75}$. Тогда для d достаточно брать лишь значения с условием

$$P^{0,25} \ll d < P^{0,5}.$$

Поэтому (полагая $d = y$, $m = x$, $t = 1$, $\psi(y) = 1$) мы можем применить лемму 4. Получим

$$U_0(M) \ll P \Delta_0.$$

Пусть, наконец, $M > P^{0,75}$; тогда

$$U_0(M) = \sum_{\substack{dm \leqslant P \\ M < m \leqslant M'}} \sum e^{2\pi i l f(dm)} = \sum_d \sum_{t \setminus q} \mu(t) S(d, t),$$

$$S(d,t) = \sum_{\substack{dtz \leqslant P \\ M < tz \leqslant M'}} e^{2\pi i l f(dtz)},$$

причем z пробегает целые положительные числа.

При $t \leqslant P^{\rho_0}$ к сумме $S(d, t)$ можно применить лемму. 5. Получим

$$S(d, t) \ll \frac{M}{t} P^{-\rho_0}.$$

При $t > P^{\rho_0}$, очевидно, имеем

$$S(d, t) \ll \frac{M}{t} \ll MP^{-\rho_0}.$$

Следовательно,

$$U_0(M) \ll \frac{P}{M} MP^{-\rho_0} \log P + \frac{P}{M} MP^{-\rho_0(1-\varepsilon_1)} \ll P^{1-\rho_0(1-\varepsilon_1)}.$$

Собирая все доказанное, получим

$$U_0 \ll \log P (DP\Delta_0 + P^{1-\rho_0+\rho_0\varepsilon_1}) \ll P^{1-\rho}.$$

ЛЕММА 6. *Пусть* $0{,}5 < P_1 < P_2 \leqslant P$ *и в интервале* $P_1 < x \leqslant P_2$ *вещественная функция* $f(x)$ *имеет непрерывные производные* $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$, *причем* $f^{(n)}(x)$ *и*

$$\varphi(x) = xf^{(n)}(x) - (n-1) f^{(n-1)}(x)$$

сохраняют неизменные знаки, и при некотором f, *удовлетворяющем условию* $0 \leqslant f \leqslant 1$, *и при*

$$A = P^{\frac{n+1}{2}+f}$$

имеем

$$\frac{c_3}{A} \leqslant |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{c_4}{A}, \quad \frac{c_5 P}{A} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{c_6 P}{A}, \quad |f^{(n+1)}(x)| \leqslant \frac{c_7}{AP}.$$

Пусть, далее, t — *целое положительное число,* l — *целое число с условием* $0 < l \leqslant P^{2\rho'}$ *и*

$$S = \sum_y \psi(y) \sum_x e^{2\pi i l f(t^2 yx)},$$

где y *пробегает возрастающую последовательность целых положительных чисел с условием*

$$P^{0,25-\varepsilon} t^{-1} \ll y \ll P^{0,5} t^{-1}, \tag{5}$$

причем, независимо от того, как выбран интервал $Y - Y' < y \leqslant Y$ *длиною* $Y' \geqslant Y^{0,9}$, *полностью лежащий в интервале* (5), *имеем*

$$\sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} |\psi(y)| \ll Y' \log P, \qquad \sum_{Y-Y'<y\leqslant Y} |\psi(y)|^2 \ll Y'(\log P)^3.$$

Пусть, наконец, x *независимо от* y *пробегает возрастающую последовательность целых положительных чисел и пусть суммирование распространяется лишь на точки* (x, y) *области*

$$P_1 < t^2 yx \leqslant P_2.$$

Тогда будем иметь

$$S \ll P^{1-\rho'} t^{-1,1}, \quad \rho' = \frac{0{,}046\nu^2}{\log n + 2}.$$

Доказательство. Пусть k, b, h, σ, r имеют значения, указанные в лемме 3, и пусть $\rho_1 = 1{,}2\rho'$. В случае $t > P^{\rho_1}$ лемма очевидна; поэтому рассмотрим лишь случай $t \leqslant P^{\rho_1}$. Интервал (5) мы разобьем на $\ll \log P$ интервалов вида

$$cY < y \leqslant Y, \quad 0{,}25 < c \leqslant 0{,}5. \tag{6}$$

Часть суммы S, отвечающую интервалу (6), обозначим символом $S(Y)$. Полагая

$$H=[P^{\rho_1}], \quad Y_0=(1-c)YH^{-1},$$

интервал (6) мы разобьем на H интервалов вида

$$Y_1-Y_0<y\leqslant Y_1. \tag{7}$$

Полагая

$$X_1=\frac{P_1}{t^2Y_1}, \quad X_2=\frac{P_2}{t^2Y_1},$$

мы можем часть S' суммы $S(Y)$, отвечающую интервалу (7), представить в форме

$$S'=\sum_{Y_1-Y_0<y\leqslant Y_1}\psi(y)S'_y, \quad S'_y=\sum_{X_1<x\leqslant X_2}e^{2\pi i lf(t^2yx)}+O(X_1P^{-\rho_1}).$$

Действительно, имеем

$$\frac{P}{t^2y}-X_1\ll\frac{P_1(Y_1-y)}{t^2Y^2}\ll X_1P^{-\rho_1}, \quad \frac{P_2}{t^2y}-X_2\ll\frac{P_2(Y_1-y)}{t^2Y^2}\ll X_1P^{-\rho_1}.$$

Интервал $X_1<x\leqslant X_2$ мы разобьем, далее, на $P^{0,5-\frac{0,5+f}{n-1}}$ интервалов вида

$$x'<x\leqslant x'', \quad x''-x'\ll U, \quad U=X_1P^{-0,5+\frac{0,5+f}{n-1}}.$$

Пусть

$$S''_y=\sum_{x'<x\leqslant x''}e^{2\pi i lf(t^2yx)}.$$

Полагая $x=x'+u$, получим

$$S''_y=\sum_u e^{2\pi i lf(t^2yx'+t^2yu)},$$

$$lf(t^2yx'+t^2yu)=\Phi_y(u)+O(P^{-0,16}), \quad \Phi_y(u)=\beta_nu^n+\ldots+\beta_1u+\beta_0,$$

$$\beta_s=\beta_s(y)=\frac{lf^{(s)}(t^2yx')}{s!}(t^2y)^s.$$

Пусть, теперь,

$$\Phi(u)=\alpha_nu^n+\ldots+\alpha_1u, \quad S'''=\sum_u e^{2\pi i\Phi(u)}.$$

Если точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y) n-мерного пространства, заданной неравенствами

$$\beta_n-0,5U^{-n}P^{-\rho_1}\leqslant\alpha_n\leqslant\beta_n+0,5U^{-n}P^{-\rho_1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_1-0,5U^{-1}P^{-\rho_1}\leqslant\alpha_1\leqslant\beta_1+0,5U^{-1}P^{-\rho_1},$$

то имеем

$$|S''_y|=|S'''|+O(UP^{-\rho_1}), \quad |S''_y|^r\leqslant|S'''|^r+U^rP^{-r\rho_1}.$$

Умножая последнее неравенство почленно на

$$U^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_1}\, d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

и интегрируя по области (Ω_y), получим

$$|S''_y|^r \ll U^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho_1} \int \cdots \int_{(\Omega_y)} \Big| \sum_u e^{2\pi i \Phi(u)} \Big|^r d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + U^r P^{-r\rho_0}.$$

Теперь оценим число G областей (Ω_y), отвечающих различным y, содержащих точки, координаты которых могут отличаться лишь целыми слагаемыми от координат некоторой заданной точки. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две такие области. Имеем

$$\beta_{n-1}(y) - \beta_{n-1}(y_0) = C_0 + O(U^{-n+1} P^{-\rho_1}).$$

При этом, если y и $y+1$ лежат в интервале (7), то имеем

$$\beta_{n-1}(y+1) - \beta_{n-1}(y) = \frac{l\varphi(t^2 x' y_0)\, t^{2(n-1)} y_0^{n-2}}{(n-1)!}, \quad y < y_0 < y+1.$$

Поэтому

$$\frac{c_9}{B} \leqslant |\beta_{n-1}(y+1) - \beta_{n-1}(y)| \leqslant \frac{c_{10}}{B}, \quad B = \frac{A}{lPt^{2(n-1)}Y^{n-2}},$$

откуда также следует, что разность между наибольшими и наименьшими значениями $\beta_{n-1}(y)$ в интервале (7) будет

$$\ll \frac{YH^{-1}}{B} \ll lYH^{-1}Pt^{2(n-1)}Y^{n-2}P^{-0,5(n+1)-f} \ll P^{n\rho_1}.$$

Кроме того, находим

$$U^{-n+1}P^{-\rho_1}B \ll X^{-n+1}P^{0,5(n-1)-0,5-f}P^{0,5(n+1)+f-1}t^{-2(n-1)}Y^{-(n-2)} \ll 1.$$

Поэтому имеем $G \ll P^{n\rho_1}$ и, следовательно,

$$\sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} |S''_y|^r \ll U^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{2n\rho_1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 |S'''|^r d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + Y_0 U^r P^{-r\rho_1},$$

откуда, применяя лемму 3, выводим

$$\sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} |S''_y|^r \ll U^{r + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{2n\rho_1} + Y_0 U^r P^{-r\rho_1},$$

Далее, находим

$$\Big| \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} \psi(y) S''_y \Big|^2 \ll Y_0 (\log P)^3 \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} |S''_y|^2,$$

$$\Big| \sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} \psi(y) S''_y \Big|^r \ll Y_0^{r-1} (\log P)^{1,5r} (U^{r + \frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{2n\rho_1} + Y_0 U^r P^{-r\rho_1}),$$

$$\sum_{Y_1 - Y_0 < y \leqslant Y_1} \psi(y) S''_y \ll Y_0 U (\log P)^{1,5} (U^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{2n\rho_1} Y_0^{-1} + P^{-r\rho_1})^{\frac{1}{r}},$$

$$S' \ll Y_0 X_1 (\log P)^{1,5} (U^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{n\rho_1} Y_0^{-1} + P^{-r\rho_1})^{\frac{1}{r}},$$

$$S(Y) \ll YX_1(\log P)^{1,5}\left(U^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma}P^{(2n+1)\rho_1}Y^{-1}+P^{-r\rho_1}\right)^{\frac{1}{r}} \ll$$

$$\ll Pt^{-2}(\log P)^{1,5}\left(P^{\left(0,25+\varepsilon+\frac{1,5}{n-1}\right)\frac{n(n+1)}{2}\sigma+(2n+1)\rho_1}P^{-0,25+\varepsilon}+P^{-r\rho_1}\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$S \ll Pt^{-2}\left(P^{0,417\frac{n(n+1)}{2}\sigma-0,2477}+P^{-r\rho_1}\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Полагая

$$k=\left[\frac{\log 12,72n(n+1)}{-\log(1-\nu)}+1\right],$$

отсюда получим

$$S \ll Pt^{-2}\left(P^{0,0164-0,2477}+P^{-r\rho'}\right)^{\frac{1}{r}} \ll Pt^{-2}\left(P^{-\frac{0,23}{r}}+P^{-\rho'}\right).$$

Повторяя рассуждения конца доказательства леммы 4, мы убедимся в справедливости нашей леммы.

ЛЕММА 7. *Пусть* $0,5\,P < P_1 < P_2 \leqslant P$ *и в интервале* $P_1 < x \leqslant P_2$ *вещественная функция* $f(x)$ *имеет непрерывные производные* $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$, *причем* $f^{(n)}(x)$ *и*

$$\varphi(x)=xf^{(n)}(x)-(n-1)f^{(n-1)}(x)$$

сохраняют неизменные знаки, и при некотором f, *удовлетворяющем условию* $0 \leqslant f \leqslant 1$, *и при*

$$A=P^{\frac{n+1}{2}+f}$$

имеем

$$\frac{c_3}{A} \leqslant |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{c_4}{A}, \quad \frac{c_5P}{A} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{c_6P}{A}, \quad |f^{(n+1)}(x)| \leqslant \frac{c_7}{AP}.$$

Пусть, далее,

$$P^{0,75} < M \leqslant P, \quad 2M \leqslant M' < 4M,$$

$$S=\sum_{\substack{M<z\leqslant M'\\ P_1<dz\leqslant P_2}} e^{2\pi i l f(dz)},$$

d — *целое положительное число, не превосходящее* $P^{0,35}$,

$$\rho''=\frac{0,09\nu^2}{\log n+2},$$

l — *целое число с условием* $0 < l \leqslant P^{\rho''}$. *Тогда будем иметь*

$$S < MP^{-\rho''}.$$

Доказательство. Пусть k, b, h, σ, r имеют значения, указанные в лемме 3. Пусть

$$Z=\max\left(M, \frac{P_1}{d}\right), \quad Z'=\min\left(M', \frac{P_2}{d}\right), \quad Y=[ZP^{-\rho''}]$$

и y пробегает числа $1, \ldots, Y$. Очевидно,

$$S=\frac{1}{Y}\sum_y S_y+O(Y), \quad S_y=\sum_{Z<z\leqslant Z'} e^{2\pi i l f(dy+dz)}.$$

Но интервал $Z < z \leqslant Z'$ можно разбить на

$$\ll P^{0,5-\frac{0,5+f}{n-1}}$$

интервалов длиною $\ll U$, где

$$U = ZP^{-0,5+\frac{0,5+f}{n-1}}.$$

Пусть $z_1 < z \leqslant z_2$ — один из таких интервалов. Тогда, полагая

$$S' = \sum_y \sum_u e^{2\pi i l f(d(y+z_1)+du)},$$

имеем

$$f(d(y+z_1)+du) = \Phi_y(u) + O\left(\frac{l(dU)^{n+1}}{AP}\right) = \Phi_y(u) + O(P^{-0,16}),$$

$$\Phi_y(u) = \beta_n u^n + \ldots + \beta_1 u + \beta_0, \quad \beta_s = \beta_s(y) = \frac{lf^{(s)}(d(y+z_1))d^s}{s!}$$

и вместе с тем

$$S' = S'' + O(YUP^{-0,16}), \quad S'' = \sum_y \sum_u e^{2\pi i \Phi_y(u)}.$$

Положим

$$\Phi(u) = \alpha_n u^n + \ldots + \alpha_1 u.$$

Если точка $(\alpha_n, \ldots, \alpha_1)$ принадлежит области (Ω_y) n-мерного пространства, заданной неравенствами

$$\beta_n - 0,5\,U^{-n}P^{-\rho'} \leqslant \alpha_n \leqslant \beta_n + 0,5\,U^{-n}P^{-\rho'},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\beta_1 - 0,5\,U^{-1}P^{-\rho'} \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta_1 + 0,5\,U^{-1}P^{-\rho'},$$

то имеем

$$\left|\sum_u e^{2\pi i \Phi_y(u)}\right|^r \ll \left|\sum_u e^{2\pi i \Phi(u)}\right|^r + U^r P^{-r\rho'}.$$

Умножая это неравенство почленно на

$$U^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho'} d\alpha_n \cdots d\alpha_1$$

и интегрируя по области (Ω_y), получим

$$\left|\sum_u e^{2\pi i \Phi_y(u)}\right|^r \ll U^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho'} \int \underset{(\Omega_y)}{\ldots} \int \left|\sum e^{2\pi i \Phi(u)}\right|^r d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + U^r P^{-r\rho'}.$$

Теперь оценим число G областей (Ω_y), отвечающих различным y, содержащих точки, координаты которых отличаются лишь целыми слагаемыми от координат некоторой заданной точки. Пусть (Ω_y) и (Ω_{y_0}) — две такие области. Имеем

$$\beta_{n-1}(y) - \beta_{n-1}(y_0) = C_0 + O(U^{-n+1}P^{-\rho'}).$$

При этом, если y и $y+1$ лежат в интервале $0 < y \leqslant Y$, то имеем

$$\beta_{n-1}(y) - \beta_{n-1}(y_0) = \frac{lf^{(n)}(d(y_0+z_1))d^n}{(n-1)!}, \quad y < y_0 < y+1.$$

Поэтому

$$\frac{c'}{B} \leqslant |\beta_{n-1}(y+1) - \beta_{n-1}(y)| \leqslant \frac{c''}{B}, \quad B = \frac{A}{ld^n},$$

откуда также следует, что разность между наибольшим и наименьшим значениями $\beta_{n-1}(y)$ в интервале $0 < y \leqslant Y$ будет

$$\ll \frac{Y}{B} \ll \frac{lYd^n}{A} \ll \frac{P^{0,5+0,25n}}{P^{0,5(n+1)}} \ll 1.$$

Кроме того, находим

$$U^{-n+1}P^{-\rho''}B \ll Z^{-n+1}P^{0,5(n-1)-0,5-f-\rho''}P^{0,5(n+1)+f}d^{-n} \ll ZP^{-0,5}.$$

Поэтому имеем $G \ll ZP^{-0,5}$ и, следовательно,

$$\sum_y \Big| \sum_u e^{2\pi i \Phi_y(u)} \Big|^r \ll$$

$$\ll U^{\frac{n(n+1)}{2}} P^{n\rho''} Z P^{-0,5-\rho''} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big| \sum_u e^{2\pi i \Phi(u)} \Big|^r d\alpha_n \cdots d\alpha_1 + YU^r P^{r\rho''},$$

откуда (лемма 3) выводим

$$\sum_y \Big| \sum_u e^{2\pi i \Phi_y(u)} \Big|^r \ll U^r U^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{n\rho''-0,5} + YU^r P^{-r\rho''},$$

$$|S'|^r \ll Y^r U^r \Big(U^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{n\rho''-0,5} + P^{-r\rho''} \Big),$$

$$|S'| \ll YU \big(U^{\frac{n(n+1)}{2}\sigma} P^{n\rho''-0,5} + P^{-r\rho''}\big)^{\frac{1}{r}}.$$

Полагая

$$k = \left[\frac{\log 12{,}72n(n+1)}{-\log(1-\nu)} + 1 \right],$$

будем иметь

$$|S'| \ll YU\big(P^{-\frac{0,45}{r}} + P^{-\rho''}\big) \ll YUP^{-\rho''}, \quad S \ll MP^{-\rho''}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $0{,}5P < P_1 < P_2 \leqslant P$ *и в интервале* $P_1 < x \leqslant P_2$ *вещественная функция* $f(x)$ *имеет непрерывные производные* $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$, *причем* $f^{(n)}(x)$ *и*

$$\varphi(x) = xf^{(n)}(x) - (n-1)f^{(n-1)}(x)$$

сохраняют неизменные знаки, и при некотором f, *удовлетворяющем условию* $0 < f \leqslant 1$, *и при*

$$A = P^{\frac{n+1}{2}+f}$$

имеем

$$\frac{c_3}{A} \leqslant |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{c_4}{A}, \quad \frac{c_5 P}{A} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{c_6 P}{A}, \quad |f^{(n+1)}(x)| \leqslant \frac{c_7}{AP}.$$

Пусть, наконец,

$$S = \sum_{P_1 < p \leqslant P_2} e^{2\pi i l f(p)}, \quad \rho = \frac{0{,}045\nu^2}{\log n + 2},$$

где l — *целое число с условием* $0 < l \leqslant P^{2\rho}$. *Тогда будем иметь*

$$|S| \ll P^{1-\rho}.$$

Доказательство. Пусть ρ' и ρ'' сохраняют значения, указанные в леммах 6 и 7. Пусть F — произведение всех простых чисел, не превосходящих $P^{0,25}$, пусть Q пробегает положительные числа, взаимно простые с F, d пробегает делители числа F, наконец, m пробегает положительные целые числа.

Находим

$$\sum_{P_1<Q\leq P_2} e^{2\pi i l f(Q)} = \sum_{P_1<dm\leq P_2}\sum \mu(d) e^{2\pi i l f(dm)}. \tag{8}$$

Пусть Q_j пробегает значения Q, имеющие ровно j простых сомножителей. Тогда левая часть равенства (8) представится в форме

$$S+S_2+S_3+O(P^{0,25}),\quad S_2=\sum_{P_1<Q_2\leq P_2} e^{2\pi i l f(Q_2)},\quad S_3=\sum_{P_1<Q_3\leq P_2} e^{2\pi i l f(Q_3)}.$$

Сначала оценим S_2. Рассуждая подобно тому, как при доказательстве теоремы 1, получим

$$S_2=\frac{1}{2}S_2'+O(\sqrt{P}),$$

$$S_2'=\sum_{\substack{P_1<Q_1Q_1'\leq P_2\\ Q_1\leq\sqrt{P}}}\sum e^{2\pi i l f(Q_1Q_1')}+\sum_{\substack{P_1<Q_1Q_1'\leq P_2\\ Q_1\leq\sqrt{P},\ Q_1'>\sqrt{P}}}\sum e^{2\pi i l f(Q_1Q_1')}.$$

К обоим слагаемым S_2' можно применить лемму 6 ($P^{0,25}<Q_1\leqslant P^{0,5}$). Получим

$$S_2\ll P^{1-\rho'}.$$

Далее, оценим S_3. Очевидно,

$$S_3=\frac{1}{3}S_3'+O(P^{0,75}),\quad S_3''=\sum_{P_1<Q_1Q_2\leq P_2}\sum e^{\pi i l f(Q_1Q_2)}.$$

Применяя к сумме S_3' лемму 6 ($P^{0,25}<Q_1<P^{0,5}$), получим

$$S_3\ll P^{1-\rho'}.$$

Правую часть равенства (8) можно представить в форме U_0-U_1, где

$$U_0=\sum_{P_1<dm\leq P_2}{}'\sum e^{2\pi i l f(dm)},\quad U_1=\sum_{P_1<dm\leq P_2}{}''\sum e^{2\pi i l f(dm)},$$

причем $\sum'$ распространяется на значения d с условием $\mu(d)=1$, а $\sum''$ распространяется на значения d с условием $\mu(d)=-1$. Мы ограничимся далее оценкой лишь суммы U_0, так как сумма U_1 оценивается аналогичным способом.

Весь интервал $0<m\leqslant P$ можно разбить на $\ll\log P$ интервалов вида

$$M<m\leqslant M',\quad 2M<M'<4M.$$

Часть $U_0(M)$ суммы U_0, отвечающая такому интервалу, представится в форме

$$U_0(M)=\sum_{\substack{P_1<dm\leq P_2\\ M<m\leq M'}}\sum e^{2\pi i l f(dm)}.$$

Сначала рассмотрим случай $M = P^{0,25-c}$. Подобно тому как и при доказательстве теоремы 1, мы все делители d числа F с условием $\mu(d) = 1$ распределяем среди

$$< D = (\log P)^{\frac{\log \log P}{\log (1+c)}}$$

совокупностей, причем для каждой совокупности существует свое φ с условием, что принадлежащие этой совокупности значения d удовлетворяют неравенствами

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1+c}.$$

Для некоторых совокупностей может оказаться $\varphi \leqslant P^{0,25-\varepsilon} M^{-1}$. Для каждой из оставшихся совокупностей существует свое целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел u и v такие, что все значения u лежат в интервале

$$P^{0,25-c} M^{-1} < u \leqslant P^{0,5} M^{-1},$$

причем все значения d рассматриваемой совокупности, взятые каждое B раз, получим, если из всех произведений uv выберем лишь те, которые удовлетворяют условию $(u, v) = 1$. Пусть U' — часть суммы $U_0(M)$, отвечающая выбранной совокупности.

Пусть сначала

$$\varphi \leqslant P^{0,25-c} M^{-1}.$$

Тогда, очевидно, имеем

$$U' \ll P^{(0,25-c)(1+c)} \ll P^{1-\rho'}.$$

Пусть, далее,

$$\varphi > P^{0,25-c} M^{-1}.$$

Тогда U' можно представить в форме

$$U' = \sum_m \sum_u \sum_v e^{2\pi i l f(muv)},$$

где суммирование распространяется на значения m, u, v с условиями

$$M < m \leqslant M', \quad P^{0,25-c} M^{-1} < u < P^{0,5} M^{-1}, \quad P_1 < muv \leqslant P_2, \quad (u, v) = 1.$$

Заставляя t пробегать делители числа F, имеем

$$U' = \sum_t \mu(t) U'_t, \qquad U'_t = \sum_m \sum_{u_1} \sum_{v_1} e^{2\pi i l f(t^2 m u_1 v_1)},$$

где u_1 и v_1 пробегают частные от деления на t чисел u и v, кратных t, и суммирование распространяется на область

$$M < m \leqslant M', \quad P^{0,25-c} M^{-1} t^{-1} < u_1 \leqslant P^{0,5} M^{-1} t^{-1}, \quad P_1 < t^2 m u_1 v_1 \leqslant P_2.$$

Но число $\psi(y)$ решений неопределенного уравнения $mu_1 = y$ не превосходит $\tau(y)$; поэтому $\psi(y)$ удовлетворяет условиям леммы 6. Имеем

$$U'_t = \sum_y \psi(y) \sum_{v_1} e^{2\pi i f(t^2 y v_1)},$$

где суммирование распространяется на область

$$P^{0,25-c} t^{-1} \ll y \ll P^{0,5} t^{-1}, \quad P_1 < t^2 y v_1 \leqslant P_2.$$

Поэтому, применяя лемму 6, легко найдем

$$U'_t \ll P^{1-\rho'} t^{-1,1}, \qquad U' \ll P^{1-\rho'}.$$

Следовательно, в случае $M \leqslant P^{0,25-c}$ имеем

$$U_0(M) \ll DP^{1-\rho'}.$$

Пусть, теперь, $P^{0,25-c} < M \leqslant P^{0,5}$. Тогда (полагая $M = y$, $d = x$), применяя лемму 6, получим

$$U_0(M) \ll P^{1-\rho'}.$$

Пусть $P^{0,5} < M \leqslant P^{0,75}$. Тогда для d достаточно брать лишь значения с условием

$$P^{0,25} \ll d \ll P^{0,5}.$$

Поэтому (полагая $d = y$, $M = x$), применяя лемму 6, получим

$$U_0(M) \ll P^{1-\rho'}.$$

Пусть, наконец, $M > P^{0,75}$; тогда

$$U_0(M) = \sum_{d \leqslant PM^{-1}} S(d), \quad S(d) = \sum_{M'' < m \leqslant M'''} e^{2\pi i l f(dm)},$$

$$M'' = \max\left(M, \frac{P_1}{d}\right), \quad M''' = \min\left(M', \frac{P_2}{d}\right).$$

Применяя лемму 7, получим

$$S(d) \ll MP^{-\rho''}, \quad U_0(M) \ll P^{1-\rho''}.$$

Собирая все доказанное, получим

$$U_0 \ll DP^{1-\rho'} \log P \ll P^{1-\rho}.$$

ЛЕММА 8. *Пусть* $0 < \delta \leqslant 0,25$ *и* A *и* B — *вещественные числа с условием* $0 \leqslant B - A \leqslant 1 - 2\delta$. *Тогда существует периодическая функция* $\psi(z)$ *с периодом* 1 *и с условиями*

$$\begin{aligned} \psi(z) &= 1, \text{ если } A \leqslant z \leqslant B \pmod 1, \\ 0 \leqslant \psi(z) &\leqslant 1, \text{ если } A - \delta < z < A \pmod 1 \\ &\quad \text{или } B < z < B + \delta \pmod 1, \\ \psi(z) &= 0, \text{ если } B + \delta \leqslant z \leqslant A - \delta + 1 \pmod 1, \end{aligned}$$

$$\psi(z) = (B - A + \delta) + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l \cos 2\pi l z + b_l \sin 2\pi l z), \tag{9}$$

где

$$a_l \ll \frac{1}{l}, \quad b_l \ll \frac{1}{l}, \quad \text{если } l \leqslant \frac{1}{\delta},$$

$$a_l \ll \frac{1}{\delta l^2}, \quad b_l \ll \frac{1}{\delta l^2}, \quad \text{если } l > \frac{1}{\delta}.$$

Доказательство. См. доказательство теоремы гл. VIII моей книги ([3]).

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $f(p) = \alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p$, *причем* $\alpha_n, \ldots, \alpha_1$ — *вещественные, и при некотором* s_1, *равном одному из чисел* $s = n, \ldots, 2$, *имеем*

$$\alpha_s = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant \tau, \quad \tau = P^{0,5s}.$$

Пусть, далее,

$$\rho' = \frac{0{,}04\nu^2}{\log n + 2}, \text{ если } q > P^{0{,}25},$$

$$\rho' = \frac{0{,}36\nu^2\varkappa}{\log \frac{n^2}{\varkappa} + 4}, \text{ если } q \leqslant P^{0{,}25}, \quad q = P^{\varkappa}.$$

Тогда при любом γ, *удовлетворяющем условию* $0 < \gamma \leqslant 1$, *число* T *дробей ряда* $\{f(p)\}$, $p \leqslant P$, *с условием* $0 \leqslant \{f(P)\} < \gamma$, *выражается формулой*

$$T = \gamma\pi(P) + O(P^{1-\rho'}).$$

Доказательство. Пусть ρ имеет то же значение, что и в теореме 1, и пусть $\delta = P^{-\rho}$. Достаточно рассмотреть случай $\delta \leqslant 0{,}25$. Из (9) следует

$$\sum_{p<P} \psi(f(p)) = \pi(P)(B - A + \delta) + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l S_l' + b_l S_l''),$$

где S_l' и S_l'' определяются равенством

$$\sum_{p\leqslant P} e^{2\pi i l f(P)} = S_l' + iS_l''.$$

Поэтому (теорема 1)

$$\sum_{l=1}^{\infty} (a_l S_l' + b_l S_l'') \ll$$

$$\ll \sum_{0<l\leqslant\delta^{-1}} \frac{P^{1-\rho}}{l} + \sum_{\delta^{-1}<l\leqslant\delta^{-2}} \frac{P^{1-\rho}}{\delta l^2} + \sum_{l>\delta^{-2}} \frac{P}{\delta l^2} \ll P^{1-\rho}\log P \ll P^{1-\rho'},$$

$$\sum_{p\leqslant P} \psi(f(p)) = \pi(P)(B - A) + O(P^{1-\rho'}). \tag{10}$$

Обозначим символом $T(A; B)$ число значений $f(p)$ с условием $A \leqslant f(p) < B \pmod 1$. Тогда равенство (10) можно привести к виду

$$\theta_1 T(A - \delta;\ A) + T(A; B) + \theta_2 T(B; B + \delta) = \pi(P)(B - A) + O(P^{1-\rho'}),$$

откуда, ввиду очевидных неравенств

$$T(A - \delta; A) \ll P^{1-\rho'}, \qquad T(B; B + \delta) \ll P^{1-\rho'},$$

получаемых из (10) заменой A и B сначала на $A - \delta$ и A, затем на B и $B + \delta$, найдем

$$T(A; B) = \pi(P)(B - A) + O(P^{1-\rho'}).$$

Отсюда выводим

$$T = T(0; 0{,}5\gamma) + T(0{,}5\gamma; \gamma) = \gamma\pi(P) + O(P^{1-\rho'}).$$

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $0{,}5 < P_1 < P_2 \leqslant P$ *и в интервале* $P_1 < x \leqslant P_2$ *вещественная функция* $f(x)$ *имеет непрерывные производные* $f^{(n-1)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n+1)}(x)$, *причем* $f^{(n)}(x)$ *и*

$$\varphi(x) = xf^{(n)}(x) - (n-1)f^{(n-1)}(x)$$

сохраняют неизменные знаки и при некотором f, удовлетворяющем условию $0 \leqslant f \leqslant 1$, и при

$$A = P^{\frac{n+1}{2}+f}$$

имеем

$$\frac{c_3}{A} \leqslant |f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{c_4}{A}, \quad \frac{c_5 P}{A} \leqslant |\varphi(x)| \leqslant \frac{c_6 P}{A}, \quad |f^{(n+1)}(x)| \leqslant \frac{c_7}{AP}.$$

Пусть, наконец,

$$\rho' = \frac{0{,}044\nu^2}{\log n + 2}.$$

Тогда при любом γ, удовлетворяющем условию $0 < \gamma \leqslant 1$, число T дробей ряда $\{f(p)\}$, $P_1 < p \leqslant P_2$, с условием $0 \leqslant \{f(p)\} < \gamma$, выражается формулой

$$T = \gamma(\pi(P_2) - \pi(P_1)) + O(P^{1-\rho'}).$$

Доказательство. Пусть ρ имеет то же значение, что и в теореме 2, и пусть $\delta = P^{-\rho}$. Достаточно рассмотреть случай $\delta \leqslant 0{,}25$. Из (9) следует

$$\sum_{P_1 < p \leqslant P_2} \psi(f(p)) = (\pi(P_2) - \pi(P_1))(B - A + \delta) + \sum_{l=1}^{\infty} (a_l S_l' + b_l S_l''),$$

где S_l' и S_l'' определяются равенством

$$\sum_{P_1 < p \leqslant P_2} e^{2\pi i l f(p)} = S_l' + i S_l''.$$

Поэтому (теорема 2)

$$\sum_{l=1}^{\infty} (a_l S_l' + b_l S_l'') \ll \sum_{0 < l \leqslant \delta^{-1}} \frac{P^{1-\rho}}{l} + \sum_{\delta^{-1} < l \leqslant \delta^{-2}} \frac{P^{1-\rho}}{\delta l^2} +$$
$$+ \sum_{l > \delta^{-2}} \frac{P}{\delta l^2} \ll P^{1-\rho} \log P \ll P^{1-\rho'}.$$

Отсюда, рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 3, получим

$$T = \gamma(\pi(P_2) - \pi(P_1)) + O(P^{1-\rho'}).$$

Поступило
15.I.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Некоторый общий закон распределеления дробных частей значений многочлена, когда аргумент пробегает простые числа, Доклады Ак. Наук СССР, т. 51, № 7 (1946), 489—490.

[2] Виноградов И. М., Некоторый общий закон теории простых чисел. Доклады Ак. Наук СССР, т. 55, № 6 (1947), 475—476.

[3] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, XXIII, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 249–258.

А. Я. ХИНЧИН

РЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЧЕБЫШЕВА

Основной результат известной работы Чебышева «Об одном арифметическом вопросе» (1) распространяется на систему любого числа уравнений с любым числом неизвестных.

1. История вопроса и постановка задачи

В своей знаменитой работе «Об одном арифметическом вопросе»(1) Чебышев поставил и в основном решил задачу, которая может рассматриваться как первая простейшая задача теории неоднородных линейных диофантовых приближений. Речь идет о приближенном решении в целых числах x, y уравнения

$$\theta x - y - \alpha = 0, \tag{1}$$

где θ и α — данные вещественные числа. В однородном случае (т. е. при $\alpha = 0$) уже давно было известно, что существуют, каково бы ни было θ, сколь угодно большие по абсолютному значению целые числа x, y, удовлетворяющие неравенству

$$|\theta x - y| < \frac{1}{|x|}.$$

Важнейший результат Чебышева состоял в том, что этот основной закон приближенного решения однородного уравнения $\theta x - y = 0$ при любом *иррациональном* θ и любом вещественном α имеет место и для неоднородного уравнения (1): существуют сколь угодно большие по абсолютному значению целые числа x, y, удовлетворяющие неравенству

$$|\theta x - y - \alpha| < \frac{c}{|x|},$$

где $c > 0$ — абсолютная постоянная. Требование иррациональности числа θ при этом не только достаточно, но и необходимо: при любом рациональном θ число α может быть выбрано так, что только что высказанное утверждение становится неверным.

С другой стороны, давно известно, что тот закон приближенного решения однородных уравнений, о котором говорилось выше, может быть распространен (с соответствующими изменениями в формулировке) и на уравнения с любым числом неизвестных. Именно, каковы

бы ни были вещественные числа $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$, существует система целых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$, удовлетворяющих неравенству

$$|\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_m x_m - y| < \frac{1}{x^m},$$

где $x = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\}$ может быть выбрано сколь угодно большим. Более того, закон этот сохраняет силу и для систем однородных уравнений. Каковы бы ни были mn вещественных чисел θ_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, существуют целые числа x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, y_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j\right| < \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

где $x = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\}$ может быть выбрано сколь угодно большим.

Это делает естественным предположение, что и в случае уравнений с бо́льшим чи́слом неизвестных, и в случае систем уравнений неоднородная задача допускает, вообще говоря, решение, аналогичное найденному Чебышевым для случая $m = 1$.

В случае одного уравнения

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i - y - \alpha = 0$$

это означало бы, что при любом вещественном α существуют целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_m, y$, удовлетворяющие неравенству

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i - y - \alpha\right| < \frac{c}{x^m}, \tag{2}$$

где $c > 0$ постоянно, а $x = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_m|\}$ может быть выбрано сколь угодно большим.

В случае системы

$$\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j - \alpha_j = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

мы можем ожидать, что при любых вещественных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ существуют целые числа x_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, y_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, удовлетворяющие неравенствам

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j - \alpha_j\right| < \frac{c}{x^{\frac{m}{n}}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

где $c > 0$ постоянно, а x имеет прежнее значение и снова может быть предположено сколь угодно большим.

Однако, высказывая такую гипотезу, мы не должны забывать, что в случае, изученном Чебышевым, доказанная им закономерность имела

место не всегда, а лишь при иррациональных θ. Тем более можно ожидать, что в обобщенных задачах будут исключительные случаи. Поэтому мы естественно должны ставить вопрос так: каковы свойства коэффициентов θ_i (соответственно θ_{ij}), необходимые и достаточные для того, чтобы гипотетически высказанные нами закономерности имели место при любом α (соответственно любых α_j)?

В случае $m=n=1$ рациональность числа θ означает, что уравнение $\theta x - y = 0$ допускает точное решение в целых числах, причем $x > 0$. По аналогии можно было бы ожидать, что в случае одного уравнения вида

$$\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \ldots + \theta_m x_m - y = 0$$

исключительным окажется лишь тот случай, когда это уравнение может быть точно решено в целых x_i, y, причем $x = \max\{|x_1|, \ldots, |x_m|\} > 0$, т. е., когда числа $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ между собою линейно зависимы; легко убедиться, что в этом случае при подходяще выбранном α закономерность, выражаемая неравенством (2), действительно не может иметь места. Оказалось, однако, что одной только линейной независимости чисел θ_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ недостаточно для наличия такой закономерности при любом α; напротив, если $m > 1$, то всегда существуют такие m линейно независимых чисел θ_i и такое вещественное число α, для которых неравенство (2), как бы велика ни была постоянная c, не имеет более конечного числа целочисленных решений.

Таким образом, при $m > 1$ множество систем чисел $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m)$, не подчиняющихся открытой Чебышевым для случая $m=1$ закономерности, охватывает, кроме всех линейно зависимых систем, еще и целый класс систем, линейно независимых.

Условимся для краткости называть систему вещественных чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ *системой Чебышева*, если при любом вещественном α и достаточно большом c неравенство (2) допускает целочисленные решения со сколь угодно большим x. Линейная независимость системы θ_i является, как мы видели, необходимым, но при $m > 1$ не достаточным условием того, чтобы эта система была системой Чебышева. Для установления необходимого и достаточного критерия нам нужно ввести одно новое понятие.

Известно, что, каковы бы ни были числа $\theta_1, \ldots, \theta_m$ и каково бы ни было $t \geqslant 1$, найдутся целые числа $x_1, \ldots, x_m, y$, удовлетворяющие неравенствам

$$|\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_m x_m - y| < \frac{1}{t}, \quad 0 < x \leqslant t^{\frac{1}{m}}.$$

Если этот «нормальный» закон приближения формы

$$L = \sum_{i=1}^{m} \theta_i x_i - y$$

к нулю может быть усилен, т. е. если при любом $\varepsilon > 0$ и любом достаточно большом t могут быть разрешены в целых x_i, y неравенства

$$|L| < \frac{1}{t}, \quad 0 < x < \varepsilon t^{\frac{1}{m}},$$

то мы назовем систему чисел θ_i (и форму L) **сингулярной**. Сингулярные формы, таким образом, аппроксимируются к нулю лучше, чем по «нормальному» закону. Если числа θ_i линейно зависимы, то форма L может в точности равняться нулю (при $x > 0$), и тривиальным образом сингулярна. Сингулярность системы чисел можно поэтому рассматривать как некое расширение понятия линейной зависимости. Известно, что при $m = 1$ эти два понятия совпадают (сингулярны только рациональные числа); при всяком $m > 1$, напротив, существуют сингулярные системы линейно независимых θ_i, так что обобщение является существенным. Интересно, что при любом m точки пространства m измерений, координаты которых являются сингулярными системами чисел, образуют множество лебеговой меры нуль, чем, в частности, и оправдывается наименование таких систем сингулярными.

Всякую не сингулярную систему чисел θ_i (и форму L) мы будем называть **регулярной**. Около десяти лет назад мне удалось доказать следующую теорему, которая полностью решает задачу Чебышева для одного уравнения: *для того чтобы система чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ (или форма L) была системой (формой) Чебышева, необходимо и достаточно, чтобы она была регулярной* (²). Нужно, таким образом, чтобы форма L не только не могла точно обратиться в нуль, но не могла бы и приближаться к нулю по закону более сильному, чем «нормальный».

После того как случай одного уравнения получил, таким образом, полное решение, естественно встал вопрос о распространении полученного результата на произвольную систему линейных уравнений. Формулировку искомого критерия легко было предугадать, однако доказательства долго не удавалось провести, так как существовавшие в то время методы были для этого слишком сложны. Лишь в последние годы, после изобретения Морделлом замечательного метода «добавочной переменной», позволяющего свести в принципе любую неоднородную задачу к однородной, это доказательство оказалось доступным.

Настоящая работа и ставит себе целью полное проведение этого доказательства, которое, кроме метода Морделла, пользуется только соответственным образом обобщенными приемами, найденными мною еще в 1937 г. при решении задачи для одного уравнения. В настоящее время задача Чебышева может, таким образом, считаться решенной в самом общем случае.

Пусть дана система mn вещественных чисел θ_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$. Положим

$$L_j = L_j(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} x_i - y_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad x = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |x_i|.$$

Будем называть систему чисел θ_{ij} (или систему форм L_j, или систему уравнений $L_j = 0$) системой Чебышева, если, каковы бы ни были вещественные числа α_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, существует такая положительная постоянная Γ, что система неравенств

$$|L_j - \alpha_j| < \frac{\Gamma}{x^{\frac{m}{n}}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

имеет целочисленные решения x_i, y_j с как угодно большим x.

Известно, что, каковы бы ни были числа θ_{ij} и каково бы ни было $t \geqslant 1$, неравенства

$$|L_j| \leqslant \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad 0 < x \leqslant t^{\frac{n}{m}}$$

всегда имеют целочисленные решения x_i, y_j («нормальный» закон).

Если при любом $\varepsilon > 0$ и любом достаточно большом t могут быть решены в целых числах неравенства

$$|L_j| < \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad 0 < x < \varepsilon t^{\frac{n}{m}},$$

то мы назовем систему чисел θ_{ij} (или систему форм L_j, или систему уравнений $L_j = 0$) сингулярной. Мы видим, таким образом, что понятие сингулярности естественно и однозначно распространяется с одного уравнения на любую систему линейных уравнений. Интересно заметить, что, напротив, понятие линейной зависимости чисел $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ трудно было бы однозначным образом распространить на систему θ_{ij}.

Всякую не сингулярную систему мы будем называть регулярной. Основной результат настоящей работы состоит в том, что

регулярность системы чисел θ_{ij} (или системы форм L_j, или системы уравнений $L_j = 0$) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы эта система была системой Чебышева.

2. Доказательство основной теоремы

1. Доказательство достаточности условия очень легко проводится методом Морделла. Допустим, что система форм L_j регулярна, т. е. существует такая постоянная $\gamma > 0$, что система неравенств

$$|L_j| < \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad 0 < x < \gamma t^{\frac{n}{m}} \tag{3}$$

для отдельных, сколь угодно больших значений t неразрешима в целых x_i, y_j. Положим $[1/\gamma^m]=g$ и рассмотрим систему неравенств

$$\left.\begin{array}{c} \left|L_j-\frac{\alpha_j}{g!}u\right|<\frac{1}{t} \quad (1\leqslant j\leqslant n), \quad |x_i|<\gamma t^{\frac{n}{m}} \quad (1\leqslant i\leqslant m), \\ |u|\leqslant\gamma^{-m}, \quad \sum_{i=1}^{m} x_i^2+u^2>0, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — произвольные вещественные числа, u — новая целочисленная переменная и t имеет одно из значений, для которых неравенства (3) неразрешимы в целых числах.

Система $m+n+1$ однородных форм

$$L_j-\frac{\alpha_j}{g!}u \quad (1\leqslant j\leqslant n), \quad x_i \quad (1\leqslant i\leqslant m), \quad u$$

в $m+n+1$ переменных $x_i\,(1\leqslant i\leqslant m)$, $y_j\,(1\leqslant j\leqslant n)$, u имеет определитель 1, вследствие чего неравенства (4) при любом $t>0$ разрешимы, по известной теореме Минковского о линейных формах, в целых x_i, y_j, u. При этом $u\neq 0$, так как при $u=0$ система (4) равносильна системе (3), которая, по нашему допущению, не имеет целочисленных решений. Очевидно, можно допустить, что $u>0$, так как в противном случае мы просто изменили бы знаки всех переменных на обратные.

Так как

$$0<u\leqslant[\gamma^{-m}]=g,$$

то $g!/u=h$ есть целое положительное число. При этом мы имеем

$$|hL_j(x_i, y_j)-\alpha_j|<\frac{h}{t} \quad (1\leqslant j\leqslant n),$$

$$|hx_i|<h\gamma t^{\frac{n}{m}} \quad (1\leqslant i\leqslant m).$$

Полагая $hx_i=x_i'$ $(1\leqslant i\leqslant m)$, $hy_j=y_j'$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, мы поэтому находим

$$|L_j(x_i', y_j')-\alpha_j|<\frac{g!}{t} \quad (1\leqslant j\leqslant n), \quad |x_i'|<\gamma g!\, t^{\frac{n}{m}} \quad (1\leqslant i\leqslant m).$$

Так как t при этом может принимать сколь угодно большие значения, то отсюда легко следует, что система форм L_j есть система Чебышева.

2. Доказательство необходимости значительно более сложно; мы должны предпослать ему две леммы.

ЛЕММА 1. *Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ — неубывающая последовательность положительных чисел, $\rho_n\to\infty$ $(n\to\infty)$; пусть $a>1$ — любое натуральное число. Тогда существует такая последовательность натуральных чисел $n_1<n_2<\ldots<n_k<\ldots$, что*

$$\left.\begin{array}{l} 1^\circ.\ \rho_{n_{k+1}}>a\rho_{n_k}. \\ 2^\circ.\ \textit{Если}\ \rho_{n_k}<\rho_s\leqslant\rho_{n_{k+1}},\ \textit{то}\ \rho_{n_{k+1}}<a^2\rho_s \end{array}\right\} (k=1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Условимся называть число ρ_n «нормальным», если $\rho_{n+1}>a\rho_n$, и будем различать два случая.

A. Число нормальных ρ_n конечно. Возьмем n_1 столь большим, чтобы среди чисел ρ_{n_1+i} $(i \geqslant 0)$ уже не было нормальных. В качестве $\rho_{n_{k+1}}$ $(k \geqslant 1)$ выберем первое число данной последовательности, превосходящее $a\rho_{n_k}$. Требование 1°, очевидно, выполнено. Далее, с одной стороны, по определению $\rho_{n_{k+1}}$, мы имеем $\rho_{n_{k+1}-1} \leqslant a\rho_{n_k}$, а с другой стороны, $\rho_{n_{k+1}} \leqslant a\rho_{n_{k+1}-1}$, так как иначе $\rho_{n_{k+1}-1}$ было бы нормальным; поэтому $\rho_{n_{k+1}} \leqslant a^2\rho_{n_k}$, и, следовательно, $\rho_{n_{k+1}} < a^2\rho_s$ при $\rho_{n_k} < \rho_s$. Таким образом, требование 2° также выполнено.

B. Число нормальных ρ_n бесконечно. В этом случае мы прежде всего включаем в число чисел ρ_{n_k} все нормальные ρ_n. Пусть ρ_i и ρ_l $(\rho_i < \rho_l)$ — два соседних нормальных члена последовательности ρ_n. Пусть, далее, ρ_{l_1} — последний член ряда ρ_n, меньший чем $\frac{1}{a}\rho_l$; в силу нормальности ρ_i, мы имеем $\rho_i < \frac{1}{a}\rho_{i+1} \leqslant \frac{1}{a}\rho_l$, вследствие чего $\rho_{l_1} \geqslant \rho_i$; мы включаем в число чисел ρ_{n_k} член ρ_{l_1}, но не включаем ни одного из членов, лежащих между ρ_{l_1} и ρ_l. Если еще $\rho_{l_1} > \rho_i$, то пусть ρ_{l_2} — последний член ряда ρ_n, меньший чем $\frac{1}{a}\rho_{l_1}$; снова мы убеждаемся, что $\rho_{l_2} \geqslant \rho_i$, включаем в число чисел ρ_{n_k} член ρ_{l_2}, но не включаем ни одного из членов, лежащих между ρ_{l_2} и ρ_{l_1}; этот процесс мы продолжаем до тех пор, покуда не получим $\rho_{l_s} = \rho_i$, что, очевидно, должно наступить после конечного числа шагов. Проделав только что описанную операцию для всех пар соседних нормальных членов ряда ρ_n, мы тем самым, очевидно, однозначно определим весь ряд ρ_{n_k}; покажем теперь, что этот ряд обладает обоими требуемыми свойствами. Прежде всего, в силу нашей конструкции, всегда $\rho_{n_k} < \frac{1}{a}\rho_{n_{k+1}}$, так что требование 1° выполнено. Далее, так как в силу нашей конструкции ρ_{n_k} всегда есть последнее число ряда ρ_n, меньшее чем $\frac{1}{a}\rho_{n_{k+1}}$, то при $\rho_{n_k} < \rho_s \leqslant \rho_{n_{k+1}}$ мы имеем $\rho_{n_{k+1}} \leqslant a\rho_s < a^2\rho_s$, так что выполнено и требование 2°. Этим лемма 1 доказана.

Вернемся теперь к нашим формам L_j и будем рассматривать наряду с ними «транспонированную» систему форм

$$M_i = M_i(u_j, v_l) = \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij}u_j - v_i \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

ЛЕММА 2. *Если система форм L_j есть система Чебышева, то транспонированная система форм M_i регулярна.*

Доказательство. Допустим, что система M_i сингулярна, и покажем, что в этом случае система L_j не может быть системой Чебышева.

Обозначим через $\rho = \rho(\lambda)$ наименьшее положительное значение величины $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_j}$, при котором

$$|M_i(u_j, v_i)| < \frac{1}{\lambda} \quad (1 \leqslant i \leqslant m);$$

$\rho(\lambda)$ есть неубывающая функция от λ, и, в силу предположенной сингулярности системы M_i,

$$\rho(\lambda) = o(\lambda^{\frac{m}{n}}) \quad (\lambda \to \infty). \tag{5}$$

Пусть

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots \tag{6}$$

—значения этой функции, расположенные в порядке возрастания. В силу леммы 1, мы можем * выбрать из последовательности (6) подпоследовательность

$$\rho_{n_1}, \rho_{n_2}, \ldots, \rho_{n_k} \ldots, \tag{7}$$

обладающую свойствами 1° и 2°; при этом a — натуральное число > 1, которое мы можем еще выбрать по нашему желанию.

Каждое $\rho_{n_k} = \rho(\lambda)$ есть число вида $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} u_j^{(k)2}}$, причем целые числа $u_j^{(k)}$, $v_i^{(k)}$ удовлетворяют неравенствам $|M_i(u_j^{(k)}, v_i^{(k)})| < \frac{1}{\lambda}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ или

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} u_j^{(k)} - v_i^{(k)}\right| < \frac{1}{\lambda} \quad (1 \leqslant i \leqslant m).$$

Рассмотрим теперь, выбрав определенное значение k и соответствующих ему целых чисел $u_j^{(k)}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, семейство параллельных гиперплоскостей

$$u_1^{(k)}\xi_1 + u_2^{(k)}\xi_2 + \cdots + u_n^{(k)}\xi_n + z^{(k)} = 0 \tag{8}$$

в пространстве n измерений с декартовыми координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$; при этом числа $u_j^{(k)}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, как уже сказано, фиксированы, а $z^{(k)}$ есть параметр семейства, также принимающий лишь целые значения. Очевидно, расстояние между двумя соседними гиперплоскостями семейства (8) равно $1/\rho_{n_k}$. Присоединим теперь к семейству (8) еще $n-1$ подобных же (т. е. с тем же расстоянием между соседними гиперплоскостями) семейств так, чтобы все n семейств были попарно ортогональны. Этими семействами пространство n измерений разбивается на кубы ребра $1/\rho_{n_k}$. Каждый из этих кубов мы теперь стягиваем около его центра так, чтобы его линейные размеры уменьшились вдвое; полученные таким образом кубы ребра $1/2\rho_{n_k}$ будем называть к у б а м и р а н г а k. Очевидно, что любая точка куба ранга k

---

* Мы допускаем при этом, что $\rho(\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Если бы $\rho(\lambda)$ оставалось ограниченным при $\lambda \to \infty$, то это означало бы, очевидно, что система уравнений $M_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ допускает нетривиальное точное решение. Но в этом случае, в силу известной аппроксимационной теоремы Кронекера, система уравнений $L_j - \alpha_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ допускает приближенное решение произвольной точности лишь для некоторых исключительных систем чисел α_j; тем более система форм L_j не может быть в этом случае системой Чебышева.

отстоит от любой из гиперплоскостей семейства (8) не менее чем на $1/4\rho_{n_k}$. Но в силу неравенства $\rho_{n_{k+1}} > a\rho_{n_k}$, каждый куб ранга k содержит в себе, если число a достаточно велико, целиком некоторый куб ранга $k+1$, так что мы получаем цепочку

$$C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_k \supset \ldots,$$

где C_k есть куб ранга k. Пусть $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ есть общая точка всех кубов такой цепочки. Очевидно, эта точка для любого k отстоит не менее чем на $1/4\rho_{n_k}$ от любой из гиперплоскостей соответствующего семейства (8), так что для $k \geqslant 1$

$$|u_1^{(k)}\alpha_1 + u_2^{(k)}\alpha_2 + \ldots + u_n^{(k)}\alpha_n + z^{(k)}| \geqslant \frac{1}{4}, \tag{9}$$

каково бы ни было целое число $z^{(k)}$.

Если бы система форм L_j была системой Чебышева, то существовала бы такая постоянная $\Gamma > 0$, для которой система неравенств

$$|L_j - \alpha_j| < \frac{1}{t} \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \quad |x_i| < \Gamma t^{\frac{n}{m}} \quad (1 \leqslant i \leqslant m) \tag{10}$$

имела бы решение в целых x_i, y_j при отдельных, сколь угодно больших значениях t. Положим

$$\lambda = \left(\frac{\Gamma}{\sigma}\right)^{\frac{n}{m+n}} t^{\frac{n}{m}},$$

где постоянная $\sigma > 0$ будет определена ниже. Пусть

$$\rho(\lambda) = \rho_s, \quad \rho_{n_k} < \rho_s \leqslant \rho_{n_{k+1}} = \rho(\lambda_1), \quad \lambda_1 \geqslant \lambda;$$

тогда

$$|M_i(u_j^{(k+1)}, v_i^{(k+1)})| < \frac{1}{\lambda_1} \leqslant \frac{1}{\lambda} \quad (1 \leqslant i \leqslant m), \tag{11}$$

а в силу (5) и свойства 2° чисел ρ_{n_k},

$$\sum_{j=1}^{n} \{u_j^{(k+1)}\}^2 = \rho_{n_{k+1}}^2 < a^4\rho_s^2 < \sigma^2\lambda^{\frac{2m}{n}}, \tag{12}$$

если t (а следовательно, и λ) достаточно велико.

Теперь заметим, что тождественно

$$\sum_{j=1}^{n} u_j^{(k+1)}(L_j - \alpha_j) = \sum_{j=1}^{n} u_j^{(k+1)}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\theta_{ij} - y_j - \alpha_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} u_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} y_j u_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j^{(k+1)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i M_i(u_j^{(k+1)}, v_i^{(k+1)}) + \sum_{i=1}^{m} x_i v_i^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} y_j u_j^{(k+1)} - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j^{(k+1)}.$$

Полагая

$$\sum_{j=1}^{n} y_j u_j^{(k+1)} - \sum_{i=1}^{m} x_i v_i^{(k+1)} = z^{(k+1)},$$

находим, в силу (10), (11) и (12),

$$\left|\sum_{j=1}^{n} u_j^{(k+1)}\alpha_j + z^{(k+1)}\right| \leqslant \left|\sum_{j=1}^{n} u_j^{(k+1)}(L_j - \alpha_j)\right| + \left|\sum_{i=1}^{m} x_i M_i\right| <$$

$$< n\rho_{n_{k+1}} \cdot \frac{1}{t} + m\Gamma t^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{1}{\lambda} < n\sigma\lambda^{\frac{m}{n}}/t + m\Gamma t^{\frac{n}{m}}/\lambda =$$

$$= (n+m)\,\sigma^{\frac{n}{n+m}}\,\Gamma^{\frac{m}{n+m}}.$$

Выбирая σ столь малым, чтобы правая часть этого неравенства была меньше $^1/_4$, мы получаем соотношение, противоречащее неравенству (9). Таким образом, система форм L_j не может быть системой Чебышева, и лемма 2 доказана.

Теперь уже легко завершается доказательство необходимости нашего признака. Пусть система форм L_j есть система Чебышева. Если бы она была сингулярна, то, в силу леммы 2, транспонированная система $\bar{M}_i$ не была бы системой Чебышева; в силу доказанной уже достаточности признака, отсюда вытекало бы, что система M_i должна быть сингулярной; но тогда вторичное применение леммы 2 показало бы, что система L_j не может быть системой Чебышева, что противоречит нашему предположению.

Таким образом, система L_j регулярна, и необходимость признака доказана.

Поступило
8. I. 1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Чебышев П. Л., Об одном арифметическом вопросе. Полн. собр. соч., т. I (1944), 237—275.

[2] Khintchine A., Über die angenäherte Auflösung linearer Gleichungen in ganzen Zahlen, Acta Arithmetica, 2 (1937), 161—172.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 259—278

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе изучаются произвольные методы суммирования рядов Фурье с точки зрения сходимости их для класса непрерывных функций и других классов.

§ 1. Введение

Пусть (C) есть пространство непрерывных периода 2π функций f. Система чисел

$$\lambda_1^{(n)}, \quad \lambda_2^{(n)}, \ \ldots, \quad \lambda_n^{(n)} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots) \tag{1.1}$$

определяет тригонометрический полином n-го порядка

$$U_n(f,\ x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx), \tag{1.2}$$

где a_k и b_k — коэффициенты Фурье функции f.

Многие методы приближения периодических функций сводятся к суммам такого рода. Поэтому естественно поставить вопрос, каковы должны быть коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$, чтобы имело место равенство

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f,\ x)=f(x) \tag{1.3}$$

для произвольного x и любой функции $f\in(C)$.

Ответ получим немедленно, если заметим, что при фиксированном x сумма вида (1.2) есть линейный функционал, заданный в полном пространстве (C), где система функций

$$1, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \ \ldots \tag{1.4}$$

полна.

На основании известного предложения о слабой сходимости линейных функционалов [1], для того чтобы имело место равенство (1.3) при фиксированном x для всех $f\in(C)$, необходимо и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для всех функций системы (1.4) и чтобы норма $\|U_{nx}\|$ функционала (1.2), равная

$$\|U_{nx}\|=\sup_{\substack{f\in(C)\\ |f|\leq 1}}|U_n(f,\ x)|=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{(n)}\cos k(t-x)\right|dt=$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt \right| dt = \| U_n \|, \tag{1.5}$$

была ограничена.

Первое требование приводит к равенствам

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^{(n)} = 1 \qquad (k = 1,\ 2, \ldots), \tag{A}$$

а второе — к существованию положительной константы M, не зависящей от $\lambda_k^{(n)} (k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$, для которой имеет место неравенство

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^{(n)} \cos kt \right| dt \leqslant M. \tag{B}$$

Таким образом, условия (А) и (В) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы имело место равенство (1.3) для любой функции $f \in (C)$ и всех x или для какого-либо фиксированного значения x.

Заметим, что это утверждение сохраняется без изменений, если в равенстве (1.3) требовать, чтобы сходимость была равномерной.

В самом деле, введем обозначение

$$\| \varphi \| = \sup_x | \varphi(x) |$$

и пусть $T_m(x)$ есть тригонометрический полином m-го порядка, для которого

$$\| f - T_m \| < \varepsilon,$$

где $f \in (C)$. Тогда, если справедливо условие (В), будем иметь, принимая во внимание (1.5), неравенство

$$\| f - U_n(f) \| \leqslant \| f - T_m \| + \| T_m - U_n(T_m) \| + \| U_n(T_m - f) \| \leqslant$$
$$\leqslant (1 + M)\varepsilon + \| T_m - U_n(T_m) \|,$$

второй член правой части которого при выполнении еще условия (А) стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом, из условий (А) и (В) вытекает

$$\lim_{n\to\infty} \| f - U_n(f) \| = 0, \qquad f \in (C).$$

Установление того обстоятельства, что для данной системы коэффициентов $\lambda_k^{(n)}$ выполняется условие (А), обычно не представляет затруднений. Этого уже нельзя сказать в отношении условия (В) и потому представляет интерес получение эффективных свойств, которым должны удовлетворять коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$, чтобы выполнялось условие (В).

Настоящая работа посвящена, главным образом, этому вопросу и вопросам, ему аналогичным.

В § 2 мы доказываем, что из выполнения условия (B) следует справедливость следующих неравенств:

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant C, \tag{α}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n+1-k}^{(n)}}{k}\right| \leqslant C, \tag{β}$$

где C — некоторая константа.

Однако тут же дается пример, показывающий, что условия (α) и (β), вообще говоря, не являются достаточными для выполнения условия (B).

В § 2 мы приводим еще некоторые другие свойства, эквивалентные условиям (A) и (B).

В § 3 устанавливается, что если относительно систем чисел $\lambda_k^{(n)}$ ($k=0, 1, \ldots, n+1$; $\lambda_0^{(n)}=1$, $\lambda_{n+1}^{(n)}=0$) предположить, что они при каждом n образуют выпуклые (кверху или книзу) последовательности, то выполнение неравенств (α) и (β) является не только необходимым, но и достаточным условием для того, чтобы выполнялось условие (B).

Это утверждение содержится, как частный случай, в более общем утверждении, базируясь на котором устанавливается следующий общий факт:

Если коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$ при каждом n удовлетворяют условию выпуклости, то из условия (A) и неравенств (α) и (β) вытекает, что равенство

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, x) = f(x)$$

имеет место для любой суммируемой периода 2π функции f, имеющей x своей точкой Лебега.

При этом в наших рассуждениях мы базируемся на одной теореме Д. К. Фаддеева ([5]), дающей условия выполнения равенства

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b K_n(t, x) f(t)\, dt = f(x)$$

для всех суммируемых функций f в их точках Лебега.

В § 4 доказывается лемма, представляющая собой основной результат работы:

ЛЕММА. *Пусть для любого n система чисел $\lambda_k^{(n)}$ ($k=0, 1, \ldots, n+1$; $\lambda_0^{(n)}=1$, $\lambda_{n+1}^{(n)}=0$) выпукла (кверху или книзу), т. е. если*

$$\Delta_k^2 = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)},$$

то для каждого n либо $\Delta_k^2 \geqslant 0$, либо $\Delta_k^2 \leqslant 0$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$).

Пусть еще

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kx.$$

Тогда из неравенств (α) *и* (β) *следует, что на сегменте* $(0, \pi)$ *существует положительная монотонно убывающая функция* $K_n^*(x)$, *удовлетворяющая условиям*

$$|K_n(x)| \leqslant K_n^*(x), \quad \int_0^{\pi} K_n^*(x)\, dx = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

а из неравенств (α) *и* (β) *и условия* (A) *следует, кроме того, что каково бы ни было* $\delta > 0$ $(\delta < \pi)$,

$$\max_{\delta \leqslant x \leqslant \pi} |K_n(x)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

В сущности, в работе мы обобщаем один результат Hill'а и Tamarkin'а ([2]) [см. также ([4]), § 8.8], заключающийся в следующем.

Если

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{P_{n-k}}{P_n}, \quad P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n, \quad p_k > p_{k+1} \to 0, \quad P_n \to \infty,$$

то для того чтобы сумма (1.2) сходилась к $f(x)$ для любой непрерывной функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{1}{P_n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{P_\nu}{\nu} = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

При этом я использую в известной части доказательства примененный этими авторами метод.

Большинство известных методов суммирования рядов Фурье представляет собой суммы вида (1.2), где коэффициенты $\lambda_k^{(n)}$ удовлетворяют условиям выпуклости. Поэтому доказательства сходимости таких методов можно проводить, опираясь на теоремы, доказанные в этой работе.

Если считать эти теоремы известными, то рассуждения, которые надо добавить, чтобы доказать сходимость того или иного частного метода суммирования (с коэффициентами, удовлетворяющими условию выпуклости), носят совершенно элементарный характер.

В § 5 мы рассматриваем с этой точки зрения несколько таких примеров (суммы Чезаро, Бернштейна-Рогозинского и др.).

§ 2. Суммы с произвольными коэффициентами

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы выполнялось условие* (B), *необходимо, чтобы имели место неравенства*

$$|\lambda_k^{(n)}| \leqslant C, \tag{α}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_{n+1-k}^{(n)}}{k} \right| \leqslant C, \tag{β}$$

где C — *константа, не зависящая от* k *и* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для удобства $\lambda_k^{(n)} = \lambda_k$. Тогда неравенство (α) непосредственно следует из (B) и из очевидного неравенства:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos kt \right| dt \geqslant \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cos kt \right) \cos mt\, dt \right| = |\lambda_m|. \tag{2.1}$$

Далее, хорошо известно ([4]), что тригонометрический полином

$$\nu_n(x)=\frac{\cos x}{n}+\frac{\cos 2x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos nx}{1}-\frac{\cos(n+2)x}{1}-\ldots-\frac{\cos(2n+1)x}{n} \qquad (2.2)$$

не превышает некоторую положительную константу N, не зависящую от $n=1, 2, \ldots$ Отсюда, каковы бы ни были числа λ_k, следует неравенство

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\lambda_k\cos kt\right|dt\geqslant\frac{2}{\pi N}\left|\int_0^\pi\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\lambda_k\cos kt\right)\nu_n(t)\,dt=\right.$$

$$=\frac{1}{N}\left|\sum_{k=1}^n\frac{\lambda_{n+1-k}}{k}\right|, \qquad (2.3)$$

которое вместе с (B) дает (β).

Пример. Пусть $\lambda_k=1$ для $1\leqslant k\leqslant m$, $\lambda_k=0$ для $m+1\leqslant k\leqslant n-1$ и $\lambda_n=1$. Тогда

$$\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n-1}+\ldots+\frac{\lambda_n}{1}=\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{m}+1=\log\frac{n}{m}+O(1)=O(1),$$

если $n=2m$. С другой стороны,

$$\int_0^{2\pi}\left|\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\lambda_k\cos kx\right|dx=\int_0^\pi\left|1+\sum_{k=1}^m\cos kx+\cos nx\right|dx>C\log m,$$

где C = положительная константа, не зависящая от n. Таким образом, в этом примере условия (α) и (β) выполняются, а условие (B) нет.

ТЕОРЕМА 2. *Если ядро*

$$K_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^n\lambda_k^{(n)}\cos kt$$

удовлетворяет условию (B), *то условие* (A) *эквивалентно равенству*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\left\{u\int_0^u K_n(t)\,dt+\int_u^\pi tK_n(t)\,dt\right\}=u, \qquad (2.4)$$

которое должно выполняться для $0\leqslant u\leqslant\pi$.

Доказательство. Как мы уже знаем, выполнение условий (A) и (B) эквивалентно справедливости равенства

$$\lim_{n\to\infty}U_n(f, x)=f(x) \qquad (2.5)$$

для всех $f\in(C)$ и для какого-либо определенного значения x.

Положим $x=0$, тогда равенство (2.5) можно записать в виде

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)f(t)\,dt=f(0), \quad f\in(C). \qquad (2.6)$$

В силу четности $K_n(t)$, это последнее равенство эквивалентно равенству

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_n(t)f(t)\,dt=f(0), \qquad (2.7)$$

которое должно выполняться для всех непрерывных на сегменте $[0, \pi]$ функций f. Действительно, если выполняется (2.7) и $f \in (C)$, то, полагая $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где

$$f_1(t) = \frac{1}{2}(f(t) + f(-t)) \quad \text{и} \quad f_2(t) = \frac{1}{2}(f(t) - f(-t)),$$

будем иметь, в силу четности f_1 и нечетности f_2,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) f(t)\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} K_n(t) f_1(t)\, dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_1(0) = f(0).$$

Наоборот, если равенство (2.6) выполняется для всех $f \in (C)$, то, в частности, применяя его к четным функциям, получим (2.7).

Заметим теперь, что семейство функций

$$f_u(t) = \begin{cases} u & 0 \leqslant t \leqslant u, \\ t & u \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases} \tag{2.8}$$

зависящих от параметра u $(0 \leqslant u \leqslant \pi)$, образует полную систему (в смысле равномерной сходимости) в пространстве непрерывных на сегменте $[0, \pi]$ функций. Поэтому для того чтобы выполнялось равенство (2.7) для всех непрерывных на $[0, \pi]$ функций f, необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |K_n|\, dt$$

был ограниченным (условие (B)) и чтобы равенство (2.4) имело место для всех функций $f_u(t)$, что приводит к равенствам (2.4).

Резюмируя сказанное в начале § 1 и в теореме 2, получим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. *Следующие свойства эквивалентны:*

1) *имеет место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, x) = f(x)$$

для всех $f \in (C)$ *и всех* x (*или равномерно относительно* x *или для фиксированного произвольного* x), *где* $U_n(f, x)$ *определяется по* (1.2);

2) *имеют место условия* (A) *и* (B);

3) *имеют место равенства* (2.4) *и условие* (B);

§ 3. Суммы с коэффициентами, удовлетворяющими условию выпуклости

Положим

$$\lambda_0^{(n)} = 1, \quad \lambda_{n+1}^{(n)} = 0, \quad \Delta_k^2 = \lambda_k^{(n)} - 2\lambda_{k+1}^{(n)} + \lambda_{k+2}^{(n)}$$

и будем называть систему чисел $\{\lambda_k^{(n)}\}$ при данном n *выпуклой кверху*, если $\Delta_k^2 \leqslant 0$, и *выпуклой книзу*, если $\Delta_k^2 \geqslant 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Будем говорить, что последовательность функций $\psi_n(t)$, заданных на интервале $(0, \pi)$, удовлетворяет условию (B*), если существует сум-

мируемая, интегрируемая и монотонно убывающая на интервале $(0, \pi)$ функция $\psi_n^*(t)$ — мажоранта $\psi_n(t)$, для которой

$$|\psi_n(t)| \leqslant \psi_n^*(t) \quad (0 < t < \pi), \quad \int_0^\pi \psi_n^*(t)\,dt = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.1}$$

Далее, будем говорить, что последовательность функций $\psi_n(t)$, заданных на $(0, \pi)$, удовлетворяет условию (B^{**}), если она удовлетворяет условию (B^*) и если, каково бы ни было $\delta > 0$ $(\delta < \pi)$, имеет место

$$\sup_{\delta < t < \pi} |\psi_n(t)| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

В этих обозначениях упомянутая в конце § 1 лемма может быть сформулирована короче:

ЛЕММА. *Пусть для любого n система чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1;$ $\lambda_0^{(n)} = 1,\ \lambda_{n+1}^{(n)} = 0)$ выпукла (кверху или книзу) и*

$$K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kx.$$

Тогда из неравенств (α) и (β) следует, что ядро $K_n(x)$ удовлетворяет условию (B^*), а из неравенств (α), (β) и условия (A) следует, что ядро $K_n(x)$ удовлетворяет условию (B^{**}).

Эту лемму мы докажем в § 4, а пока разрешим себе на ней базироваться.

ТЕОРЕМА 4. *Если при каждом n система чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ выпукла (кверху или книзу), то следующие свойства эквивалентны:*

1) *ядро $K_n(x)$ удовлетворяет условию (B);*

2) *ядро $K_n(x)$ удовлетворяет условию (B^*);*

3) *числа $\lambda_k^{(n)}$ удовлетворяют неравенствам (α) и (β).*

Доказательство. По теореме 1, из 1) следует 3). По лемме, из 3) следует 2). Наконец, из 2) следует, по определению (B) и (B^*), справедливость 1).

ТЕОРЕМА 5. *Если при каждом n система чисел $\lambda_k^{(n)}$ $(k = 0, 1, \ldots, x+1;$ $\lambda_0^{(n)} = 1,\ \lambda_{n+1}^{(n)} = 0)$ выпукла (кверху или книзу), то следующие свойства эквивалентны:*

1°. *Для произвольного x и $f \in (C)$*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f, x) = f(x). \tag{3.2}$$

2°. *Равенство (3.2) удовлетворяется для всякой суммируемой периода 2π функции в любой ее точке Лебега x, иначе говоря, для такой точки x, что*

$$\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\,dt \to 0 \quad (h \to 0).$$

3°. *Ядро $K_n(x)$ удовлетворяет условию (B^{**}).*

4°. *Ядро* $K_n(x)$ *удовлетворяет условию* (A) *и неравенствам* (α) *и* (β).

Доказательство. Так как точка непрерывности функции есть ее точка Лебега, то из 2° следует 1°. Далее, из 1° следует 4°, так как, по теореме 3, из 1° следует (A) и (B), что влечет, по теореме 4, утверждение 4°. По лемме, из 4° вытекает 3°. Докажем, наконец, что из 3° следует 2°. Из (B^{**}) и очевидного равенства

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi K_n(x)\,dx = 1 \tag{3.3}$$

вытекает, что для всякого $\delta > 0$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\delta K_n(x)\,dx \to 1 \quad (n \to \infty), \tag{3.4}$$

а также справедливость условия (B^*).

Но эти два свойства, если принять во внимание четность $K_n(x)$, по известной теореме Д. К. Фаддеева [5], влекут за собой справедливость равенства (3.2) для всех суммируемых периода 2π функций f в их точках Лебега x, т. е. справедливость утверждения 2°.

Этим теорема доказана.

Примечание. Нетрудно видеть, что из выпуклости чисел $\lambda_k^{(n)}$ ($k=0, 1, \ldots, n+1$) и равенств $\lambda_0^{(n)}=1$, $\lambda_{n+1}^{(n)}=0$ следует, что условие (A) эквивалентно равенству $\lambda_1^{(n)} \to 1$ при $n \to \infty$.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть при каждом* n *система чисел* $\lambda_k^{(n)}$ ($k=0, 1, \ldots, n+1$; $\lambda_0^{(n)}=1$, $\lambda_{n+1}^{(n)}=0$) *выпукла (кверху или книзу) и пусть* $f(x)$ *есть суммируемая периода* 2π *функция, непрерывная на сегменте* $a \leqslant x \leqslant b$. *Тогда неравенство* (3.2) *имеет место равномерно относительно сегмента* $a \leqslant x \leqslant b$.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы в случае, когда $K_n(t)$ есть ядро Фейера и базируется на равенстве (3.3) и свойствах

$$\max_{0<\delta\leqslant x\leqslant 2\pi} |K_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \int_0^\pi |K_n(x)|\,dx = O(1)$$

ядра K_n, вытекающих из условия (B^{**}).

Теорема 5 утверждает, в частности, что в предположении выпуклости системы коэффициентов $\lambda_k^{(n)}$ из условий (A) и (B) следует выполнение равенства (3.2) для всех точек x Лебега произвольной суммируемой функции f. Следующий пример показывает, что если не предполагать выпуклости $\lambda_k^{(n)}$, то это утверждение, вообще говоря, неверно.

Пример. Пусть $\psi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность непрерывных четных периода 2π функций, определенных на $[0, \pi]$ равенствами

$$\psi_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{для } 0\leqslant x\leqslant \pi-\frac{2}{n^2}, \\ n & \text{для } x=\pi-\frac{1}{n^2}, \\ \text{линейна} & \text{для } \pi-\frac{2}{n^2}\leqslant x\leqslant \pi-\frac{1}{n^2} \\ & \text{и для } \pi-\frac{1}{n^2}\leqslant x\leqslant \pi. \end{cases}$$

Подберем четные тригонометрические полиномы $T_{m_n}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ такие, чтобы для всех x

$$|T_{m_n}(x)-\psi_n(x)|<\frac{1}{n},$$

где m_n — порядок полинома $T_{m_n}(x)$.

Пусть метод суммирования $U_{r_n}(f, x)$ имеет ядро

$$K_{r_n}(x)=F_n(x)+T_{m_n}(x), \quad r_n=\max(n, m_n),$$

где F_n — ядро Фейера. Очевидно,

$$\int_0^{\pi}|T_{m_n}(x)|\,dx\leqslant\int_0^{\pi}\psi_n(x)\,dx+\frac{\pi}{n}=\frac{\pi+1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\left\{u\int_0^u T_{m_n}(x)\,dx+\int_u^{\pi}xT_{m_n}(x)\,dx\right\}=0 \quad (0\leqslant u\leqslant\pi).$$

Отсюда следует, если принять во внимание теорему 2, что условия (A) и (B) для ядра $K_{r_n}(x)$ выполнены, так как они заведомо выполнены для $F_n(x)$.

Однако ядро $K_{r_n}(x)$ неограниченно на сегменте $\delta\leqslant x\leqslant\pi$ $(\delta>0)$, что влечет, как известно, существование суммируемой на этом сегменте функции $\varphi(x)$, для которой

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}K_{r_n}(x)\,\varphi(x)\,dx=\infty. \tag{3.5}$$

Но в таком случае четная периода 2π функция $f(x)$, равная нулю для $0\leqslant x<\delta$ и равная $\varphi(x)$ для $\delta\leqslant x<\pi$, имеет $x=0$ точкой Лебега, причем $f(0)=0$. И все же, вследствие (3.5), интеграл

$$U_{r_n}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}K_{r_n}(x)\,f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}K_{r_n}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

при $n\to\infty$ не стремится к нулю.

§ 4. Доказательство леммы

ЛЕММА. *Пусть для любого n система чисел* $\lambda_k^{(n)}$ ($k=0, 1, \ldots, n+1$; $\lambda_0^{(n)}=1$, $\lambda_{n+1}^{(n)}=0$) *выпукла (кверху или книзу). Тогда для ядра*

$$K_n = K_n(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{(n)} \cos kx$$

1) *из неравенств* (α) *и* (β) *следует выполнение условия* (B) *и*

2) *из неравенств* (α) *и* (β) *и условия* (A) (*или* $\lambda_1^{(n)} \to 1$) *следует выполнение условия* (B^{**}).

Доказательство. Введем в рассмотрение сумму Дирихле

$$D_k = D_k(x) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \quad (k=0, 1, \ldots) \tag{4.1}$$

и сумму Фейера

$$F_k = F_k(x) = \frac{1}{k+1}\,\frac{\sin^2\frac{k+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}} \quad (k=0, 1, \ldots). \tag{4.2}$$

Очевидно, для $0 < x < \frac{1}{k+1}$

$$F_k(x) = |F_k(x)| < \frac{1}{k+1}\cdot\frac{\left(\frac{k+1}{2}x\right)^2}{2\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2}{8}(k+1) < \frac{\pi^2}{2}(k+1)$$

и для $\frac{1}{k+1} < x < \pi$

$$F_k(x) = |F_k(x)| \leqslant \frac{1}{(k+1)\,2\left(\frac{x}{\pi}\right)^2} = \frac{\pi^2}{2(k+1)x^2}.$$

Отсюда, полагая

$$F_k^*(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2(k+1)}{2}, & \text{если } 0 < x < \frac{1}{k+1}, \\ \frac{\pi^2}{2(k+1)x^2}, & \text{если } \frac{1}{k+1} < x < \pi, \end{cases}$$

получим

$$\int_0^\pi F_k^*(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{k+1}} + \int_{\frac{1}{k+1}}^{\pi} = \pi^2 - \frac{\pi}{2(k+1)} < \pi^2,$$

и так как $F_k^*(t)$ — монотонно убывающая функция, то отсюда будет следовать, что функция $F_k(t)$ удовлетворяет условию (B^*).

Далее, для всякого $\delta > 0$

$$\max_{\delta \leqslant x \leqslant \pi} |F_k(x)| \leqslant \frac{1}{2(k+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{\omega(\delta)}{k+1} \to 0 \quad (k \to \infty) \tag{4.3}$$

и, таким образом, ядро Фейера $F_k(x)$ также удовлетворяет условию (B**).

Нетрудно видеть, что если

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k^{(n)}| = O(1), \tag{4.4}$$

то функция

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)} F_k(t) \tag{4.5}$$

удовлетворяет условию (B*). Этим обстоятельством мы будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

Положим $\lambda_k = \lambda_k^{(n)}$ $(k=0, 1, \ldots, n+1)$ и построим, ради наглядности, в декартовой системе координат (x, y) точки (k, λ_k), соединив их прямыми отрезками. Тогда получим ломаную L, которая будет выпуклой книзу в случае, если для рассматриваемого n справедливо $\Delta_k^2 \geqslant 0$, и выпуклой кверху, если для этого n имеет место $\Delta_k^2 \leqslant 0$ при любом $k=0, 1, \ldots, n-1$.

Пусть m есть тот индекс k, для которого λ_k достигает своего минимума в случае $\Delta_k^2 \geqslant 0$ и максимума в случае $\Delta_k^2 \leqslant 0$.

Разложим K_n на два слагаемых:

$$K_n = K'_m + K''_m,$$

где, считая, что $\Delta_k = \lambda_k - \lambda_{k+1}$ $(k=0, 1, \ldots, n)$,

$$K'_m = K'_m(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \cos kx - \lambda_m D_m =$$
$$= \sum_{k=0}^{m-2} (k+1)\Delta_k^2 F_k + m\Delta_{m-1} F_{m-1}, \tag{4.6}$$

$$K''_m = K''_m(x) = \lambda_m D_m + \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \cos kx = \sum_{k=m}^{n} \Delta_k D_k. \tag{4.7}$$

Если $m=0$, то $K'_m \equiv 0$; если же $m=n$, то $K''_m = \lambda_n D_n$.

В силу определения индекса m, все Δ_k^2 для $k=0, 1, \ldots, m-2$ и Δ_{m-1} имеют одинаковые знаки. Поэтому, вследствие (α),

$$\sum_{k=0}^{m-2} |(k+1)\Delta_k^2| + |m\Delta_{m-1}| = \left|\sum_{k=0}^{m-2} (k+1)\Delta_k^2 + m\Delta_{m-1}\right| = |\lambda_m - 1| = O(1) \tag{4.8}$$

и ядро K'_m удовлетворяет условию (B*).

Если же выполняется условие (A), то ядро K'_m удовлетворяет также условию (B**), так как, вследствие (4.3),

$$\max_{\delta \leqslant x \leqslant \pi} |K'_m(x)| \leqslant \omega(\delta) \left|\sum_{k=0}^{m-2} \Delta_k^2 + \Delta_{m-1}\right| = \omega(\delta)|\Delta_0| =$$
$$= \omega(\delta)|1 - \lambda_1^{(n)}| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{4.9}$$

Итак, мы доказали, что:

1) если имеет место (α) и (β), то $K'_m(x)$ удовлетворяет условию (B*);

2) если имеет место (α), (β) и (A), то $K'_m(x)$ удовлетворяет условию (B**).

Эти же утверждения нам предстоит доказать в отношении ядра K''_m.

Впоследствии мы докажем, что при наличии выпуклости λ_k из (α) и (β) вытекают следующие равенства:

$$\lambda_k = O\left(\frac{1}{\log n}\right) \qquad (n-3 \leqslant k \leqslant n), \tag{4.10}$$

$$\lambda_{m+1} \log \frac{n}{n-m-1} = O(1) \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-4), \tag{4.11}$$

$$\Delta_m (n-m) \log \frac{n}{n-m-1} = O(1) \quad (m = 0, 1, \ldots, n-4), \tag{4.12}$$

а пока при оценке K''_m будем на них базироваться.

Заметим, что из (4.10) следует

$$\Delta^2_{n-1} = O\left(\frac{1}{\log n}\right). \tag{4.13}$$

Покажем, что если $n-3 \leqslant m \leqslant n$, то из ($\alpha$) и ($\beta$) будет следовать, что ядро K''_m удовлетворяет условию (B*). В самом деле, очевидно,

$$K''_m(x) = \lambda_m D_m(x) + O(1) \quad \text{и} \quad |\lambda_m D_m(x)| \leqslant |\lambda_m| D^*_m(x),$$

где

$$|D^*_m(x)| = \begin{cases} \dfrac{\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)}{2}, & \text{если} \quad 0 < x < \dfrac{1}{m+\frac{1}{2}}, \\ \dfrac{\pi}{2x}, & \text{если} \quad \dfrac{1}{m+\frac{1}{2}} < x < \pi; \end{cases}$$

при этом функция $|\lambda_m| D^*_m(x)$ монотонно убывает в интервале $(0, \pi)$ и, вследствие (4.10),

$$|\lambda_m| \int_0^\pi D^*_m dx = |\lambda_m| \frac{\pi}{2} \left[1 + \log \pi + \log\left(m + \frac{1}{2}\right)\right] = O(1).$$

Таким образом, функция $\lambda_m D_m(x)$ удовлетворяет условию (B*) и так как она отличается от $K''_m(x)$ на ограниченную функцию, то $K''_m(x)$ также удовлетворяет условию (B*).

Будем в дальнейшем считать, что $0 \leqslant m \leqslant n-4$ и преобразуем K''_m к виду

$$K''_m = K''_m(x) = \sum_{k=m}^{n} \Delta_k \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = U_m - V_m, \tag{4.14}$$

где

$$U_m = U_m(x) = \frac{\sin(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-m} \Delta_{n-k} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x, \tag{4.15}$$

$$V_m = V_m(x) = \frac{\cos(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}} \sum_{k=0}^{n-m} \Delta_{n-k} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x. \tag{4.16}$$

Если принять во внимание, что

$$\sum_{k=0}^{r} \sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x = 2(r+1)\sin\frac{x}{2} F_r(x),$$

то после преобразования Абеля получим

$$V_m = \cos(n+1)x \left\{(n-m+1)\Delta_m F_{n-m} - \sum_{k=0}^{n-m-1} (k+1)\Delta^2_{n-k-1} F_k\right\} \tag{4.17}$$

и так как Δ_m и все Δ^2_k имеют разные знаки, то

$$|(n-m+1)\Delta_m| + \sum_{k=0}^{n-m-1} |(k+1)\Delta^2_{n-k-1}| =$$

$$= |(n-m+1)\Delta_m - \sum_{k=0}^{n-m-1} (k+1)\Delta^2_{n-k-1}| = |\lambda_m| = O(1), \tag{4.18}$$

если выполняется неравенство (α).

Этим доказано, что из (α) и (β) следует выполнение для $V_m(x)$ условия (B^*).

Воспользовавшись теперь равенством

$$\sum_{k=0}^{r} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x = \frac{\sin(r+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

и преобразованием Абеля, получим

$$U_m = \sin(n+1)x \left\{\Delta_m \frac{\sin(n-m+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}} - \sum_{k=0}^{n-m-1} \Delta^2_{n-k-1} \frac{\sin(k+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right\}. \tag{4.19}$$

Примем во внимание неравенства

$$\frac{|\sin(k+1)t|}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \begin{cases} \frac{\pi^2}{4}\frac{(k+1)}{t}, & \text{если } \frac{1}{n+1} \leqslant t \leqslant \frac{1}{k+1}, \\ \frac{\pi^2}{4t^2}, & \text{если } \frac{1}{k+1} \leqslant t \leqslant \pi, \end{cases} \quad (k=1,2,\ldots,n) \tag{4.20}$$

$$\frac{|\sin t|}{4\sin^2\frac{t}{2}} \leqslant \frac{\pi}{4}\frac{1}{t} \quad \left(\frac{1}{n+1} \leqslant t \leqslant \pi\right) \tag{4.21}$$

и обозначим через $\psi^*_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ функцию, стоящую в правой части (4.20) и определенную на интервале $\frac{1}{n+1} \leqslant t \leqslant \pi$, а через $\psi^*_0(t)$ —

функцию, стоящую в правой части (4.21) и определенную на том же интервале.

Очевидно, $\psi_k^*(t)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — монотонно убывающая на $\left(\frac{1}{n+1}, \pi\right)$ функция, удовлетворяющая неравенствам

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{n+1}}^{\pi} \psi_k^*(t)\,dt \leqslant A(k+1)\log\frac{n}{k} + B(k+1) \quad (k=1, 2, \ldots, n), \\ &\int_{\frac{1}{n+1}}^{\pi} \psi_0^*(t)\,dt \leqslant A\log n, \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

где A и B — положительные константы, не зависящие от k и n.

Отсюда следует, что в правой части неравенства

$$|U_m(x)| \leqslant |\Delta_m|\,\psi_{n-m}^*(x) + \sum_{k=0}^{n-m-1} |\Delta_{n-k-1}^2|\,\psi_k^*(x) = \\ = U_m^*(x) \quad \left(\frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \pi\right) \qquad (4.23)$$

стоит монотонно убывающая на $\left(\frac{1}{n+1}, \pi\right)$ функция, которая ввиду того, что Δ_m и Δ_k^2 (для всех k) — разных знаков, при $x=\frac{1}{n+1}$ будет равна

$$U_m^*\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{\pi^2}{4}\left|\Delta_m(n-m+1) - \sum_{k=0}^{n-m-1} \Delta_{n-k-1}^2(k+1)\right|(n+1) = \\ = \frac{\pi^2|\lambda_m|(n+1)}{4}. \qquad (4.24)$$

Далее, из (4.15) и (α) имеем

$$|U_m(x)| \leqslant \frac{\pi(n+1)}{2}\left|\sum_{k=0}^{n-m}\Delta_{n-k}\right| = \frac{\pi(n+1)}{2}|\lambda_m| < \frac{\pi^2}{4}|\lambda_m|(n+1) \qquad (4.25)$$

и, следовательно, если положить $U_m^*(x)$ в интервале $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$ равной правой части (4.25), то, вследствие (4.24), определенная таким образом на всем интервале $(0, \pi)$ функция $U_m^*(x)$ будет монотонно убывающей мажорантой для $U_m(x)$:

$$|U_m(x)| \leqslant U_m^*(x). \qquad (4.26)$$

Если при этом выполняются условия (α) и (β), то, используя (4.10), (4.12), (4.13), (4.18) и (4.22), найдем

$$\int_0^{\pi} U_m^*\,dx = \int_0^{\frac{1}{n+1}} + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\pi} = O(1) + A|\Delta_m|(n-m+1)\log\frac{n}{n-m} +$$

$$+B\,|\,\Delta_m|\,(n-m+1)+\sum_{k=1}^{n-m-1}|\Delta^2_{n-k-1}|\left[A\,(k+1)\log\frac{n}{k}+B\,(k+1)\right]+$$

$$+A\,|\,\Delta^2_{n-1}\,|\log n = A\,\Big|\sum_{k=1}^{n-m-1}\Delta^2_{n-k-1}\,(k+1)\log\frac{n}{k}\,\Big|+B\,\Big|\,\Delta_m\,(n-m+1)-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-m-1}(k+1)\,\Delta^2_{n-k-1}\,\Big|+O\,(1)=A\,\Big|\sum_{k=1}^{n-m-1}\Delta^2_{n-k-1}\,(k+1)\log\frac{n}{k}\Big|+O\,(1)=$$

$$=\Big|\,2\Delta_{n-1}\log n+\sum_{k=2}^{n-m-1}\Delta_{n-k}\left[(k+1)\log\frac{n}{k}-k\log\frac{n}{k-1}\right]-$$

$$-(n-m)\,\Delta_m\log\frac{n}{n-m-1}\Big|+O(1)\leqslant\Big|\sum_{k=2}^{n-m-1}\Delta_{n-k}\log\frac{n}{k}\Big|+$$

$$+\Big|\sum_{k=2}^{n-m-1}{}' k\,\Delta_{n-k}\log\left(1-\frac{1}{k}\right)\Big|+O\,(1). \tag{4.27}$$

Заметим теперь, что при выполнении условий теоремы из неравенства (β) следует более сильное неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|\,\lambda_{n+1-k}\,|}{k}\leqslant C', \tag{4.28}$$

где C' — абсолютная константа. Действительно, в случае $\Delta^2_k\leqslant 0$ все $\lambda_k\geqslant 0$. В случае же $\Delta^2_k\geqslant 0$ прямая, соединяющая точки $(0, 1)$ и $(n+1, 0)$, расположена выше L, поэтому

$$\lambda_k<\frac{n+1-k}{n+1}\quad (k=0, 1, \ldots, n) \tag{4.29}$$

и если числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ неотрицательны, а числа λ_k с индексами $k>s$ отрицательны, то

$$0\leqslant\frac{\lambda_1}{n}+\frac{\lambda_2}{n-1}+\cdots+\frac{\lambda_s}{n+1-s}\leqslant\frac{s}{n}\leqslant 1,$$

что влечет (4.28).

Из (4.28), (4.10), (4.11) и равенств

$$\log\left(1\pm\frac{1}{k}\right)=O\left(\frac{1}{k}\right)$$

следует

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=2}^{n-m-1}\Delta_{n-k}\log\frac{n}{k}=-\lambda_{n-1}\log\frac{n}{2}+\sum_{k=2}^{n-m-2}\lambda_{n-k}\log\left(1+\frac{1}{k}\right)+\\
&\qquad\qquad+\lambda_{m+1}\log\frac{n}{n-m-1}=O\,(1),\\
&\Big|\sum_{k=2}^{n-m-1}k\Delta_{n-k}\log\left(1-\frac{1}{k}\right)\Big|\leqslant\Big|\sum_{k=2}^{n-m-1}\Delta_{n-k}\Big|\,O\,(1)=\\
&\qquad\qquad=|\,\lambda_{m+1}-\lambda_{n-1}\,|\,O\,(1)=O(1).
\end{aligned}\right\} \tag{4.30}$$

Итак, доказано, что в предположении наличия неравенств (α) и (β) функция $U_m(x)$ удовлетворяет условию (B^*). В таком случае ядро $K^*_m(x)$ также удовлетворяет условию (B^*), так как оно есть, по (4.14), разность $U_m - V_m$ двух функций, удовлетворяющих условию (B^*).

Докажем теперь, что из (α) и (β) следует, что K''_m удовлетворяет условию (B^{**}). Для этого представим K''_m в виде

$$K''_m = \sum_{k=m}^{n} \Delta_k D_k = \Delta_m h_{n-m} - \sum_{k=m}^{n-1} \Delta^2_k h_{n-k-1}, \tag{4.31}$$

где

$$h_k = h_k(t) = \sum_{i=0}^{k} D_{n-i}(t) = \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t - \sin^2 \frac{n-k}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \tag{4.32}$$

и

$$\max_{0<\delta \leq x \leq \pi} |h_k(t)| = \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = C(\delta). \tag{4.33}$$

Отсюда, приняв во внимание равенство (4.10) и то, что Δ_m и Δ^2_k разных знаков, получим

$$\max_{\delta \leq x \leq \pi} |K''_m(x)| \leqslant C(\delta) \left| \Delta_m - \sum_{k=m}^{n-1} \Delta^2_k \right| = C(\delta) |\lambda_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.34}$$

Таким образом, мы доказали нашу лемму для ядер K'_m и K^*_m, что, очевидно, влечет за собой справедливость ее для K_n.

Нам осталось еще доказать равенства (4.10), (4.11) и (4.12), что мы проделаем отдельно для каждого из рассматриваемых двух случаев.

Случай 1. $\Delta^2_k \geqslant 0$. Если $\lambda_k > 0$ для какого-либо k, удовлетворяющего неравенству $n-3 \leqslant k \leqslant n$, то на основании (4.29),

$$\lambda_k \leqslant \frac{4}{n+1} = O\left(\frac{1}{\log n}\right),$$

что доказывает (4.10).

Пусть $-\lambda_l = \lambda > 0$. Прямая, соединяющая точки $(0,1)$ и (l, λ_l), которая пересекает ось x в точке $x_l = \frac{l}{\lambda+1}$, расположена не ниже L. Поэтому, если ν — индекс, удовлетворяющий неравенствам $\nu - 1 \leqslant \frac{l}{\lambda+1} < \nu$, то, принимая во внимание, что $\lambda_k < 0$ для $k \geqslant \nu$, из неравенства (4.28) будем иметь

$$C' \geqslant \left| \sum_{k=\nu}^{l} \frac{\lambda_k}{n+1-k} \right| \geqslant \frac{1+\lambda}{l} \sum_{k=\nu}^{l} \frac{k}{n+1-k} - \sum_{k=\nu}^{l} \frac{1}{n+1-k} =$$

$$= \frac{1+\lambda}{l} \left[\int_{n-l}^{n-\nu} \frac{n-x}{x+1} dx + O\left(\frac{l}{n-l+1}\right) \right] - \left[\int_{n+1-l}^{n+1-\nu} \frac{dx}{x} + O\left(\frac{1}{n+1-l}\right) \right] =$$

$$=\frac{1+\lambda}{l}\left[-(l-\nu)+(n+1)\log\frac{n-\nu+1}{n-l+1}+O\left(\frac{l}{n-l+1}\right)\right]-\log\frac{n+1-\nu}{n+1-l}+$$
$$+O\left(\frac{1}{n+1-l}\right)=\left[\frac{\lambda+1}{l}(n+1)-1\right]\log\frac{n-\nu+1}{n-l+1}+O(1)\geqslant$$
$$\geqslant\lambda\log\frac{n-\frac{l}{\lambda+1}+1}{n-l+1}+O(1).$$

Итак, существует константа, не зависящая от n, l и λ, для которой

$$M>\lambda\log\frac{n-\frac{1}{\lambda+1}+1}{n-l+1}. \tag{4.35}$$

Рассмотрим случай $l=n-k$ $(0\leqslant k\leqslant 3)$. Тогда из (4.35) и ограниченности λ будет следовать

$$M>\lambda\log\frac{\lambda n}{4(\lambda+1)}+O(1)=\lambda\log n+O(1),$$

что доказывает равенство (4.10) для $\lambda_k<0$.

Очевидно, $\lambda_{m+1}\leqslant 0$ и $\Delta_k\leqslant 0$ для $k=m+1,\ldots,n$, причем

$$|\Delta_m|\leqslant|\Delta_{m+1}|\leqslant\ldots\leqslant|\Delta_n|.$$

А так как

$$\lambda_{m+1}=\Delta_{m+1}+\ldots+\Delta_n,$$

то

$$|\lambda_{m+1}|\geqslant(n-m)|\Delta_m|.$$

Поэтому из (4.11) следует (4.12).

Неравенство же (4.11) будет доказано, если будет установлена справедливость равенства

$$\lambda_l\log\frac{n}{n-l}=O(1) \tag{4.36}$$

для $\lambda_l=-\lambda<0$ и $l=1,2,\ldots,n-3$, к чему мы и перейдем.

Допустим, что (4.36) не имеет места; тогда, в силу ограниченности λ, найдется подпоследовательность индексов n, для которой

$$\lambda\log\frac{n}{n-l}\longrightarrow\infty\quad(n\longrightarrow\infty)$$

и при этом $\lambda\longrightarrow\lambda_0$. Отсюда следует, что для этой подпоследовательности $\frac{l}{n}\longrightarrow 1$, а из (4.35) следует, что $\lambda_0=0$. Полагая $\mu=\frac{\lambda}{\lambda+1}$ $(\mu\longrightarrow 0)$ и принимая во внимание, что при рассматриваемых l $2(n-l)\geqslant n-l+1$, из (4.35) получим

$$M>\mu\log\frac{(n-l)+l\mu+1}{n-l+1}\geqslant\mu\log\frac{l\mu}{2(n-l)}=\mu\log\frac{l}{n-l}+$$
$$+\mu\log\frac{l\mu}{2n}=\mu\log\frac{n}{n-l}+O(1),$$

что противоречит сделанному допущению.

Случай 2. $\Delta_k^2\leqslant 0$. В этом случае все $\lambda_k\geqslant 0$. Пусть l — наибольший индекс среди k, для которых $\lambda_k\geqslant 1$; тогда $1\leqslant\lambda_k$ для $k=0,1,\ldots,l$ и $1>\lambda_k$ для $k=l+1,\ldots,n+1$.

Из условия (β) будет следовать

$$C \geqslant \sum_{k=n-l+1}^{n} \frac{\lambda_{n+1-k}}{k} \geqslant \sum_{k=n-l+1}^{n} \frac{1}{k} = \log \frac{n}{n-l-1} + O(1) \qquad (4.37)$$

и так как $m \leqslant l$, то

$$\log \frac{n}{n-m-1} = O(1), \qquad (4.38)$$

что вместе с (α) влечет (4.11).

Из (4.37) следует еще, что $l < n-3$. Поэтому

$$\lambda_{n-3} \leqslant \lambda_k \quad (k=0, 1, \ldots, n-3)$$

и

$$C > \frac{\lambda_1}{n} + \ldots + \frac{\lambda_{n-3}}{4} \geqslant C_1 \lambda_{n-3} \log n,$$

где C_1 — константа, не зависящая от n. Отсюда, принимая во внимание, что $\lambda_{n-k} \leqslant \lambda_{n-3}$ $(0 \leqslant k \leqslant 3)$, получим (4.10).

Заметим, что из

$$0 < \Delta_m < \Delta_{m+1} < \cdots < \Delta_n$$

следует

$$\lambda_m = \Delta_m + \cdots + \Delta_n \geqslant (n-m) \Delta_m,$$

откуда, на основании (α) и (4.38), получим (4.12).

§ 5. Примеры

1. Метод Чезаро (C, r) есть сумма вида (1.2), где

$$\lambda_k = \lambda_k^{(n)} = \frac{A_{n-k}^{(r)}}{A_n^{(r)}} \quad (k=0, 1, \ldots, n)$$

и

$$A_0^{(r)} = 1, \quad A_m^{(r)} = \frac{(r+1)(r+2)\cdots(r+m)}{m!} \quad (m=1, 2, \ldots, r>0).$$

Очевидно,

$$\lambda_k > 0, \quad \Delta_k = \lambda_k - \lambda_{k+1} = \frac{A_{n-k}^{(r-1)}}{A_n^{(r)}} > 0 \quad (k=0, 1, \ldots, n),$$

$$\Delta_k^2 = \Delta_k - \Delta_{k+1} = \frac{A_{n-k}^{(r-2)}}{A_n^{(r)}} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Как известно [(4), § 3.12], отношение $\frac{A_n^{(r)}}{n^r}$ при $n \to \infty$ стремится к положительной константе $\mu(r)$, что влечет условие (A).

При $r=1$ метод Чезаро совпадает с методом Фейера. При $r>1$, очевидно, $\Delta_k^2 > 0$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$ и в этом случае неравенства (α) и (β) автоматически следуют из того обстоятельства, что ломаная, соединяющая точки (k, λ_k) декартовой системы координат, лежит выше оси абсцисс, но ниже ломаной, соединяющей точки $\left(k, \frac{n+1-k}{n+1}\right)$ $(k=0, 1, \ldots, n+1)$.

При $r<1$ вторые разности $\Delta_k^2<0$. Неравенство (β) вытекает из соотношений

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-k}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\frac{A_{k-1}^{(r)}}{A_n^{(r)}}=\frac{1}{A_n^{(r)}}\sum_{k=1}^{n}\frac{O(k^r)}{k}=O(1),$$

а неравенство (α) — из того, что

$$\lambda_0=1,\quad \lambda_k>0,\quad \Delta_k>0.$$

Этим доказана для метода (C, r) справедливость утверждений теоремы 5, что обычно доказывается другими способами.

2. Положим

$$\sigma(n, p)=\sigma(n, p, f, x)=\frac{S_{n-p}+S_{n-p+1}+\cdots+S_n}{p+1},$$

где $0\leqslant p\leqslant n$, и S_k—суммы Фурье k-го порядка функции f.

Очевидно, $\sigma(n, p)$ есть частный случай $U_n(f, x)$ при

$$\lambda_k^{(n)}=\begin{cases}1 & (k=0, 1, \ldots, n-p),\\ \dfrac{n+1-k}{p+1} & (k=n-p+1, \ldots, n).\end{cases}$$

Числа $\lambda_k=\lambda_k^{(n)}$ образуют монотонно убывающую выпуклую (кверху) последовательность $\Delta_k^2\leqslant 0$, причем $\lambda_k^{(n)}\to 1$ при $n\to\infty$ (условие (A)). Условие (α) выполнено.

Сумма

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_{n+1-k}}{k}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{p+1}+\frac{p}{p+1}=\log\frac{n}{p+1}+O(1)$$

будет ограничена и, следовательно, неравенство (β) будет выполняться тогда и только тогда, если отношение $\frac{n}{p+1}$ ограничено.

Таким образом, для того чтобы метод $\sigma(n, p)$ удовлетворял условию (A) и неравенствам (α) и (β), необходимо и достаточно, чтобы

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{p}{n}=\mu>0.$$

Это утверждение, в силу доказанных теорем, дает некоторое обобщение моего прежнего результата ([3]).

3. Метод Бернштейна.

$$\sigma(n, f, x)=\frac{1}{2}\left\{S_n\left(f, x+\frac{\pi}{2n}\right)+S_n\left(f, x-\frac{\pi}{2n}\right)\right\}=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k\frac{\pi}{2n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где $S_n(f, x)$ — сумма Фурье функции f — есть тригонометрическая сумма $U_{n-1}(f, x)$ порядка $n-1$, коэффициенты которой

$$\lambda_k^{(n-1)}=\cos\frac{k\pi}{2n}\quad (k=0, 1, \ldots, n)$$

образуют выпуклую кверху ограниченную (условие (α)) систему чисел.

Кроме этого, справедливо неравенство (β):

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \cos \frac{k\pi}{2n} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} \frac{n-k}{2n} \pi < \frac{\pi}{2}$$

и, таким образом, этот метод удовлетворяет перечисленным в теореме 5 свойствам.

Примечание. Собственно говоря, в работах С. Н. Бернштейна и Рогозинского рассматривались суммы вида

$$\sigma_n^*(f, x) = \frac{1}{2}\left\{S_n\left(f, x+\frac{\pi}{2n+1}\right) - S_n\left(f, x-\frac{\pi}{2n+1}\right)\right\}.$$

Но к этим суммам наша теория непосредственно неприменима, так как если их представить в виде (1.2), то коэффициенты

$$\lambda_0^{(n)} = 1, \qquad \lambda_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1} \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad \lambda_{n+1}^{(n)} = 0$$

уже не будут удовлетворять условию выпуклости.

Впрочем, легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty} [\sigma_n(f, x) - \sigma_n^*(f, x)] = f(x),$$

если x — точка Лебега f, так как ядро суммы $\sigma_n - \sigma_n^*$ представляет собой полином

$$\mathfrak{R}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k^{(n)} \cos kx,$$

$$\mu_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1} - \cos\frac{k\pi}{2n} = O\left(\frac{k}{n^2}\right),$$

удовлетворяющий свойствам

$$|\mathfrak{R}_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{k}{n^2}\right) < C,$$

$$\left|\int_\delta^\pi \mathfrak{R}_n(t)\,dt\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \mu_k^{(n)} \frac{\sin k\delta}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$(0 < \delta < \pi).$$

Поступило
10. III. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

[2] Hill E. and Tamarkin I. D., On the summability of Fourier series I. Transactions of the American Math. Society, 34 (1932), 757—783.

[3] Никольский С. М., О некоторых методах приближения тригонометрическими суммами, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем. 4 (1940), 509—520.

[4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

[5] Фаддеев Д. К., О представлении суммируемых функций сингулярными интегралами в точках Lebesgue'a, Матем. сб., т. 1 (43), № 3 (1936), 351—368.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 279—324

М. И. ГРАЕВ

СВОБОДНЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

Работа посвящена дальнейшему развитию теории свободных топологических групп. Дается новый метод получения некоторых результатов, выведенных впервые А. А. Марковым [(4), (5)], а также решаются две проблемы, поставленные А. А. Марковым.

Введение

Настоящая работа посвящена изучению свободных топологических групп, а также свободных абелевых топологических групп вполне регулярных пространств, впервые введенных А. А. Марковым (4)*. Оказалось целесообразным несколько расширить понятие свободной топологической группы (определение свободной топологической группы см. в § 2). Как выясняется в дальнейшем, если свободная топологическая группа не связна, то она будет свободной топологической группой в смысле А. А. Маркова.

Работа состоит из двух глав. Глава первая посвящена общим свойствам свободных топологических групп.

В § 3 этой главы новым методом доказывается теорема существования свободной топологической группы вполне регулярного пространства, а также теорема единственности (первоначальное доказательство этих теорем принадлежит А. А. Маркову (4)). Этот метод, не требующий привлечения теории норм и мультинорм на группах и сводящийся в основном к некоторой метризации абстрактной свободной группы, используется на протяжении всей первой главы, а также в § 10 второй главы**.

В § 4 изучаются некоторые свойства свободных топологических групп. Утверждения A), B) и C) этого параграфа аналогичны, соответственно, теоремам 4, 24 и 5 работы А. А. Маркова (4).

---

* Все результаты, формулируемые во введении лишь для свободных топологических групп, имеют место также для свободных абелевых топологических групп.

** Уже при подготовке данной работы к печати автору стало известно из Mathematilal Reviews (7, № 6, июнь 1946 г.) о двух работах T. Nakayama и S. Kakutani, относящихся к теории свободных топологических групп. В работе S. Kakutani дается, в частности, еще одно доказательство существования свободных топологических групп в смысле А. А. Маркова.

В § 5 выясняется, что свободные топологические группы двух негомеоморфных пространств (как в нашем смысле, так и в смысле Маркова) могут быть изоморфными. Этим отрицательно решаются проблемы I и II, поставленные А. А. Марковым ([4]). Классы пространств, свободные топологические группы которых изоморфны, могут быть очень широки. Так, в § 7 строится пример двух пространств, свободные топологические группы которых изоморфны, причем одно из этих пространств локально компактно и удовлетворяет второй аксиоме счетности, а другое не локально компактно и не удовлетворяет в одной из точек первой аксиоме счетности.

Глава вторая посвящена изучению свободных топологических групп бикомпактных пространств.

В § 7 дается описание топологии в этих группах.

Оказывается (§ 8), что свободные топологические группы бикомпактных пространств полны в смысле Weil'я ([8]). На основании этого результата доказывается существование полной в смысле Weil'я, но не локально бикомпактной топологизации аддитивной группы целых чисел.

В направлении изучения классов эквивалентных пространств (в смысле изоморфизма свободных топологических групп этих пространств) в работе получены следующие результаты (§§ 9—11):

1. Пространство, эквивалентное бикомпактному пространству, бикомпактно (теорема 7).

2. Пространство, эквивалентное компакту, само есть компакт и притом той же размерности (теоремы 7 и 8).

3. Все классы эквивалентных счетных бикомпактных пространств могут быть описаны, в силу чего проводится полная классификация свободных топологических групп счетных бикомпактных пространств (теорема 9).

В §§ 12 и 13 исследуется вопрос о подгруппах свободной топологической группы.

В § 12 дается необходимое и достаточное условие того, чтобы бикомпактное множество алгебраически независимых элементов в свободной топологической группе алгебраически порождало замкнутую и свободную подгруппу.

Как непосредственное приложение этого критерия мы даем построение для каждого натурального числа n связной абелевой топологической группы, которая алгебраически порождается элементами порядка n. Существование связной топологической группы, все элементы которой имеют порядок 2, было доказано иным методом А. А. Марковым ([5]).

В § 13 строится пример замкнутой подгруппы свободной абелевой топологической группы нульмерного пространства, которая не является свободной.

Пересечение и объединение двух множеств A и B обозначается в работе, соответственно, символами $A \cap B$ и $A \cup B$; пересечение и объ-

единение системы множеств A_i ($i = 1, 3, \ldots$) обозначается, соответственно, символами $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

Разность двух множеств A и B обозначается символом $A \setminus B$. Аналогично, если элемент a содержится во множестве A, через $A \setminus a$ обозначается множество A без элемента a.

Наконец, буквой Λ обозначается пустое множество.

Элементы свободной группы называются иногда в работе *словами* относительно выбранного свободного базиса этой группы.

Понятия «длина слова» и «длина элемента» относительно выбранного свободного базиса в свободной группе имеют тот же смысл, что и в общей теории свободных групп ([3]).

Автор выражает свою глубокую благодарность А. Г. Курошу за руководство данной работой, за постоянное внимание и ценные советы, оказавшие значительную помощь автору.

Глава первая

Общие свойства свободных топологических групп

§ 1. Топологизации групп

Пусть в группе G определены две топологизации: T_1 и T_2. Будем писать $T_1 \leqslant T_2$, если любое открытое множество в топологии T_1 будет открытым множеством в топологии T_2, т. е. тождественное отображение группы G с топологией T_2 на группу G с топологией T_1 непрерывно.

Относительно символа $\leqslant$ топологизации одной и той же группы G образуют частично упорядоченное множество.

Пусть T_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$) — различные топологизации группы G и $\{U_\alpha\}$ — базис окрестностей единицы группы G в топологии T_α ($\alpha \in \mathfrak{M}$). Введем в группу G новую топологию T, взяв в качестве базиса окрестностей единицы систему множеств

$$U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k},$$

где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ пробегают все конечные подмножества из $\mathfrak{M}$, U_α — все окрестности из $\{U_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathfrak{M}$).

Выбранная система удовлетворяет всем пяти аксиомам окрестностей единицы Понтрягина ([6]). В самом деле, справедливость первых двух аксиом очевидна. Далее, если

$$U = U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \cdots \cap U_{\alpha_k}$$

— любая окрестность нашей системы, то найдутся окрестности V_{α_1}, $V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_k}$ в выбранных базисах окрестностей единицы топологий $T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}, \ldots, T_{\alpha_k}$ такие, что

$$V_{\alpha_i} V_{\alpha_i}^{-1} \subseteq U_{\alpha_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Но тогда для $V = V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} \cap \cdots \cap V_{\alpha_k}$ имеем

$$VV^{-1} \subseteq V_{\alpha_1} V_{\alpha_1}^{-1} \cap V_{\alpha_2} V_{\alpha_2}^{-1} \cap \cdots \cap V_{\alpha_k} V_{\alpha_k}^{-1} \subseteq U,$$

чем доказана справедливость третьей аксиомы.

Совершенно аналогично проверяется справедливость двух последних аксиом.

Легко видеть, что $T \geqslant T_\alpha$ $(\alpha \in \mathfrak{M})$ и, если для другой топологизации T' группы G будет $T' \geqslant T_\alpha$ $(\alpha \in \mathfrak{M})$, то $T' \geqslant T$. Поэтому T есть *сумма* топологий T_α в смысле теории частично упорядоченных множеств.

Итак, *любое множество топологизаций одной и той же группы G обладает суммой* (относительно введенной частичной упорядоченности).

§ 2. Определение свободных топологических групп

Пусть X — вполне регулярное пространство. Отметим в нем какую-нибудь точку e. Будем называть *свободной топологической группой пространства X* топологическую группу $F(X)$ со следующими свойствами:

1) X есть подпространство $F(X)$,

2) X топологически порождает $F(X)$,

3) каково бы ни было непрерывное отображение φ пространства X в произвольную топологическую группу G, переводящее точку e пространства X в единицу группы G, существует непрерывный гомоморфизм Φ группы $F(X)$ в G, индуцирующий φ на пространстве X.

Свободной абелевой топологической группой пространства X назовем абелеву топологическую группу $A(X)$ со свойствами 1), 2) и со свойством

3′) каково бы ни было непрерывное отображение φ пространства X в произвольную абелеву топологическую группу G, переводящее точку e пространства X в нулевой элемент группы G, существует непрерывный гомоморфизм Φ группы $A(X)$ в G, индуцирующий φ на пространстве X.

Рассмотрим произвольное вполне регулярное пространство X, выберем в нем точку e и положим $X' = X \setminus e$. Построим дискретную свободную группу $F_{X'}$ со свободным базисом X', взятым как абстрактное множество. Точку e пространства X мы отождествим с единицей группы $F_{X'}$.

Предположим, что в группе $F_{X'}$ можно ввести хотя бы одну топологию, индуцирующую заданную топологию на X. Рассмотрим тогда множество всех таких топологий. Пусть их сумма есть T. Очевидно, T также индуцирует на X заданную топологию.

Покажем, что *группа $F_{X'}$ с топологией T будет свободной топологической группой пространства X.*

Нам нужно проверить лишь свойство 3), так как два первых свойства очевидны.

Пусть G — произвольная топологическая группа и φ — непрерывное отображение пространства X в группу G, причем $\varphi(e)$ есть единица

группы G. Это отображение может быть продолжено до алгебраического гомоморфизма Φ группы $F_{X'}$ в G. Требуется доказать непрерывность этого гомоморфизма, т. е. доказать, что полный прообраз любой окрестности единицы в группе G есть открытое множество в группе $F_{X'}$ с топологией T.

Пусть $\{V\}$ — система всех таких прообразов и $\{U\}$ — базис окрестностей единицы в группе $F_{X'}$.

Система $\{V\}$ удовлетворяет всем аксиомам окрестностей единицы, кроме первой. Следовательно, система множеств $\{U \cap V\}$ удовлетворяет всем пяти аксиомам окрестностей единицы.

Для определяемой этой системой окрестностей топологии T_1 будет $T_1 \geqslant T$. С другой стороны, топология T_1 индуцирует заданную топологию на пространстве X, а потому $T_1 \leqslant T$, т. е. $T_1 = T$, и множества $U \cap V$ открыты в топологии T. Отсюда легко усмотреть, что и множества V открыты в топологии T, что и требовалось доказать.

Итак, *для доказательства существования свободной топологической группы $F(X)$ достаточно показать, что в группе $F_{X'}$ можно ввести по крайней мере одну топологию, индуцирующую заданную топологию на множестве X.*

Подобные рассуждения имеют место и для свободных абелевых топологических групп. Вместо $F_{X'}$ нам нужно рассматривать лишь группу линейных форм $A_{X'}$ со свободным базисом X'.

Для доказательства существования свободной абелевой топологической группы $A(X)$ здесь также нужно лишь показать, что существует по крайней мере одна топология на $A_{X'}$, индуцирующая заданную топологию на множестве X.

§ 3. Теоремы существования и единственности

ТЕОРЕМА 1. *Если X есть вполне регулярное пространство, то группы $F(X)$ и $A(X)$ существуют.*

В обозначениях предыдущего параграфа нам нужно ввести в группе $F_{X'}$ топологию, индуцирующую заданную на пространстве X.

Предположим сперва, что X — метризуемое пространство и ρ_1 — метрика, заданная на X.

Распространим метрику ρ_1 на множество $X \cup X^{-1}$ группы $F_{X'}$: если $x^{-1}, y^{-1} \in X^{-1}$, положим

$$\rho_1(x^{-1}, y^{-1}) = \rho_1(x, y);$$

если $x^{-1} \in X^{-1}$, $y \in X$, положим

$$\rho_1(x^{-1}, y) = \rho_1(x, y^{-1}) = \rho_1(x, e) + \rho_1(e, y).$$

Проверим справедливость аксиомы треугольника:

$$\rho_1(u, v) \leqslant \rho_1(u, w) + \rho_1(w, v)$$

для любых элементов u, v, w из множества $X \cup X^{-1}$. Возможны следующие случаи:

a) $u, v, w \in X$; a′) $u, v, w \in X^{-1}$;
b) $u, v \in X$, $w \in X^{-1}$, b′) $u, v \in X^{-1}$, $w \in X$:
c) $u, w \in X$, $v \in X^{-1}$; c′) $u, w \in X^{-1}$, $v \in X$;
d) $v, w \in X$, $u \in X^{-1}$; d′) $v, w \in X^{-1}$, $u \in X$.

В случае b)

$$\rho_1(u, w) + \rho_1(w, v) = \rho_1(u, e) + \rho_1(e, w^{-1}) + \rho_1(w^{-1}, e) + \rho_1(e, v) \geqslant \geqslant \rho_1(u, e) + \rho_1(e, v) \geqslant \rho_1(u, v);$$

в случае c)

$$\rho_1(u, w) + \rho_1(w, v) = \rho_1(u, w) + \rho_1(w, e) + \rho_1(e, v^{-1}) \geqslant \rho_1(u, e) + + \rho_1(e, v^{-1}) = \rho_1(u, v).$$

Справедливость аксиомы треугольника для остальных случаев проверяется аналогичным образом.

Продолжим теперь метрику ρ_1 пространства $X \cup X^{-1}$ на всю группу $F_{X'}$.

В дальнейшем через x_i, y_i мы будем обозначать элементы из $X \cup X^{-1}$, отличные от e. Пусть x и y — два элемента из $F_{X'}$, причем

$$x = x_1 x_2 \cdots x_m, \quad y = y_1 y_2 \cdots y_n \tag{1}$$

— их несократимые записи в виде слов. Будем рассматривать всевозможные (сократимые) записи элементов x и y в виде слов одинаковой длины с элементами из $X \cup X^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= a_1 a_2 \cdots a_s = A_0 x_1 A_1 x_2 \cdots A_{m-1} x_m A_m, \\ \mathfrak{Y} &= b_1 b_2 \cdots b_s = B_0 y_1 B_1 y_2 \cdots B_{n-1} y_n B_n, \end{aligned} \tag{2}$$

получаемые из (1) вписыванием слов $A_0, A_1, \ldots, A_m$ и $B_0, B_1, \ldots, B_n$, равных e, причем некоторые элементы из числа a_i и b_i сами могут быть равны e.

Положим

$$\varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \sum_{i=1}^{s} \rho_1(a_i, b_i)$$

и определим $\rho(x, y)$ как нижнюю грань чисел $\varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ при всевозможных записях x и y в виде слов одинаковой длины.

Покажем, что *существуют такие две записи* $\mathfrak{X}_1$ *и* $\mathfrak{Y}_1$ *элементов* x *и* y, *которые реализуют* $\rho(x, y)$, *т. е.*

$$\rho(x, y) = \varphi(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1).$$

Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — две записи (2) элементов x и y в виде слов одинаковой длины, выписанные одна под другой. Зафиксировав определенный порядок сокращения элементов, отличных от e, в словах A_i и B_i, будем обозначать каждую сокращающуюся пару через u и u^{-1} (с некоторым индексом). При этом элемент, повторяющийся несколько раз в словах $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$, будет получать различные индексы.

Пусть x_i — элемент из несократимой записи элемента x. Выпишем тогда элемент x_i вместе со стоящим под ним элементом из $\mathfrak{Y}$. Если

под x_i стоит u_1, выпишем u_1^{-1} вместе со стоящим над ним элементом из $\mathfrak{X}$. Если это будет u_2, выпишем u_2^{-1} вместе со стоящим под ним элементом, и т. д. Такое выписывание мы будем продолжать до тех пор, пока не окажется выписанным или элемент e, или один из элементов x_j, или же один из элементов y_j. Если под x_j стоит e или y_j, нам нужно выписать лишь один столбец.

Возможны следующие четыре случая:

$$
\begin{array}{ll}
1. & \left\{\begin{array}{llllll} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \ldots & u_{2n} & u_{2n}^{-1} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \ldots & u_{2n-1}^{-1} & e \end{array}\right. \\
2. & \left\{\begin{array}{llllll} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \ldots & u_{2n-2}^{-1} & e \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \ldots & u_{2n-1} & u_{2n-1}^{-1} \end{array}\right. \\
3. & \left\{\begin{array}{llllll} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \ldots & u_{2n} & u_{2n}^{-1} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \ldots & u_{2n-1}^{-1} & y_j \end{array}\right. \\
4. & \left\{\begin{array}{llllll} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \ldots & u_{2n-2}^{-1} & x_j \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \ldots & u_{2n-1} & u_{2n-1}^{-1} \end{array}\right.
\end{array}
$$

В первом случае

$$
\begin{gathered}
\rho_1(x_i, u_1) + \rho_1(u_1^{-1}, u_2) + \rho_1(u_2^{-1}, u_3) + \ldots + \rho_1(u_{2n-1}^{-1}, u_{2n}) + \rho_1(u_{2n}^{-1}, e) = \\
= \rho_1(x_i, u_1) + \rho_1(u_1, u_2^{-1}) + \rho_1(u_2^{-1}, u_3) + \ldots + \rho_1(u_{2n-1}, u_{2n}^{-1}) + \\
+ \rho_1(u_{2n}^{-1}, e) \geqslant \rho_1(x_i, e).
\end{gathered}
$$

Во втором случае

$$
\begin{gathered}
\rho_1(x_i, u_1) + \rho_1(u_1^{-1}, u_2) + \rho_1(u_2^{-1}, u_3) + \ldots + \rho_1(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + \\
+ \rho_1(u_{2n-1}^{-1}, e) = \rho_1(x_i, u_1) + \rho_1(u_1, u_2^{-1}) + \rho_1(u_2^{-1}, u_3) + \ldots \\
\ldots + \rho_1(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + \rho_1(u_{2n-1}, e) \geqslant \rho_1(x_i, e).
\end{gathered}
$$

В обоих случаях $\varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ может только уменьшиться, если мы все u_i заменим на e.

Аналогично, в третьем и в четвертом случаях получим соответственно:

$$
\begin{gathered}
\rho_1(x_i, u_1) + \rho_1(u_1^{-1}, u_2) + \rho_1(u_2^{-1}, u_3) + \ldots + \rho_1(u_{2n-1}^{-1}, u_{2n}) + \\
+ \rho_1(u_{2n}^{-1}, y_j) \geqslant \rho_1(x_i, y_j), \\
\rho_1(x_i, u_1) + \rho_1(u_1^{-1}, u_2) + \rho_1(u_2^{-1}, u_3) + \ldots + \rho_1(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + \\
+ \rho_1(u_{2n-1}^{-1}, x_j) \geqslant \rho_1(x_i, x_j^{-1}).
\end{gathered}
$$

$\varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ может только уменьшиться, если в третьем случае заменить все u_i с нечетными индексами на y_j, и все u_i с четными индексами — на y_j^{-1}, а в четвертом случае заменить все u_i с нечетными индексами на x_j^{-1} и все u_i с четными индексами — на x_j.

Составим теперь аналогичные строчки из оставшихся еще не выписанными столбцов, начинающиеся со столбцов, содержащих одно из x_i, а после исчерпания всех x_i — начинающиеся со столбцов, содержащих y_j, и произведем в каждой строке описанные замены (в зависимости от

того, каким столбцом данная строка оканчивается). Если после всех таких выписываний у нас останется еще некоторое число невыписанных столбцов, заменим все элементы в этих столбцах на e. В результате мы получим две новые записи $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{Y}_1$ соответственно для элементов x и y, обладающие следующими свойствами:

1) слова $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{Y}_1$ одинаковой длины;

2) в эти слова входят лишь элементы, встречающиеся в несократимых записях элементов x и y, и элемент e;

3) под каждым несократимым элементом x_i стоит или x_i, или e, или x_j^{-1} $(j \neq i)$, или же элемент y_j; над каждым несократимым элементом y_j стоит y_j, e, y_i^{-1} или несократимый элемент x_i;

4) все столбцы, в которые не входит несократимый элемент из x или из y, — нулевые, т. е. имеют наверху и внизу один и тот же элемент; число ненулевых столбцов поэтому не превосходит $m+n$;

5) $\varphi(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1) \leqslant \varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

Легко видеть, что для всех таких записей элементов x и y функция φ может принимать лишь конечное число значений. Если $\varphi_1 = \varphi(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{Y}'_1)$ — минимальное число из этого конечного числа значений, реализуемое записями $\mathfrak{X}'_1$ и $\mathfrak{Y}'_1$, то, в силу свойства 5), для любых записей $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ элементов x и y в виде слов одинаковой длины будет $\varphi_1 \leqslant \varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, а потому

$$\rho(x, y) = \varphi(\mathfrak{X}'_1, \mathfrak{Y}'_1),$$

что и требовалось доказать.

Докажем, что $\rho(x, y)$ *удовлетворяет аксиомам метрики.*

Очевидно, что для любых элементов x и y из $F_{X'}$ будет $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ и из $\rho(x, y) = 0$ следует $x = y$ (ибо тогда слова, реализующие $\rho(x, y)$, должны совпадать). Остается доказать справедливость аксиомы треугольника.

Пусть $x, y, z \in F_{X'}$ и пусть слова $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{Y}_1$ реализуют $\rho(x, y)$, а слова $\mathfrak{Y}_2$ и $\mathfrak{Z}_2$ реализуют $\rho(y, z)$ *. Если $y = \mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{Y}_2 = e$, то

$$\rho(x, z) \leqslant \varphi(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_2) = \varphi(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1) + \varphi(\mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2) = \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Если $y \neq e$ и $y = y_1 y_2 \cdots y_n$ — несократимая запись элемента y, то запишем наши слова в виде:

$$\mathfrak{X}_1 = A_0 a_1 A_1 a_2 \cdots A_{n-1} a_n A_n, \quad \mathfrak{Y}_2 = B'_0 y_1 B'_1 y_2 \cdots B'_{n-1} y_n B'_n,$$
$$\mathfrak{Y}_1 = B_0 y_1 B_1 y_2 \cdots B_{n-1} y_n B_n, \quad \mathfrak{Z}_2 = C_0 c_1 C_1 c_2 \cdots C_{n-1} c_n C_n.$$

Здесь A_i, B_i, B'_i, C_i — некоторые слова, элементы a_i стоят над y и элементы c_i стоят под y_i. Очевидно,

$$B_i = B'_i = e \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

---

* В дальнейшем всюду предполагается, что записи двух элементов, реализующие расстояние между ними, удовлетворяют условиям 1)—4).

Составим тогда слова $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{Z}$, равные соответственно x, y и z:

$$\mathfrak{X} = A_0 B_0' a_1 A_1 B_1' a_2 \cdots A_{n-1} B_{n-1}' a_n A_n B_n,$$
$$\mathfrak{Y} = B_0 B_0' y_1 B_1 B_1' y_2 \cdots B_{n-1} B_{n-1}' y_n B_n B_n',$$
$$\mathfrak{Z} = B_0 C_0 c_1 B_1 C_1 c_2 \cdots B_{n-1} C_{n-1} c_n B_n C_n.$$

Имеем

$$\varphi(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1) = \varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}), \quad \varphi(\mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2) = \varphi(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}).$$

Так как, очевидно,

$$\varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) \leqslant \varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) + \varphi(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) = \rho(x, y) + \rho(y, z),$$

то

$$\rho(x, z) \leqslant \varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z}) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z).$$

Таким образом, ρ есть метрика.

Относительно метрики ρ $F_{X'}$ есть метрическая в смысле van Dantzig'а (²), а следовательно, и топологическая группа. В самом деле, если x и y — произвольные элементы из $F_{X'}$, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — их записи, реализующие $\rho(x, y)$, то

$$\rho(x, y) = \varphi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = \varphi(\mathfrak{X}\mathfrak{Z}, \mathfrak{Y}\mathfrak{Z}) \geqslant \rho(xz, yz),$$

где z — произвольный элемент из $F_{X'}$, а $\mathfrak{Z}$ — какая-нибудь его запись в виде слова. С другой стороны,

$$\rho(xz, yz) \geqslant \rho(xzz^{-1}, yzz^{-1}) = \rho(x, y),$$

а потому $\rho(x, y) = \rho(xz, yz)$ и, аналогично, $\rho(x, y) = \rho(zx, zy)$.

Проверим, наконец, что метрика ρ совпадает на пространстве $X \cup X^{-1}$ с первоначально заданной метрикой ρ_1. Пусть x и y — два элемента из $X \cup X^{-1}$, причем $x \neq e$. Очевидно, что $\rho(x, y) \leqslant \rho_1(x, y)$.

С другой стороны, если слова $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ реализуют $\rho(x, y)$ и записаны одно под другим, то под несократимым элементом x должно стоять y или e, так как случай 4) здесь не может иметь места.

Если под x стоит e и $y \neq e$, то над несократимым элементом y может стоять только e, и тогда

$$\rho(x, y) \geqslant \rho_1(x, e) + \rho_1(e, y) \geqslant \rho_1(x, y).$$

Если же под x стоит y, то тоже $\rho(x, y) \geqslant \rho_1(x, y)$.

Итак, $\rho(x, y) = \rho_1(x, y)$ и *построенная нами топология в $F_{X'}$ индуцирует заданную на множестве X.*

Пусть теперь X — произвольное вполне регулярное пространство и f — произвольная непрерывная функция на X, отображающая X на множество $X_f = X_f' \cup e_f$ числовой прямой, где e_f — образ точки e, а $X_f' = X_f \setminus e_f$.

Пространство X_f метризуемое, а потому, в силу уже доказанного, может рассматриваться как подпространство топологизированной группы $F_{X_f'}$, причем e_f совпадает с единицей этой группы.

Отображение f множества X на множество X_f может быть продолжено до алгебраического гомоморфизма $F_{X'}$ на $F_{X_f'}$.

Пусть $\{U\}$ — базис окрестностей единицы в группе F_{X_f}, а $\{U_{f^{-1}}\}$ — семейство их полных прообразов в группе $F_{X'}$. Это семейство удовлетворяет всем аксиомам окрестностей единицы, кроме первой.

Производя такое же построение для всех непрерывных функций f, какие можно задать на пространстве X, рассмотрим совокупность множеств

$$U_{f_1^{-1}} \cap U_{f_2^{-1}} \cap \ldots \cap U_{f_k^{-1}}$$

где $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ пробегает все конечные системы непрерывных функций на X, а $U_{f_i^{-1}}$ — полные прообразы окрестностей единицы в $F_{X'_{f_i}}$.

Пересечение этих множеств содержит только единицу группы $F_{X'}$. Это следует непосредственно из того факта, что если $a \neq e$ — элемент из $F_{X'}$ и $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из X', через которые он записывается, то, ввиду полной регулярности пространства X, существует непрерывная функция f на X, принимающая в точках $e, x_1, \ldots, x_n$ попарно различные значения, а тогда гомоморфизм группу $F_{X'}$ на группу $F_{X'_f}$ переводит a в отличный от единицы элемент.

Так же как и в § 1, легко усмотреть, что рассматриваемая система удовлетворяет остальным четырем аксиомам окрестностей единицы и определяет, следовательно, некоторую топологию T в группе $F_{X'}$.

Остается показать, что *топология T индуцирует заданную на множестве X*. Если U — открытое множество в группе $F_{X'}$ с топологией T, то $U \cap X$ — открытое множество в пространстве X. В самом деле, если $U = V_{f^{-1}}$ — полный прообраз открытого множества V из $F_{X'_f}$, то $U \cap X$ есть полный прообраз множества $V \cap X_f$ при непрерывном отображении f, а потому множество $U \cap X$ открыто в пространстве X. В общем случае U есть пересечение конечного числа таких $V_{f^{-1}}$ при различных f или сумма таких конечных пересечений.

С другой стороны, если U_1 — открытое множество в пространстве X и $x \in U_1$, то существует непрерывная функция f на X такая, что открытое в X множество U элементов x', для которых $|f(x')| < 1$, содержит x и содержится в U_1.

Множество $f(U)$ открыто в X_f, а потому $f(U) = V \cap X_f$, где V — открытое множество в $F_{X'_f}$. Если $f^{-1}(V)$ — полный прообраз множества V в $F_{X'}$, то $f^{-1}(V)$ открыто в топологии T и, как легко проверить, $U = f^{-1}(V) \cap X$.

Этим доказано, в силу сделанных в § 2 замечаний, существование свободной топологической группы $F(X)$.

Доказательство существования свободной абелевой топологической группы проводится почти дословно так же. Лишь вместо записей (2) элементов в виде слов нужно будет пользоваться записями вида

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_s,$$

где $a_i \in X \cup (-X)$, учитывая возможность перестановки местами элементов a_i. Это заставляет несущественно видоизменить доказательство справедливости аксиомы треугольника для функции $\rho(x, y)$.

Пусть X' — произвольное вполне регулярное пространство.

Рассмотрим вполне регулярное пространство X, полученное присоединением к пространству X' изолированной точки e. Тогда *свободная (свободная абелева) топологическая группа пространства X с зафиксированной точкой e будет свободной (свободной абелевой) топологической группой пространства X' в смысле Маркова и в дальнейшем будет обозначаться через $F_1(X')$ $(A_1(X'))$.*

В самом деле, непрерывное отображение пространства X' группы $F_1(X')$ в произвольную топологическую группу G можно продолжить до непрерывного отображения пространства X, переводящего e в единицу группы G, а последнее — до непрерывного гомоморфизма всей группы $F_1(X')$ в группу G. Этим доказана справедливость условия F_3 Маркова (4) для группы $F_1(X')$ относительно пространства X'.

Справедливость условий F_1 и F_2 Маркова очевидна. Аналогичные соображения имеют место и для группы $A_1(X')$.

ТЕОРЕМА 2. *Если X — вполне регулярное пространство, то группы $F(X)$ и $A(X)$ единственны с точностью до изоморфизмов и не зависят, в частности, от того, какая точка фиксируется в пространстве X.*

Доказательство. Пусть $F_{X'}$ — определенная в § 2 свободная топологическая группа пространства X с зафиксированной в нем точкой e.

Пусть $F' = F(X)$ — другая свободная топологическая группа пространства X с зафиксированной в нем точкой f.

Отображение φ, переводящее каждую точку x пространства X из $F_{X'}$ в точку xe^{-1} из $F(X)$, непрерывно, и образ точки e есть единица группы $F(X)$. Поэтому отображение φ можно продолжить до непрерывного гоморфизма Φ группы $F_{X'}$ в группу $F(X)$.

Аналогично, отображение ψ, переводящее каждую точку x пространства X из $F(X)$ в точку xf^{-1} из $F_{X'}$, непрерывно, и образ точки f есть единица группы $F_{X'}$. Поэтому отображение ψ можно продолжить до непрерывного гомоморфизма Ψ группы $F(X)$ в группу $F_{X'}$.

Для точек $x \in X \subset F_{X'}$ имеем

$$\Psi\Phi(x) = \Psi(xe^{-1}) = \Psi(x)[\Psi(e)]^{-1} = (xf^{-1})(ef^{-1})^{-1} = xe^{-1} = x,$$

ибо e — единица в группе $F_{X'}$. Таким образом, непрерывный гомоморфизм $\Psi\Phi$ группы $F_{X'}$ в себя отображает пространство X тождественно на себя. Следовательно, так как пространство X порождает группу $F_{X'}$, отображение $\Psi\Phi$ есть тождественный автоморфизм группы $F_{X'}$. Но тогда отображение Φ есть изоморфизм группы $F_{X'}$ на группу $F(X)$ и теорема доказана*.

Замечание. В наших обозначениях группа $F(X)$ есть не что иное как $F_{X''}$, где $X'' = X \setminus f$, ибо f, как прообраз единицы при изоморфном отображении Ψ, есть единица в группе $F(X)$. Поэтому, *если*

* Доказательство теоремы для группы $A(X)$ дословно то же.

$F'(X)$ и $F''(X)$ — две свободные топологические группы пространства X с одной и той же зафиксированной точкой, то существует топологический изоморфизм групп $F'(X)$ и $F''(X)$, переводящий все точки из X в себя.

Мы будем говорить в дальнейшем, что пространство X образует *свободный базис* в своей свободной топологической группе $F(X)$.

Те же замечания имеют место и для группы $A(X)$.

§ 4. Некоторые свойства свободных топологических групп

А) *Всякое вполне регулярное пространство X замкнуто в своих топологических группах $F(X)$ и $A(X)$.*

Доказательство. Пусть элемент z группы $F(X)$ содержится в $\overline{X}$ и пусть в несократимую запись элемента z относительно $X\setminus e$ входят элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из $X\setminus e$.

Предположим сперва, что X — метрическое пространство и ρ — метрика, введенная в абстрактной группе $F_{X'}$ в соответствии с доказательством теоремы 1. Тогда $\rho(z, X)=0$, а потому в X существует такая последовательность элементов y_i $(i=1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{i\to\infty} \rho(y_i, z)=0.$$

В записях $\mathfrak{Y}_i$ и $\mathfrak{Z}_i$ элементов y_i и z, реализующих $\rho(y_i, z)$ и выписанных одна под другой, под несократимым элементом y_i может, как легко видеть, стоять лишь или e, или x_j^ε $(j=1, \ldots, n;\ \varepsilon=\pm 1)$. Следовательно, можно выделить подпоследовательность элементов y_{n_i} таких, что в записях $\mathfrak{Y}_{n_i}$ и $\mathfrak{Z}_{n_i}$ под несократимым элементом y_{n_i} стоит один и тот же элемент y^ε, где элемент y равен e или одному из x_j и $\varepsilon=\pm 1$ $(i=1, 2, \ldots)$. Но тогда

$$\rho(y_{n_i}, y) \leqslant \rho(y_{n_i}, z),$$

а потому

$$\rho(y, z) \leqslant \rho(y, y_{n_i}) + \rho(y_{n_i}, z) \leqslant 2\rho(y_{n_i}, z),$$

откуда $\rho(y, z)=0$, т. е. $z=y\in X$. Итак, $\overline{X}=X$.

Если X — неметризуемое пространство, введем непрерывную функцию f на X, принимающую в точках $e, x_1, \ldots, x_n$ попарно различные значения. Тогда при естественном непрерывном гомоморфизме $\tilde{f}$ группы $F(X)$ на группу $F(X_f)$ будет $\tilde{f}(z)\in\overline{X_f}=X_f$, а потому, очевидно, $z\in X$.

Доказательство утверждения А) для группы $A(X)$ дословно то же.

В) *Пусть $X=X'\cup e$ — вполне регулярное пространство. Рассмотрим группы $F(X)=F_{X'}$ и $A(X)=A_{X'}$. Тождественное отображение пространства X из $F(X)$ на пространство X из $A(X)$ можно продол-*

жить до непрерывного гомоморфизма φ группы $F(X)$ на группу $A(X)$. Коммутант K группы $F(X)$, будучи ядром гомоморфизма φ, замкнут в $F(X)$. Покажем, что гомоморфизм φ — открытый и, следовательно,

$$A(X) \cong F(X)/K.$$

В самом деле, образы открытых множеств группы $F(X)$ при гомоморфизме φ удовлетворяют в группе $A(X)$ всем аксиомам открытых множеств топологической группы и, следовательно, определяют в абстрактной группе $A(X)$ некоторую топологию T_1.

Если V — открытое множество в группе $F(X)$, $z \in V$ и если

$$\varphi(z) = x \in X,$$

то

$$\varphi(V) = \varphi(xz^{-1}V) \supseteq \varphi(xz^{-1}V \cap X),$$

причем $\varphi(xz^{-1}V \cap X)$ есть окрестность точки x в пространстве X. Поэтому множество $\varphi(V) \cap X$ открыто в X. Так как, обратно, всякое открытое множество в X может быть так получено, то топология T_1 индуцирует на множестве X заданную топологию. Следовательно, $T_1 \leqslant T$, где T — свободная топология группы $A(X)$, т. е. образы открытых множеств из $F(X)$ при гомоморфизме φ открыты в $A(X)$, что и требовалось доказать.

C) *Пусть $X = X' \cup e$ есть пространство топологической группы G и e — единица этой группы. Тогда тождественное отображение пространства X на группу G может быть продолжено до непрерывного гомоморфизма φ группы $F(X)$ на группу G.*

Покажем, что этот гомоморфизм открыт и, следовательно, группа G есть фактор-группа группы $F(X)$.

В самом деле, пусть U — произвольная окрестность единицы в группе $F(X)$. Тогда $\varphi(U) \supset \varphi(U \cap X)$, причем множество $\varphi(U \cap X)$ — окрестность единицы в группе G. Этим открытость гомоморфизма φ доказана.

Аналогично можно показать, что любая абелева группа есть фактор-группа некоторой свободной абелевой топологической группы.

D) *Если Y есть замкнутое подпространство пространства X, то в группе $F(X)$ подгруппа F_Y и нормальный делитель FN_Y, алгебраически порождаемые множеством Y, замкнуты.*

Доказательство. — 1°. Пусть элемент z группы $F(X)$ не содержится в F_Y. Тогда в несократимую запись элемента z относительно $X \setminus e$ входят элементы $x_1, \ldots, x_n$ из $X \setminus Y$, $n \geqslant 1$ и, может быть, еще элементы $y_1, \ldots, y_m$ из Y.

Предположим сначала, что X — метрическое пространство и ρ — метрика, введенная в абстрактной группе $F(X)$ в соответствии с доказательством теоремы 1.

Пусть $y \in F_Y$ и $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Y}$ — записи соответственно элементов z и y, реализующие $\rho(z, y)$ и выписанные одна под другой. Если в этих записях по крайней мере один столбец, содержащий элемент x_i^{ε} $(i = 1, \ldots, n;$ $\varepsilon = \pm 1)$, ненулевой, то

$$\rho(z, y) \geqslant \min(\rho(x_i, Y \bigcup e), \rho(x_i, x_j), i, j = 1, \ldots, n, i \neq j).$$

Если поэтому в группе F_Y существуют элементы y'_i $(i = 1, 2, \ldots)$ такие, что $\lim\limits_{i \to \infty} \rho(z, y'_i) = 0$, то в записях $\mathfrak{Z}_i$ и $\mathfrak{Y}_i$ элементов z и y'_i, реализующих $\rho(z, y'_i)$, начиная с достаточно большого индекса i, все столбцы, содержащие элементы x_j^{ε}, нулевые.

Если мы теперь в $\mathfrak{Z}_i$ и $\mathfrak{Y}_i$ заменим все элементы x_j^{ε} на e, то получим слова, равные соответственно некоторому $y \in F_Y$ (y не зависит от i) и y_i. При этом $\rho(y, y_i) \leqslant \rho(z, y_i)$, а потому $\lim\limits_{i \to \infty} \rho(y, y_i) = 0$, откуда $z = y \in F_Y$, что невозможно.

Итак, группа F_Y замкнута относительно метрической топологии в группе $F(X)$, а потому и подавно относительно свободной топологии в этой группе.

Пусть, теперь, X — произвольное вполне регулярное пространство. Существует непрерывная на X функция f такая, что значения

$$f(e), \quad f(x_i), \quad f(y_j) \quad (i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, m)$$

различны между собой и, кроме того, во всех точках из $Y \bigcup e$ функция f принимает значения, меньшие единицы, и $f(x_i) > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. В самом деле, существует непрерывная на X функция f_i, равная нулю на множестве $Y \bigcup e$ и в точках x_j $(j \neq i)$ и равная $i + 1$ в точке x_i $(i = 1, \ldots, n)$; существует, далее, непрерывная на X функция φ_j, значения которой не превосходят числа $\frac{1}{m+1}$, равная нулю в e и во всех точках x_i и y_k $(k \neq j)$ и равная $\frac{1}{(m+1)j}$ в точке y_j $(j = 1, \ldots, m)$. Тогда функция

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j$$

будет искомой.

Пусть X_f — образ множества X при отображении f и пусть

$$Y_f = X_f \bigcap (-\infty, 1].$$

Образуем группу $F(X_f)$, фиксируя точку $f(e)$.

По доказанному, подгруппа F_{Y_f} группы $F(X_f)$, алгебраически порождаемая множеством Y_f, замкнута в $F(X_f)$. Образ точки z

при естественном гомоморфизме $\tilde{f}$ группы $F(X)$ на группу $F(X_f)$ не может принадлежать F_{Y_f}, ибо несократимая запись этой точки переходит в несократимую, содержащую элементы, не принадлежащие Y_f. Следовательно, $z \bar{\in} \tilde{f}^{-1}(F_{Y_f})$, а так как $\tilde{f}^{-1}(F_{Y_f})$ есть замкнутое множество в $F(X)$, содержащее F_Y, то $z \bar{\in} \overline{F}_Y$. Замкнутость подгруппы F_Y доказана.

2°. Заметим, что элемент z из $F(X)$ тогда и только тогда принадлежит нормальному делителю FN_Y, если после замены в слове, которым записывается элемент z, всех элементов из Y на e, это слово станет равным e.

Пусть $z \bar{\in} FN_Y$ и в несократимую запись z входят элементы $x_1, \ldots, x_n$ из $X \setminus Y$, $n \geqslant 1$, и, может быть, еще элементы $y_1, \ldots, y_m$ из Y. Предположим сначала, что X — метрическое пространство и ρ — метрика, введенная в абстрактной группе $F(X)$.

Положим

$$k_1 = \min(\rho(x_i, Y \cup e),\ \rho(x_i, x_j),\ i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j).$$

Пусть, далее, $z_1 \neq e$ — элемент, получающийся из z заменой всех элементов y_i, входящих в запись z, на e; пусть, наконец,

$$k = \min(k_1, \rho(z_1, e)).$$

Покажем, что $\rho(z, FN_Y) \geqslant k$ и, следовательно, $z \bar{\in} \overline{FN_Y}$.

Предположим, что существует элемент $y \in FN_Y$ такой, что $\rho(z, y) < k$ и пусть $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Y}$ — записи элементов z и y, реализующие $\rho(z, y)$ и выписанные одна под другой.

Мы скажем, что некоторый элемент из X, входящий в эти записи, принадлежит первому классу, если существует последовательность столбцов, первый из которых содержит данный элемент в степени ± 1, последний — элемент из $Y \cup e$ в степени ± 1, и любые два соседних столбца имеют или общий или взаимно обратные элементы.

Элементы x_i не принадлежат первому классу, ибо в противном случае было бы $\rho(z, y) > k_1$, элементы же из $Y \cup e$ принадлежат все первому классу.

Заменим теперь в записях $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Y}$ все элементы из первого класса на e. Тогда, как легко видеть, $\mathfrak{Z}$ и $\mathfrak{Y}$ перейдут в записи, равные соответственно z_1 и e, ввиду чего будет

$$\rho(z_1 e) \leqslant \rho(z, y) < k,$$

что невозможно.

Итак, в случае метрического пространства X группа FN_Y замкнута относительно метрической топологии в группе $F(X)$, а потому и подавно относительно свободной топологии в этой группе.

Если теперь X — произвольное вполне регулярное пространство, то рассмотрим функцию f, введенную в доказательстве первой части утверждения D). Тогда, в обозначениях того доказательства,

$$\tilde{f}(z) \in \overline{FN_{Y_f}} \subseteq F(X_f),$$

а потому $z \in \tilde{f}^{-1}(\overline{FN_{Y_f}})$.

По доказанному выше, FN_{Y_f} замкнуто в группе $F(X_f)$. Следовательно, $\tilde{f}^{-1}(FN_{Y_f})$ замкнуто в группе $F(X)$ и, так как

$$FN_Y \subset \tilde{f}^{-1}(FN_{Y_f}),$$

то $z \in \overline{FN_Y}$. Замкнутость FN_Y доказана.

D′) *Если Y есть замкнутое подпространство пространства X, то в группе $A(X)$ подгруппа A_Y, алгебраически порождаемая множеством Y, замкнута.*

Доказательство дословно совпадает с доказательством первой части утверждения D).

§ 5. Эквивалентные пространства

Будем говорить, что два пространства X_1 и X_2 *F-эквивалентны*, если $F(X_1) \cong F(X_2)$.

Аналогично, введем понятия F_1-, A- и A_1-эквивалентностей.

Если e_1 и e_2 — изолированные точки пространств X_1 и X_2 и если $X_1' = X_1 \setminus e_1$ и $X_2' = X_2 \setminus e_2$, то, как было уже отмечено в § 3,

$$F(X_1) \cong F_1(X_1'), \quad F(X_2) \cong F_1(X_2')$$

и, аналогично,

$$A(X_1) \cong A_1(X_1'), \quad A(X_2) \cong A_1(X_2').$$

Следовательно, если два пространства, содержащие изолированные точки, F-эквивалентны, то, отбрасывая от этих пространств по одной изолированной точке, мы получим F_1-эквивалентные пространства. Обратно, присоединяя к двум F_1-эквивалентным пространствам по одной изолированной точке, мы получим F-эквивалентные пространства.

Такой же зависимостью связаны A- и A_1-эквивалентные пространства.

Заметим, наконец, что в силу утверждения B) § 4, F-эквивалентные пространства будут всегда A-эквивалентными, а потому также F_1-эквивалентные пространства будут всегда A_1-эквивалентными.

Теперь первую и вторую проблемы, поставленные Марковым [4], можно формулировать так:

Будут ли любые два F_1-эквивалентные (соответственно A_1-эквивалентные) пространства гомеоморфны?

Мы покажем, что *эти проблемы, так же как и аналогичные проблемы для F- и A-эквивалентных пространств, решаются отрицательно.*

Всякое множество Y в группе $F(X)$ мы будем называть *свободным базисом* в этой группе, если $Y = Y' \cup e$, где e — единица группы $F(X)$ и Y' — свободный алгебраический базис этой группы, и если максимальная топология в абстрактной группе $F(X)$, индуцирующая первоначально заданную топологию на множестве Y, совпадает со свободной топологией группы $F(X)$.

Если Y — свободный базис в группе $F(X)$, то, очевидно, $F(X) \cong F(Y)$ и, обратно, если $F(X) \cong F(Y)$, то группа $F(X)$ содержит свободный базис, гомеоморфный пространству Y.

Предположим теперь, что пространство X не связно. Тогда $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 — непересекающиеся замкнутые множества в пространстве X.

Пусть единица e группы $F(X)$ принадлежит подпространству X_1 и f — произвольная точка из X_2.

Рассмотрим в группе $F(X)$ множество $Y = e \cup X_1 f \cup X_2$. Множество $X_1 f \cup X_2$ образует свободный алгебраический базис в группе $F(X)$.

Пусть T — свободная топология в группе $F(X)$ и T_1 — максимальная топология в абстрактной группе $F(X)$, индуцирующая заданную топологию на множестве Y. Тогда $T_1 \geqslant T$.

С другой стороны, топология T_1 будет индуцировать заданную топологию на множестве X_1 и на множестве X_2. Так как, кроме того, множества X_1 и X_2 открыты и замкнуты во множестве X относительно топологии T, а потому и относительно топологии T_1, то топология T_1 будет индуциривать заданную топологию на всем множестве X. Следовательно, $T_1 \leqslant T$, а потому $T_1 = T$, т. е. Y — свободный базис группы $F(X)$.

Ввиду замкнутости множества $X_1 f \cup X_2$ в группе $F(X)$, e есть изолированная точка пространства Y.

Итак, *всякое не связное пространство X F-эквивалентно (а следовательно, и A-эквивалентно) некоторому пространству Y, содержащему, по крайней мере, одну изолированную точку. Поэтому, если пространство X само не содержит изолированных точек, то существует всегда пространство, F-эквивалентное (A-эквивалентное), но не гомеоморфное пространству X.*

Далее,

$$F(X) \cong F_1(X_1 f \cup X_2)$$

и, аналогично,

$$A(X) \cong A_1(X_1 f \cup X_2),$$

т. е. *свободные (свободные абелевы) топологические группы не связных пространств являются свободными (свободными абелевыми) топологическими группами и в смысле Маркова.*

Если, например, пространства X_1 и X_2 гомеоморфны отрезку прямой, то пусть f_1 — граничная, а f_2 — внутренняя точка пространства X_2.

Тогда пространства $X_1 f_1 \cup X_2$ и $X_1 f_2 \cup X_2$ не гомеоморфны, ибо первое из них гомеоморфно отрезку, а второе имеет вид буквы T, но

$$F_1(X_1 f_1 \cup X_2) \cong F_1(X_1 f_2 \cup X_2) \quad \text{и} \quad A_1(X_1 f_1 \cup X_2) \cong A_1(X_1 f_2 \cup X_2).$$

Следовательно, *существуют F_1-эквивалентные (A_1-эквивалентные), но не гомеоморфные пространства.*

В связи с отрицательным решением проблем Маркова возникает задача описания классов эквивалентных пространств, и в первую очередь — нахождения топологических свойств, инвариантных для классов эквивалентных пространств, т. е. таких свойств, выполнимость которых для одного пространства влечет их выполнимость для всех пространств, эквивалентных данному.

§ 6. Связность. Аксиомы счетности

A) *Если пространство X связно, то группы $F(X)$ и $A(X)$ связны, и обратно.*

Доказательство. Пусть X — связное пространство и пусть S — компонента единицы в группе $F(X)$.

Множество S содержит множество X образующих группы $F(X)$, а потому, будучи подгруппой, оно содержит все элементы группы $F(X)$. Следовательно, $S = F(X)$.

Обратно, если пространство X не связно, то, по доказанному в § 5, группа $F(X)$ — свободная топологическая в смысле Маркова, а потому не связна.

Доказательство нашего утверждения для группы $A(X)$ дословно то же.

На основании результатов § 5, заключаем:

Свободная (свободная абелева) топологическая группа является свободной (свободной абелевой) топологической группой в смысле Маркова тогда и только тогда, если эта группа не связная.

B) *Если пространство X распадается на сумму $n+1$ попарно не пересекающихся областей ($n \geqslant 1$), и S — компонента нуля в группе $A(X)$, то ранг абстрактной группы $A(X)/S$ не меньше n.*

Доказательство. Имеем: $X = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_n$, где X_i — попарно не пересекающиеся области и нулевой элемент группы $A(X)$ содержится в X_0. Отображение пространства X в группу линейных форм

$$C_n = \{c_1\} \dot{+} \ldots \dot{+} \{c_n\},$$

переводящее точки из X_0 в нуль, а все точки из X_i — в c_i ($i = 1, \ldots, n$), можно продолжить до непрерывного гомоморфизма группы $A(X)$ на C_n.

Если C — ядро гомоморфизма, то $A(X)/C \cong C_n$. С другой стороны, так как C — открытая подгруппа, имеем $S \subseteq C$, откуда следует утверждение B).

Отметим, что если все $X_i (i = 0, 1, \ldots, n)$ связны, то $S = C$, а потому $A(X)/S$ — дискретная группа линейных форм ранга n. В самом деле, компонента S в этом случае содержит множества $X_i - X_i$ ($i = 0, 1, \ldots, n$), а потому и все элементы подгруппы C, т. е. $S \supseteq C$.

Из утверждений A) и B) вытекает

ТЕОРЕМА 3. *Если пространство X есть сумма n ($n \geqslant 1$) попарно не пересекающихся связных областей, то всякое пространство, A-эквивалентное пространству X, есть также сумма n попарно не пересекающихся связных областей.*

ЛЕММА 6.1. *Если X—вполне регулярное пространство, то множество элементов u_i в группе $A(X)$:*

$$u_1 = 2(x_1 - y_1),\ u_2 = 2^2(x_2 - y_2),\ \ldots,\ u_n = 2^n(x_n - y_n),\ \ldots, \quad (1)$$

где $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ — попарно различные элементы из $X \setminus 0$, не может иметь нулевой элемент группы $A(X)$ своей предельной точкой.

Доказательство. Определим на X индуктивно последовательность непрерывных функций f_i ($i = 1, 2, \ldots$) со следующими свойствами: значения функции f_i не превышают по абсолютной величине $\frac{1}{2^i}$; f_i переводит в нуль точки $0, x_j, y_j$ ($j = 1, \ldots, i-1$) и точку y_i; $f_i(x_i) = \pm \frac{1}{2^i}$, где знак выбирается тот же, что и знак выражения $\sum_{j=1}^{i-1} (f_j(x_i) - f_j(y_i))$. (Для f_1 знак $f_1(x_1)$ выбирается произвольно). Рассмотрим тогда функцию

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots \quad (x \in X).$$

Функция f непрерывна на пространстве X, и при естественном продолжении непрерывного отображения f пространства X до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f}$ группы $A(X)$ в аддитивную группу действительных чисел имеем

$$|\tilde{f}(u_i)| = 2^i \left| \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(x_i) - f_j(y_i)) \right| =$$

$$= 2^i \left| \sum_{j=1}^{i-1} (f_j(x_i) - f_j(y_i)) + f_i(x_i) \right| \geqslant 2^i |f_i(x_i)| = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Так как, с другой стороны, $\tilde{f}(0) = 0$, точка 0 не может быть предельной для множества точек u_i ($i = 1, 2, \ldots$).

C) *Если пространство X не дискретно, в группах $A(X)$ и $F(X)$ не имеет места первая аксиома счетности.*

Доказательство. Так как группа $A(X)$ есть фактор-группа группы $F(X)$, то утверждение достаточно доказать для группы $A(X)$.

В пространстве X существует такая точка x, что любая ее окрестность в X содержит бесконечное множество точек.

Предположим, что в группе $A(X)$ существует счетный базис окрестностей нуля $U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots$

В пространстве X найдутся такие окрестности $V_1, V_2, \ldots V_i, \ldots$ точки x, что

$$2^i(V_i - V_i) \subseteq U_i, \quad (i=1, 2, \ldots).$$

Мы можем выбрать в X систему попарно различных точек x_i, y_i $(i=1, 2, \ldots)$ такую, что $x_i, y_i \in V_i$. Тогда система точек $u_i = 2^i(x_i - y_i)$ имеет нуль предельной точкой, что противоречит доказанной лемме. Утверждение С) доказано.

Покажем теперь, что *локальная компактность и выполнимость аксиом счетности (даже рассмотренные совместно) не являются инвариантными свойствами классов F-эквивалентных, а следовательно, и A-эквивалентных пространств.*

Рассмотрим на плоскости множество X точек x_{ij} с декартовыми координатами i, $\frac{1}{j}$ $(i=0, 1, 2, \ldots; j=1, 2, \ldots)$ вместе с предельными точками $x_i(i, 0)$. Обозначим через X_i множество точек из X с абсциссами, равными i $(i=0, 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$X = X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_i \cup \ldots$$

Рассмотрим в группе $F(X)$, где $x_0 = e$, множество

$$Y = (X_0 \cup X_1 x_1^{-1} \cup \ldots \cup X_i x_i^{-1} \cup \ldots) \cup \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots\}.$$

Множество $Y \setminus e$ образует свободный алгебраический базис группы $F(X)$.

С другой стороны, максимальная топология в абстрактной группе $F(X)$, индуцирующая заданную на Y, индуцирует также первоначально заданную топологию на множествах X_i, а потому и на всем множестве X. Следовательно, в силу тех же соображений, что и в § 5, Y есть свободный топологический базис в группе $F(X)$.

Покажем, что *в точке $e \in Y$ не выполняется первая аксиома счетности.*

Предположим, что в Y существует счетный базис окрестностей точки $e: U_1, U_2, \ldots$ Для каждого i найдется такой индекс j_i, что $x_{ij_i}x_i^{-1} \in U_i$. Определим на X функцию f: пусть $f=0$ в точках x_i и в точках x_{ik} $(k > j_i;\ i=0, 1, 2, \ldots)$ и пусть $f=1$ в остальных точках из X. Функция f непрерывна на X.

Если $\tilde{f}$ — естественное продолжение f до гомоморфизма группы $F(X)$ в аддитивную группу действительных чисел, то

$$\tilde{f}(x_{ij_i}x_i^{-1}) = \tilde{f}(x_{ij_i}) - \tilde{f}(x_i) = 1.$$

Поэтому точка e не может быть предельной для множества точек $x_{ij_i}x_i^{-1}$, что противоречит сделанному предположению.

Покажем теперь, что *точка e не обладает окрестностью в Y с компактным замыканием.*

Пусть U — произвольная окрестность точки e в Y. Для каждого i найдется такой индекс j_i, что $x_{ij_i}x_i^{-1} \in U$. Определим на X непрерыв-

ную функцию f: пусть $f=0$ в точках x_i и в точках x_{ik} $(k>j_i$, $i=0, 1, 2, \ldots)$ и пусть $f(x_{il})=i$ $(l\leqslant j_i;\ i=0, 1, 2, \ldots)$.

Если $\tilde{f}$ — естественное продолжение f до гомоморфизма группы $F(X)$ в аддитивную группу действительных чисел, то

$$\tilde{f}(x_{ij_i}x_i^{-1})=\tilde{f}(x_{ij_i})-\tilde{f}(x_i)=i.$$

Поэтому множество точек $x_{ij_i}x_i^{-1}$ дискретно и замкнуто в Y, а следовательно, множество $\overline{U}$ не компактно.

Глава вторая

Свободные топологические группы бикомпактных пространств

§ 7. Свободная топология в группах

ЛЕММА 7. 1. *Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — произвольные множества в топологической группе G. Тогда естественное отображение f топологического произведения M множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$ на множество $M_1\cdot M_2\cdots M_n$ группы G непрерывно.*

В самом деле, пусть $a_i\in M_i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ и U_a — произвольная окрестность элемента $a=a_1a_2\cdots a_n$ во множестве $M_1\cdot M_2\cdots M_n$.

Существуют такие окрестности V_{a_i} элементов a_i в M_i $(i=1, \ldots, n)$, что $V_{a_1}\cdot V_{a_2}\cdots V_{a_n}\subseteq U_a$. Но тогда отображение f переводит окрестность $(V_{a_1}, V_{a_2}, \ldots, V_{a_n})$ элемента $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из M внутрь U_a, что и доказывает непрерывность отображения f.

Так как топологическое произведение бикомпактных пространств бикомпактно и непрерывный образ бикомпактного пространства есть бикомпактное пространство, то *произведение конечного числа бикомпактных множеств в топологической группе G бикомпактно и, следовательно, замкнуто в G.*

Пусть X — произвольное бикомпактное пространство. Рассмотрим группу $F(X)$. Обозначим через $F_n=F_n(X)$ множество элементов группы $F(X)$ длины не большей чем n относительно базиса $X\setminus e$. В частности,

$$F_0=\{e\},\quad F_1=X\cup X^{-1}.$$

Так как каждое множество F_n есть произведение n бикомпактных множеств $X\cup X^{-1}$, то *все множества F_n бикомпактны.*

Легко видеть также, что *любая топология в абстрактной группе $F(X)$, индуцирующая заданную топологию на X, определяет одну и ту же топологию на F_n $(n=1, 2, \ldots)$.*

Следующая теорема дает полное описание топологии в группе $F(X)$.

ТЕОРЕМА 4. *Если X — бикомпактное пространство, то множество V в группе $F(X)$ открыто тогда и только тогда, если все множества $V_n=V\cap F_n$ открыты в F_n $(n=1, 2, \ldots)$.*

Доказательство. Если V — произвольное открытое множество

в группе $F(X)$, то множества $V_n = V \cap F_n$ открыты в F_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Требуется показать, что справедливо и обратное утверждение.

Рассмотрим совокупность всех множеств V в группе $F(X)$ таких, что множества $V_n = V \cap F_n$ открыты в F_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Покажем, что для этой системы множеств V справедливы аксиомы открытых множеств в топологической группе.

Прежде всего, для системы $\{V\}$ справедливы аксиомы окрестностей топологического пространства:

1) для любых двух элементов a и b из $F(X)$ найдется множество V системы такое, что $a \in V$, но $b \bar{\in} V$;

2) для всяких двух множеств V_1 и V_2 системы, содержащих элемент a из $F(X)$, $V_1 \cap V_2$ также принадлежит системе.

Пусть теперь V — произвольное множество системы, a и b — два элемента из $F(X)$ длины, не превышающей некоторого целого числа k, и пусть $ab^{-1} \in V$. Покажем, что в системе $\{V\}$ найдутся такие два множества $U(a)$ и $U(b)$, что

$$a \in U(a), \quad b \in U(b), \quad U(a) \cdot U(b)^{-1} \subseteq V.$$

Множество V_{2k} открыто в F_{2k}, следовательно, $V_{2k} = V' \cap F_{2k}$, где V' — открытое множество в $F(X)$. Существуют поэтому такие окрестности U_a и U_b элементов a и b, что $\overline{U}_a \cdot \overline{U}_b^{-1} \subseteq V'$. Положим теперь

$$U_k(a) = U_a \cap F_k \quad \text{и} \quad U_k(b) = U_b \cap F_k.$$

Множества $U_k(a)$ и $U_k(b)$ открыты в F_k, содержат соответственно элементы a и b и, очевидно,

$$\overline{U_k(a)} \cdot \overline{U_k(b)}^{-1} \subseteq V_{2k}.$$

Будем теперь последовательно строить множества $U_i(a)$ и $U_i(b)$ $(i = k, k+1, \ldots)$ со следующими свойствами:

a) $a \in U_i(a), \quad b \in U_i(b)$;

b) $U_i(a), U_i(b) \subseteq F_i$ и открыты в F_i;

c) $U_j(a) \subseteq U_i(a), \quad U_j(b) \subseteq U_i(b)$ при $j \leqslant i$;

d) $\overline{U_i(a)} \cdot \overline{U_i(b)}^{-1} \subseteq V_{2i}$.

Пусть уже построены множества $U_i(a)$ и $U_i(b)$ с индексами $i = k, k+1, \ldots, n$, удовлетворяющие условиям a), b), c), d). Построим множества $U_{n+1}(a)$ и $U_{n+1}(b)$. Рассмотрим множество

$$\Phi = \overline{U_n(a)}^{-1} (F_{2n+2} \setminus V_{2n+2}) \overline{U_n(b)}.$$

Оно бикомпактно и не содержит e (если $V_{2n+2} = F_{2n+2}$, то мы считаем Φ пустым множеством): если бы было $e = u_n^{-1} v u_n'$, где

$$u_n \in \overline{U_n(a)}, \quad v \in F_{2n+2} \setminus V_{2n+2}, \quad u_n' \in \overline{U_n(b)},$$

то

$$v = u_n u_n'^{-1} \in V_{2n} \subseteq V_{2n+2},$$

что невозможно. Существует поэтому окрестность единицы U_e в группе $F(X)$ такая, что

$$\overline{U}_e \cdot \overline{U}_e^{-1} \subseteq F(X) \setminus \Phi.$$

Рассмотрим множества

$$U_{n+1}(a)=(U_n(a)\cdot U_e)\bigcap F_{n+1} \quad \text{и} \quad U_{n+1}(b)=(U_n(b)\cdot U_e)\bigcap F_{n+1}.$$

Эти множества удовлетворяют условиям a), b), c). Покажем, что они удовлетворяют также условию d).

Так как

$$U_{n+1}(a)\subseteq U_n(a)\cdot(U_e\bigcap F_{2n+1}),$$

то

$$\overline{U_{n+1}(a)}\subseteq\overline{U_n(a)}\cdot(\overline{U_e\bigcap F_{2n+1}})\subseteq\overline{U_n(a)}\cdot\overline{U}_e$$

и, аналогично,

$$\overline{U_{n+1}(b)}\subseteq\overline{U_n(b)}\cdot\overline{U}_e,$$

а потому

$$\overline{U_{n+1}(a)}\cdot\overline{U_{n+1}(b)}^{-1}\subseteq\overline{U_n(a)}\cdot\overline{U}_e\cdot\overline{U}_e^{-1}\,\overline{U_n(b)}^{-1}\subseteq\overline{U_n(a)}(F(X)\diagdown\Phi)\cdot\overline{U_n(b)}^{-1}$$

и, кроме того,

$$\overline{U_{n+1}(a)}\cdot\overline{U_{n+1}(b)}^{-1}\subseteq F_{2n+2}.$$

Если бы существовал элемент

$$x\in(\overline{U_{n+1}(a)}\cdot\overline{U_{n+1}(b)}^{-1})\bigcap(F_{2n+2}\diagdown V_{2n+2}),$$

то $x=u_n y u_n'^{-1}$, где

$$u_n\in\overline{U_n(a)},\quad y\in F(X)\diagdown\Phi,\quad u_n'\in U_n(b).$$

Но тогда $y=u_n^{-1}xu_n'\in\Phi$, что невозможно. Следовательно,

$$\overline{U_{n+1}(a)}\cdot\overline{U_{n+1}(b)}^{-1}\subseteq V_{2n+2}$$

и выполнимость условия d) для множеств $U_{n+1}(a)$ и $U_{n+1}(b)$ доказана.

Образуем теперь множества

$$U(a)=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i(a) \quad \text{и} \quad U(b)=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i(b).$$

Легко видеть, что множества $U(a)$ и $U(b)$ принадлежат системе $\{V\}$ и что

$$U(a)\cdot U(b)^{-1}\subseteq V.$$

Таким образом, система множеств $\{V\}$ определяет некоторую топологизацию абстрактной группы $F(X)$, при которой множества V открыты. Так как эта топологизация индуцирует во множествах F_i и, в частности, во множестве $F_1=X\bigcup X^{-1}$ первоначальную топологию, то она совпадает со свободной топологией группы $F(X)$. Следовательно, множества системы $\{V\}$ открыты в группе $F(X)$, и теорема доказана.

Обозначим через $A_n=A_n(X)$ множество элементов группы $A(X)$ длины не большей чем n относительно базиса $X\diagdown 0$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Если X — бикомпактное пространство, то множества A_n бикомпактны и любая топология в абстрактной группе $A(X)$, индуцирующая заданную топологию на X, определяет одну и ту же топологию на A_n $(n=1, 2, \ldots)$.

Далее, имеет место

ТЕОРЕМА 4′. *Если X — бикомпактное пространство, то множество V в группе $A(X)$ открыто тогда и только тогда, если все множества $V_n = V \cap A_n$ открыты в A_n $(n = 1, 2, \ldots)$.*

Доказательство этой теоремы проводится дословно так же, как и доказательство теоремы 4.

Из теорем 4 и 4′ вытекает

Следствие. *Если X — бикомпактное пространство, то множество $P \subseteq F(X)$ замкнуто в $F(X)$ тогда и только тогда, если множества $P_n = P \cap F_n$ замкнуты в F_n $(n = 1, 2, \ldots)$; аналогично, множество $P' \subseteq A(X)$ замкнуто в $A(X)$ тогда и только тогда, если множества $P'_n = P' \cap A_n$ замкнуты в A_n $(n = 1, 2, \ldots)$.*

ТЕОРЕМА 5. *Если X — бикомпактное пространство, то группы $F(X)$ и $A(X)$ нормальны.*

Доказательство. Пусть P и Q — замкнутые множества в группе $F(X)$ без общих точек. Положим

$$P_i = P \cap F_i, \quad Q_i = Q \cap F_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Пространства F_i, будучи бикомпактными, нормальны. Поэтому в пространстве F_1 найдутся открытые множества U_1 и V_1 такие, что

$$P_1 \subseteq U_1, \quad Q_1 \subseteq V_1 \text{ и } \overline{U}_1 \cap \overline{V} = \Lambda.$$

Пусть уже построены множества U_i, V_i $(i = 1, \ldots, n)$ такие, что

1. $U_i, V_i \subseteq F_i$, открыты в F_i и $\overline{U}_i \cap \overline{V}_i = \Lambda$;
2. $U_j \subseteq U_i$, $V_j \subseteq V_i$ при $j \leqslant i$;
3. $P_i \subseteq U_i$, $Q_i \subseteq V_i$.

Множества $\overline{U}_n \cup P_{n+1}$ и $\overline{V}_n \cup Q_{n+1}$ замкнуты в F_{n+1} и не имеют общих точек. В качестве U_{n+1} и V_{n+1} возьмем тогда открытые множества в F_{n+1} такие, что

$$(\overline{U}_n \cup P_{n+1}) \subseteq U_{n+1}, \quad (\overline{V}_n \cup Q_{n+1}) \subseteq V_{n+1}, \quad \overline{U}_{n+1} \cap \overline{V}_{n+1} = \Lambda.$$

Положим теперь

$$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, \quad V = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i.$$

По теореме 4, множества U и V открыты. Кроме того, $P \subseteq U$, $Q \subseteq V$ и $U \cap V = \Lambda$. Теорема доказана для $F(X)$. Нормальность группы $A(X)$ доказывается дословно так же.

§ 8. Полнота свободных топологических групп

Топологическая группа *полна* в смысле Weil'я ([8]), если любая сходящаяся* центрированная система замкнутых множеств в группе имеет непустое пересечение.

---

* Система множеств $\{\Phi_\alpha\}$ в топологической группе называется *сходящейся*, если для любой окрестности единицы U найдутся элемент x группы и множество Φ_α системы такие, что $\Phi_\alpha \subseteq xU$.

ТЕОРЕМА 6. *Если X — бикомпактное пространство, то группы $F(X)$ и $A(X)$ полны в смысле Weil'я.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого бикомпактного пространства X группа $F(X)$ не полная. Тогда в этой группе существует сходящаяся центрированная система замкнутых множеств $\{\Phi_\alpha\}$, пересечение которых пусто. Мы можем предположить, что пересечение любого конечного числа множеств системы само принадлежит этой системе.

Если F_n — множество элементов группы $F(X)$ длины не большей чем n относительно $X \setminus e$, то система множеств $\{F_n \cap \Phi_\alpha\}$ не может быть центрированной ни для одного значения n: в противном случае, ввиду бикомпактности множества F_n, эта система имела бы не пустое пересечение. Следовательно, для некоторого индекса α_n будет

$$F_{n-1} \cap \Phi_{\alpha_n} = \Lambda \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Будем строить последовательность множеств U_i $(i = 1, 2, \ldots)$ в группе $F(X)$, обладающих следующими свойствами:

a) множество U_i содержит единицу группы $F(X)$;

b) $U_i \subseteq F_i$ и U_i открыто в F_i;

c) $U_j \subseteq U_i$ при $j \leqslant i$;

d) $F_j \cdot \overline{U}_i \cap \Phi_{\alpha_{2j}} = \Lambda$ при $j \leqslant i$.

Заметим, что если M и N — два замкнутых множества в топологической группе G, причем множество M бикомпактно и $M \cap N = \Lambda$, то найдется такая окрестность единицы U в группе G, что

$$M \cdot U \cap N = \Lambda.$$

В самом деле, для каждого элемента m из M найдется такая окрестность единицы $U(m)$ в G, что

$$m \cdot U^2(m) \cap N = \Lambda.$$

Так как множество M бикомпактно и

$$M \subseteq \bigcup_{m \in M} m \cdot U(m),$$

то

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} m_i \cdot U(m_i),$$

где $m_1, \ldots, m_n$ — некоторая конечная система элементов из M.

Достаточно тогда положить $U = \bigcap_{i=1}^{n} U(m_i)$.

Ввиду сделанного замечания и регулярности группового пространства, найдется такая окрестность единицы $U^{(1)}$, что

$$F_1 \cdot \overline{U^{(1)}} \cap \Phi_{\alpha_2} = \Lambda.$$

Положим тогда $U_1 = U^{(1)} \cap F_1$. Очевидно, условия a), b), c) и d) выполняются для множества U_1.

Пусть уже построены множества $U_1, \ldots, U_n$, удовлетворяющие условиям a), b), c) и d). Построим множество U_{n+1}.

В силу условия d), имеем

$$F_i \cdot \overline{U}_n \cap \Phi_{\alpha_{2i}} = \Lambda \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

далее, очевидно, что

$$F_{n+1} \cdot \overline{U}_n \cap \Phi_{\alpha_{2(n+1)}} = \Lambda.$$

Найдется поэтому, ввиду бикомпактности множеств $F_i \cdot \overline{U}_n$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$, такая окрестность V единицы в группе $F(X)$, что

$$F_i \cdot \overline{U}_n \cdot V^2 \cap \Phi_{\alpha_{2i}} = \Lambda \text{ при } i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Положим тогда

$$U_{n+1} = U_n \cdot V \cap F_{n+1}.$$

Так как

$$\overline{U}_{n+1} \subseteq U_{n+1} \cdot V \subseteq U_n \cdot V^2,$$

то множество U_{n+1} удовлетворяет условию d); выполнимость условий a), b) и c) для U_{n+1} очевидна.

Образуем теперь множество $U = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} U_i$. По теореме 4, это множество открыто в группе $F(X)$ и, в силу условия d), имеем

$$F_j \cdot U \cap \Phi_{\alpha_{2j}} = \Lambda \quad (j = 1, 2, \ldots).$$

Ввиду сходимости системы множеств $\{\Phi_\alpha\}$, найдутся множество Φ_α системы и элемент x группы $F(X)$ такие, что $\Phi_\alpha \subset xU$.

Если n — длина элемента x относительно базиса $X \setminus e$ группы $F(X)$, то $x \in F_n$, а потому

$$xU \cap \Phi_{\alpha_{2n}} = \Lambda$$

и, следовательно,

$$\Phi_\alpha \cap \Phi_{\alpha_{2n}} = \Lambda,$$

что невозможно.

Итак, наше предположение о том, что система множеств $\{\Phi_\alpha\}$ имеет пустое пересечение, неверно. Тем самым, для групп $F(X)$ теорема доказана.

Доказательство теоремы для групп $A(X)$ дословно то же.

На основании теоремы 6, мы покажем теперь, что *существуют полные в смысле Weil'я, но не локально бикомпактные топологизации аддитивной группы целых чисел.*

Рассмотрим для этого произвольное счетное бикомпактное множество

$$X = \{x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

и образуем группу $A(X)$, фиксируя во множестве X точку x. Положив $a_n = n!$ $(n = 2, 3, \ldots)$, рассмотрим подгруппу D группы $A(X)$, алгебраически порождаемую элементами множества

$$Y = \{y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots\},$$

где

$$y_n = a_n x_1 - x_n \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Покажем, что *подгруппа D дискретна и замкнута в группе* $A(X)$.

В самом деле, если длина элемента $d \in D$ относительно базиса $X \setminus x$ группы $A(X)$ не превосходит числа n и

$$d = m_1 y_{i_1} + m_2 y_{i_2} + \ldots + m_r y_{i_r}$$

— несократимая запись элемента d относительно базиса Y группы D, где $m_1, m_2, \ldots, m_r$ — целочисленные коэффициенты и $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$, то

$$d = (m_1 a_{i_1} + \ldots + m_r a_{i_r}) x_1 - m_1 x_{i_1} - \ldots - m_r x_{i_r},$$

откуда заключаем:

$$r \leqslant n, \quad |m_1| + \ldots + |m_r| \leqslant n \text{ и } |m_1 a_{i_1} + \ldots + m_r a_{i_r}| \leqslant n.$$

Но тогда

$$a_{i_r} \leqslant |m_r a_{i_r}| \leqslant |m_1 a_{i_1} + \ldots + m_{r-1} a_{i_{r-1}}| + n \leqslant (|m_1| + \ldots + |m_{r-1}|)\, a_{i_{r-1}} + n,$$

а потому

$$a_{i_r} \leqslant n(a_{i_{r-1}} + 1), \quad \frac{a_{i_r}}{a_{i_{r-1}} + 1} \leqslant n,$$

откуда $i_r \leqslant n + 1$.

Следовательно, множества $D \cap A_n$ конечны при $n = 1, 2, \ldots$, а потому, в силу теоремы 4′, подгруппа D дискретна и замкнута в группе $A(X)$.

Рассмотрим теперь фактор-группу $A(X)/D$. Как абстрактная группа, она изоморфна аддитивной группе целых чисел.

С другой стороны, эта группа, будучи локально изоморфной полной и не локально бикомпактной группе $A(X)$, сама полна и не локально бикомпактна.

Отметим также, что определенная нами группа $A(X)/D$, как и исходная группа $A(X)$, не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Далее, так как всякая полная группа замкнута в любой содержащей ее топологической группе, то группа $A(X)/D$ не может быть погружена в локально-бикомпактную группу.

§ 9. Свободные базисы

ЛЕММА 9.1. *Если X — нормальное, но не компактное* пространство, то группа $F(X)$ (группа $A(X)$) не может содержать компактного множества Y, которое являлось бы алгебраической системой образующих в этой группе.*

Доказательство. Пусть Y — произвольное множество образующих в группе $F(X)$. В пространстве X найдется последовательность точек $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, отличных от e, не имеющая предельной.

* Компактность пространства понимается здесь в том смысле, что всякое подмножество счетной мощности обладает предельной точкой.

Пусть y_i — такой элемент из Y, что суммарная степень, с которой входит в запись y_i, как слова относительно $X\setminus e$, элемент x_i, отлична от нуля ($i=1, 2, \ldots$), Такой элемент всегда найдется, ибо Y есть система образующих в группе $F(X)$.

Пусть в запись элемента y_i, кроме x_i, входят элементы $t_{i1}, t_{i2}, \ldots, t_{in_i}$ из $X\setminus e$.

Мы можем, как легко проверить, выбрать такую подпоследовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{kn}, \ldots$, что в запись каждого элемента y_{k_i}, как слова относительно $X\setminus e$, не входят элементы x_{k_j} при $j>i$.

Не нарушая общности, можно предположить, что этим свойством обладает сама последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Выберем окрестности U_i точек x_i в X так, чтобы было

$$e\bar{\in}\overline{U}_i \text{ и } \overline{U}_i\cap\overline{U}_j=\Lambda \quad (i, j=1, 2, \ldots;\ i\neq j).$$

Положим

$$\Phi=\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i}\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i.$$

Множество Φ замкнуто в пространстве X и не содержит точек x_i. Так как множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ замкнуто, то, ввиду нормальности пространства X, существуют непересекающиеся открытые множества U и W в X такие, что $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}\subseteq U$ и $\Phi\subseteq W$.

Выберем теперь такие окрестности V_i точек x_i, что $\overline{V}_i\subseteq U_i\cap U$. Покажем, что для любой подпоследовательности $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$ индексов будет

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{ni}}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{V}_{n_i}.$$

В самом деле,

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{n_i}}\supseteq\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{n_i}.$$

С другой стороны, если $x\in\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}V_{n_i}}$, то $x\in\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i}$, но $x\bar{\in}\Phi$, а потому $x\in\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$. Следовательно, как легко видеть, $x\in U_{n_k}$ для некоторого k.

Так как открытое множество $U_{n_k}\setminus V_{n_k}$ не пересекается с $\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{n\,i}$, то $x\bar{\in}U_{n_k}\setminus V_{n_k}$, а потому $x\in\overline{V}_{n_k}$, откуда заключаем, что

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} V_{n_i}}\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{V}_{n_i}.$$

Построим теперь непрерывную функцию f на X следующим образом. Положим f равной нулю на множестве $X\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i=\Phi_0$. В частно-

сти, функция f равна нулю на множествах $\overline{V}_i \setminus V_i = \Phi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. На множестве $\overline{V}_1$ можно определить непрерывную функцию, равную нулю на Φ_1 и в тех точках из t_{1i}, которые принадлежат $\overline{V}_1$, и равную единице в точке x_1. Это продолжение функции f внутрь $\overline{V}_1$ также обозначим через f.

Если функция f уже продолжена внутрь $\overline{V}_1, \ldots, \overline{V}_{n-1}$, то в качестве ее продолжения внутрь $\overline{V}_n$ берем непрерывную функцию, равную нулю на Φ_n и в тех точках t_{ij}, $i \leqslant n$, которые принадлежат $\overline{V}_n$, и равную

$$f_n = n + \sum_j |b_{nj} f(t_{nj})|$$

в точке x_n. Здесь b_{nj} — суммарная степень, с которой в запись элемента y_n входит элемент t_{nj}, и сумма распространена по всем тем индексам j, при которых $t_{nj} \in \Phi_0 \cup \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_{n-1}$.

Определенная так на всем пространстве X функция f непрерывна. В самом деле, любая точка $x \in X$ содержится или в открытом множестве

$$X \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i = X \setminus \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i},$$

или в в одном из V_i, или, наконец, если $x \in \Phi_i$, внутри открытого множества

$$X \setminus \bigcup_{j \neq i} \overline{V}_j = X \setminus \overline{\bigcup_{j \neq i} V_j}.$$

Но в каждом таком открытом множестве функция f непрерывна.

Мы можем теперь продолжить непрерывное отображение f пространства X до непрерывного гомоморфизма $\tilde{f}$ группы $F(X)$ в аддитивную группу действительных чисел. Из свойств последовательности слов y_i и функции f заключаем, что

$$|\tilde{f}(y_n)| \geqslant n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, множество элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ не может иметь предельной точки в пространстве группы $F(X)$, а потому множество Y не компактно, что и требовалось доказать.

Доказательство леммы для группы $A(X)$ проводится дословно так же.

ТЕОРЕМА 7. *Пространство, F-эквивалентное (A-эквивалентное) бикомпактному, бикомпактно; пространство F-эквивалентное (A-эквивалентное) компакту (т. е. бикомпактному пространству со второй аксиомой счетности), есть компакт.*

Если X и Y — два бикомпактных свободных базиса в свободной (свободной абелевой) топологической группе, то элементы одного из них записываются в виде слов относительно другого ограниченной в совокупности длины.

Доказательство. Пусть X — бикомпактное пространство. По теореме 5, группа $F(X)$ нормальна.

Пусть Y — произвольный свободный базис в группе $F(X)$. Мы можем считать, что $F(X) = F(Y)$.

Множество Y, будучи замкнутым в группе $F(X)$, нормально. Так как множество X компактно, то в силу леммы 9.1, множество Y должно быть компактным. Если бы множество Y содержало систему слов относительно $X \setminus e$

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots,$$

неограниченно возрастающей длины, то последняя, в силу теоремы 4, была бы дискретным и замкнутым множеством в группе $F(X)$, что противоречило бы компактности пространства Y.

Итак, все элементы из Y — слова ограниченной в совокупности длины относительно X. Поэтому $Y \subseteq F_n(X)$ для достаточно большого индекса n.

Как замкнутое подпространство бикомпактного пространства $F_n(X)$, пространство Y — бикомпактно.

Наконец, если пространство X есть компакт, то для любого индекса n пространство $F_n(X)$, будучи, в силу леммы 7.1, непрерывным образом компакта, само есть компакт. Поэтому пространство Y, содержащееся в некотором $F_n(X)$, есть компакт.

Те же рассуждения имеют место и для группы $A(X)$.

Примечание. Л. С. Понтрягин указал автору на следующую связь между эквивалентными бикомпактными пространствами. Пусть X и Y — два таких бикомпактных пространства, что их свободные топологические в смысле Маркова группы совпадают, $F_1(X) = F_1(Y)$, и пусть G — произвольная топологическая группа. Любое непрерывное отображение пространства X (пространства Y) в пространство группы G может быть однозначно продолжено до непрерывного гомоморфизма всей группы $F_1(X) = F_1(Y)$ в группу G.

В силу этого, *между непрерывными отображениями пространства X и пространства Y в группу G можно установить взаимно однозначное соответствие. Это соответствие таково, что при непрерывной деформации отображения пространства X соответствующее отображение пространства Y также испытывает непрерывную деформацию и наоборот.*

Подобное обстоятельство не имеет места, если, например, пространства X и Y гомеоморфны соответственно отрезку и окружности, а G — группа вращений окружности, пространство которой гомеоморфно окружности. Следовательно, отрезок и окружность не F_1-эквивалентны. Отсюда вытекает, что эти пространства также не F-эквивалентны.

§ 10. Размерности свободных базисов

ТЕОРЕМА 8. *Если X — компакт и Y — произвольный свободный базис в $A(X)$, то размерности пространств X и Y совпадают:*

$$\dim X = \dim Y.$$

Доказательство. Пространство X метризуемо. Пусть ρ_1 — какая-нибудь метрика в пространстве X и ρ_X — ее продолжение на всю абстрактную группу $A(X)$, описанное в доказательстве теоремы 1. Как было отмечено выше (§ 7), метрика ρ_X должна индуцировать в каждом множестве $A_i(X)$ слов длины, не большей чем i, относительно $X \setminus 0$ первоначально заданную топологию.

Наряду с метрикой ρ_X рассмотрим аналогично построенную метрику ρ_Y.

Пусть $\dim X \geqslant n$. Рассмотрим множество $\mathfrak{N}_n(X)$ точек x из X, для которых $\dim_x X \geqslant n$. Если $x \in \mathfrak{N}_n(X)$, то [см. ([1])]

$$\dim_x \overline{\mathfrak{N}_n(X)} = \dim_x X \geqslant n.$$

Следовательно, замкнутое в X подпространство $X' = \overline{\mathfrak{N}_n}(X)$ содержит всюду плотное множество точек x, для которых $\dim_x X' \geqslant n$.

В силу теоремы 7, элементы из Y записываются как слова ограниченной в совокупности длины относительно $X \setminus 0$, и элементы из X записываются как слова ограниченной в совокупности длины относительно $Y \setminus 0$.

В дальнейшем число различных элементов из X, входящих в несократимую запись элемента $a \in A(X)$ относительно $X \setminus 0$, будем называть *размерностью* этого элемента относительно X.

Пусть $x \in X'$ есть элемент наибольшей длины в X' относительно $Y \setminus 0$, а среди элементов наибольшей длины в X' имеет наибольшую размерность. Пусть

$$x = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_k y_k, \quad y_i \in Y \setminus 0,$$

— несократимая запись элемента x относительно базиса $Y \setminus 0$. Тогда найдется такое число ε, что

$$\min (\rho_Y(y_i, y_j),\ \rho_Y(y_i, 0);\quad i, j = 1, \ldots, k;\ i \neq j) > 3\varepsilon.$$

Рассмотрим в пространстве X' окрестность $U_\varepsilon^Y(x)$ * элемента x.

Если $x_1 \in U_\varepsilon^Y(x)$ и если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{X}_1$ — записи элементов x и x_1 относительно $Y \setminus 0$, реализующие $\rho_Y(x, x_1)$ и выписанные одна под другой, то при составлении, как и в доказательстве теоремы 1, последовательностей столбцов из элементов этих записей, может, очевидно, иметь место лишь случай 3 (стр. 285). Ввиду этого, множество $U_\varepsilon^Y(x)$ содержит лишь такие элементы из X', в несократимую запись которых относительно $Y \setminus 0$ входят по крайней мере $|a_i|$ элементов из ε-окрестности $U_\varepsilon^Y(y_i)$ элемента y_i в Y и притом с тем же знаком, с каким y_i входит в запись элемента x ($i = 1, \ldots, k$). Так как последние окрестности не пересекаются, то, ввиду специального выбора элемента x, мы заключаем, что

$$U_\varepsilon^Y(x) \subseteq a_1 \cdot U_\varepsilon^Y(y_1) + a_2 \cdot U_\varepsilon^Y(y_2) + \ldots + a_k \cdot U_\varepsilon^Y(y_k).\ **$$

---

* Через U_ε^X мы обозначаем ε-окрестности относительно метрики ρ_X, через U_ε^Y — ε-окрестности относительно метрики ρ_Y.

** В этом параграфе через $a \cdot M$ (a — целое число, M — подмножество в группе $A(X)$) мы обозначаем совокупность элементов am, $m \in M$.

Если $x_1 \in U_\varepsilon^Y(x)$, то обозначим через $f_i(x_1)$ тот элемент из $Y \setminus 0$ в записи элемента x_1 относительно $Y \setminus 0$, который содержится в $U_\varepsilon^Y(y_i)$.

Из свойств метрики ρ_Y и специального выбора числа ε легко усмотреть, что для любых двух элементов x_1 и x_2 из $U_\varepsilon^Y(x)$

$$\rho_Y(f_i(x_1), f_i(x_2)) \leqslant \rho_Y(x_1, x_2) \quad (i = 1, \ldots, k), \tag{*}$$

а потому отображения f_i непрерывны.

Рассмотрим теперь такие элементы x' в $U_\varepsilon^Y(x)$, для которых элементы $f_1(x')$ имеют максимальную длину относительно $X \setminus 0$, а среди последних выберем элемент x_1', для которого $f_1(x_1')$ имеет максимальную размерность относительно $X \setminus 0$. Тогда элемент $f_1(x_1')$ из множества $f_1(U_\varepsilon^Y(x))$ обладает относительно базиса X теми же свойствами, какими обладал элемент $x \in X'$ относительно базиса Y. Следовательно, как и в том случае, если

$$f_1(x_1') = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + \ldots + b_{1k_1}x_{1k_1}, \quad x_{1i} \in X \setminus 0,$$

— несократимая запись элемента $f_1(x_1')$ относительно базиса $X \setminus 0$, то для достаточно малого числа ε_1 имеем, обозначая через V ε_1-окрестность элемента $f_1(x_1')$ относительно метрики ρ_X на множестве $f_1(U_\varepsilon^Y(x))$:

$$V \subset b_{11} \cdot U_{11}^X(x_{11}) + b_{12} \cdot U_{\varepsilon_1}^X(x_{12}) + \ldots + b_{1k_1} \cdot U_{\varepsilon_1}^X(x_{1k_1}),$$

где $U_{\varepsilon_1}^X(x_{1i})$ — не содержащие единицы и не пересекающиеся окрестности элементов x_{1i} в пространстве X. Кроме того, для любых двух элементов y' и y'' из V

$$\rho_X(\varphi_{j1}(y'), \varphi_{j1}(y'')) \leqslant \rho_X(y', y'') \quad (j = 1, \ldots, k_1),$$

где через $\varphi_{j1}(y)$ обозначается тот элемент из $X \setminus 0$ в записи элемента $y \in V$ относительно $X \setminus 0$, который содержится в $U_{\varepsilon_1}^X(x_{1j})$.

Ввиду эквивалентности метрик ρ_X и ρ_Y в пространстве Y, найдется такое число $\varepsilon_2 > 0$, что ε_2-окрестность элемента $f_1(x_1)$ относительно метрики ρ_Y во множестве $f_1(U_\varepsilon^Y(x))$ содержится в V. Если еще $U_{\varepsilon_2}^Y(x_1') \subseteq U_\varepsilon^Y(x)$, то, ввиду свойства (*),

$$f_1(U_{\varepsilon_2}^Y(x_1')) \subseteq V,$$

а потому

$$U_{\varepsilon_2}^Y(x_1') \subseteq a_1 \cdot U_\varepsilon^Y(y_1) + a_2 \cdot U_\varepsilon^Y(y_2) + \ldots + a_k \cdot U_\varepsilon^Y(y_k)$$

и

$$f_1(U_{\varepsilon_2}^Y(x_1')) \subseteq b_{11} \cdot U_{\varepsilon_1}^X(x_{11}) + b_{12} \cdot U_{\varepsilon_1}^X(x_{12}) + \ldots + b_{1k_1} \cdot U_{\varepsilon_1}^X(x_{1k_1}).$$

Рассмотрим теперь вместо элемента x с окрестностью $U_\varepsilon^Y(x)$ элемент x_1' с окрестностью $U_{\varepsilon_2}^Y(x_1')$ и повторим наши рассуждения, рассматривая вместо отображения f_1 отображение f_2, и т. д.

После k аналогичных рассмотрений мы найдем элемент $\bar{x} \in U_{\varepsilon}^{Y}(x)$, число $\bar{\varepsilon} > 0$ и открытые множества V_{ij} в пространстве X $(j = 1, \ldots, k_i;$ $i = 1, \ldots, k)$ такие, что:

a) $\bar{\varepsilon}$-окрестность $U_{\bar{\varepsilon}}^{Y}(\bar{x})$ элемента $\bar{x}$ относительно метрики ρ_Y в пространстве X' содержится в $U_{\varepsilon}^{Y}(x)$;

b) для некоторых целых чисел b_{ij}

$$f_i(U_{\bar{\varepsilon}}^{Y}(\bar{x})) \subseteq b_{i1} \cdot V_{i1} + b_{i2} \cdot V_{i2} + \cdots + b_{ik_i} \cdot V_{ik_i},$$

причем $V_{ij} \cap V_{ij'} = \Lambda$ при $j \neq j'$ и $0 \bar{\in} V_{ij}$;

c) если обозначить через $\varphi_{ji}(y)$ тот элемент в записи элемента $y \in f_i(U_{\bar{\varepsilon}}^{Y}(\bar{x}))$ относительно $X \diagdown 0$, который содержится в V_{ij}, то для любых двух элементов y и y' из $f_i(U_{\bar{\varepsilon}}^{Y}(\bar{x}))$ будет

$$\rho_X(\varphi_{ji}(y), \varphi_{ji}(y')) \leqslant \rho_X(y, y') \quad (j = 1, \ldots, k_i;\ i = 1, \ldots, k).$$

В силу последнего свойства, отображения φ_{ji} множеств $f_i(U_{\bar{\varepsilon}}^{Y}(\bar{x}))$ в пространство X непрерывны. Следовательно, отображения $\varphi_{ij} f_i$ множества $U_{\bar{\varepsilon}}^{Y}(\bar{x})$ в пространство X непрерывны.

Пусть $V(\bar{x})$ — такая окрестность точки $\bar{x}$ в пространстве X', что

$$\Phi = \overline{V(\bar{x})} \subseteq U_{\bar{\varepsilon}}^{Y}(\bar{x}).$$

Обозначим через Φ_{ji} множество неподвижных точек отображения $\varphi_{ij} f_i$ множества Φ в пространство X. Ввиду непрерывности отображений $\varphi_{ji} f_i$, множества Φ_{ji} замкнуты в Φ $(j = 1, \ldots, k_i;\ i = 1, \ldots, k)$.

Очевидно, далее, что $\Phi = \bigcup_{i,j} \Phi_{ji}$. Так как множество точек x из X', в которых $\dim_x X' \geqslant n$, всюду плотно в этом пространстве, то $\dim \Phi \geqslant n$. Поэтому среди множеств Φ_{ji} найдется, по крайней мере, одно множество $\Phi_{j'i'}$, имеющее размерность не меньшую чем n.

Так как, далее, при отображении $\varphi_{j'i'} f_{i'}$ множество $\Phi_{j'i'}$ тождественно отображается на себя, то $f_{i'}$ есть гомеоморфное отображение множества $\Phi_{j'i'}$ в Y. Следовательно, $\dim f_{i'}(\Phi_{j'i'}) \geqslant n$, а потому $\dim Y \geqslant n$, т. е. $\dim X \leqslant \dim Y$.

Меняя теперь ролями пространства X и Y, мы теми же рассуждениями показали бы, что $\dim Y \leqslant \dim X$, откуда и вытекает утверждение теоремы.

§ 11. Свободные топологические группы счетных бикомпактных пространств

В этом параграфе дается полная классификация свободных топологических групп счетных бикомпактных пространств.

Отметим прежде всего, что всякое счетное бикомпактное пространство есть компакт, и в качестве базиса окрестностей такого про-

странства можно всегда выбрать счетную систему открытых замкнутых множеств.

Пусть X — компакт счетной мощности. Образуем трансфинитную строго убывающую последовательность множеств

$$X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_\alpha \supset \ldots ,$$

где X_α есть множество предельных точек для $X_{\alpha-1}$, если α не предельное число, и пересечение всех X_β $(\beta < \alpha)$, если α — предельное число.

Множества X_α замкнуты в X, и для некоторого порядкового числа γ X_γ будет конечным множеством. Назовем тогда число γ *типом*, а число элементов множества X_γ — *индексом* множества X. В дальнейшем тип и индекс множества X будем обозначать соответственно символами $\tau(X)$ и $i(X)$.

ЛЕММА 11.1. *Два счетных бикомпактных множества, имеющие один и тот же тип и индекс, равный единице, гомеоморфны.*

Доказательство. Для множеств типа 0 утверждение леммы тривиально. Докажем, согласно принципу трансфинитной индукции, справедливость леммы для двух множеств X и Y типа α, предположив, что для множеств меньших типов лемма уже доказана.

Пусть

$$X_\alpha = \{x\}, \quad Y_\alpha = \{y\}.$$

Если α — не предельное число, то число $\alpha - 1$ существует и

$$X_{\alpha-1} = \{x, x_1, x_2, \ldots , x_n, \ldots\}, \quad Y_{\alpha-1} = \{y, y_1, y_2, \ldots , y_n, \ldots\},$$

где последовательность элементов x_i сходится к x, а последовательность элементов y_i сходится к y. Во множестве X найдется базис окрестностей точки x, состоящий из открытых и замкнутых множеств U_i $(i = 1, 2, \ldots)$ таких, что $U_i \supseteq U_j$ при $i < j$ и U_i содержит все элементы из $X_{\alpha-1}$, кроме элементов $x_1, x_2, \ldots , x_i$.

Рассмотрим множества

$$\Phi_1 = X \setminus U_1, \ \Phi_2 = U_1 \setminus U_2, \ \ldots , \ \Phi_n = U_{n-1} \setminus U_n, \ \ldots$$

Эти множества открыты и замкнуты в X. Они имеют, очевидно, единичный индекс и тип $\alpha - 1$. Совершенно аналогично определим во множестве Y систему открытых и замкнутых множеств Ψ_i индекса 1 и типа $\alpha - 1$. Отображая теперь гомеоморфно множество Φ_i на множество Ψ_i $(i = 1, 2, \ldots)$, что возможно в силу индуктивного предположения, и точку x в точку y, мы получим, как легко видеть, гомеоморфное отображение множества X на множество Y.

Если α — предельное число, то найдется возрастающая последовательность порядковых чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots , \alpha_n, \ldots$, имеющая α своим предельным числом. Тогда пересечение множеств $X_{\alpha_1}, X_{\alpha_2}, \ldots , X_{\alpha_n}, \ldots$ содержит лишь точку x, а потому любая окрестность точки x содержит все

множества X_{α_i}, начиная с некоторого i. Найдется поэтому базис окрестностей точки x, состоящий из открытых и замкнутых множеств U_i $(i=1, 2, \ldots)$ таких, что $U_i \supseteq U_j$ при $i<j$, $U_i \supset X_{\alpha_i}$, но $U_{i+1} \not\supset X_{\alpha_i}$.

Выберем в X_{α_i} изолированную точку x_i, не содержащуюся в U_{i+1} и такую открытую и замкнутую окрестность U'_i точки x_i, что

$$U'_i \subseteq U_i, \quad U'_i \cap U_{i+1} = \Lambda, \quad U'_i \cap X_{\alpha_i} = \{x_i\}.$$

Рассмотрим теперь новый базис окрестностей $U''_1 \supseteq U''_2 \supseteq \ldots$ точки x, где $U''_i = U_i \diagdown U'_i$ $(i=1, 2, \ldots)$. Положим

$$\Phi_1 = X \diagdown U''_1,\ \Phi_2 = U''_1 \diagdown U''_2,\ \ldots,\ \Phi_n = U''_{n-1} \diagdown U''_n,\ \ldots$$

Каждое множество Φ_n открыто, замкнуто и имеет, как легко видеть, индекс 1 и тип α_n $(n=1, 2, \ldots)$. Совершенно аналогично определим во множестве Y систему открытых и замкнутых множеств Ψ_n, для которых

$$i(\Psi_n)=1, \quad \tau(\Psi_n)=\alpha_n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Отображая теперь гомеоморфно множество Φ_n на множество Ψ_n $(n=1, 2, \ldots)$, что возможно в силу индуктивного предположения, и точку x в точку y, мы получим, как легко видеть, гомеоморфное отображение множества X на множество Y. Лемма доказана.

Будем обозначать в дальнейшем через $\sigma(\alpha, \beta)$ натуральную сумму порядковых чисел α и β [(7), стр. 73].

ЛЕММА 11. 2. *Если X и Y — счетные бикомпактные множества в топологической группе G, то*

$$\tau(X \cdot Y) = \sigma[\tau(X), \tau(Y)].$$

Доказательство леммы мы проведем трансфинитной индукцией по $\sigma[\tau(X), \tau(Y)]$. Лемма очевидна, если

$$\sigma[\tau(X), \tau(Y)]=0,$$

т. е.

$$\tau(X)=\tau(Y)=0.$$

Предположим, что лемма уже доказана для всех таких множеств X' и Y', что

$$\sigma[\tau(X'), \tau(Y')] < \gamma.$$

Докажем справедливость леммы для множеств X и Y соответственно типов α и β таких, что $\sigma(\alpha, \beta)=\gamma$. Будем предполагать, что $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$ (если $\alpha=0$ или $\beta=0$, то утверждение леммы очевидно).

Заметим, что всякое счетное бикомпактное множество есть сумма конечного числа замкнутых подмножеств индекса 1 и того же типа, что и тип исходного множества. Нам достаточно поэтому рассмотреть лишь тот случай, когда $i(X)=i(Y)=1$.

Пусть $X_\alpha = \{x\}$, $Y_\beta = \{y\}$ и пусть V — произвольная окрестность точки xy во множестве $X \cdot Y$. Найдутся такие окрестности V_x и V_y точек x и y соответственно во множествах X и Y, что $V_x \cdot V_y \subseteq V$. Тогда

$$X \cdot Y \diagdown V \subseteq X \cdot Y \diagdown V_x \cdot V_y \subseteq (X \diagdown V_x) \cdot Y \cup X \cdot (Y \diagdown V_y).$$

Так как $\tau(X \setminus V_x) < \alpha$ и $\tau(Y \setminus V_y) < \beta$, то

$$\sigma[\tau(X \setminus V_x), \tau(Y)] < \gamma \quad \text{и} \quad \sigma[\tau(X), \tau(Y \setminus V_y)] < \gamma,$$

а потому, в силу индуктивного предположения,

$$\tau[(X \setminus V_x) \cdot Y] < \gamma, \quad \tau[X \cdot (Y \setminus V_y)] < \gamma$$

и, следовательно, $\tau(X \cdot Y \setminus V) < \gamma$. Поэтому должно быть

$$\tau(X \cdot Y) \leqslant \gamma.$$

Так как, с другой стороны, для любого порядкового числа ν

$$(X \cdot Y)_\nu \supseteq X_\nu \cdot Y \quad \text{и} \quad (X \cdot Y)_\nu \supseteq X \cdot Y_\nu,$$

то, очевидно,

$$\tau(X \cdot Y) \geqslant \sigma(\alpha, \beta) = \gamma.$$

Следовательно, $\tau(X \cdot Y) = \gamma$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11. 3. *Два счетных* бикомпактных множества одного и того же типа F-эквивалентны.*

Доказательство. В силу леммы 11.1, достаточно показать, что всякое множество типа α F-эквивалентно множеству того же типа, имеющему индекс 1.

Если индекс множества X равен n, то

$$X = X_1 \cup \cdots \cup X_n,$$

где $X_1, \ldots, X_n$ — попарно не пересекающиеся замкнутые подмножества, причем

$$\tau(X_j) = \tau(X) \quad \text{и} \quad i(X_j) = 1 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Образуем группу $F(X)$.

Пусть $(X_j)_\alpha = \{x_j\}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Рассмотрим в группе $F(X)$ множество

$$Y = X_1 x_1^{-1} \cup X_2 x_2^{-1} \cup \cdots \cup X_n x_n^{-1} \cup \{x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots, x_n^{-1}\}.$$

Легко проверить, что множество Y есть свободный базис в группе $F(X)$.

Далее, $\tau(Y) = \tau(X)$ и $i(Y) = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 11.4. *Пусть $\alpha = \omega^\nu \cdot n$, где n — конечное целое положительное число, ν — произвольное (конечное или счетное) порядковое число** и ω — первое бесконечное порядковое число, и пусть $\beta \leqslant \alpha$. Тогда всякое счетное бикомпактное множество типа α F-эквивалентно множеству типа $\sigma(\alpha, \beta) = \alpha \dotplus \beta$.*

Доказательство. Пусть $\tau(X) = \alpha$. Если $\beta < \alpha$, то предположим, что

$$i(X) = 1, \quad X_\alpha = \{x\}$$

---

* В дальнейшем рассматриваются лишь бесконечные множества.

** Мы допускаем и случай, когда $\nu = 0$, полагая $\omega^0 = 1$.

и выберем точку $y \in X_\beta \setminus X_{\beta+1}$ и открытую и замкнутую окрестность V точки y такую, что $V \cap (X_\beta \setminus y) = \Lambda$. Тогда $X = U \cup V$, где $U = X \setminus V$.

Если же $\beta = \alpha$, то предположим, что

$$i(X) = 2, \quad X_\alpha = \{x, y\}$$

и тогда

$$X = U_1 \cup V_1,$$

где U_1 и V_1 — непересекающиеся замкнутые подмножества, причем $x \in U_1$, $y \in V_1$.

Итак, в обоих случаях мы можем представить множество X как сумму двух непересекающихся замкнутых подмножеств U и V таких, что

$$\tau(U) = \alpha, \quad \tau(V) = \beta \quad \text{и} \quad i(U) = i(V) = 1.$$

Пусть

$$U = U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$$

— счетный базис окрестностей точки x, состоящий из открытых и замкнутых множеств. Положим

$$V_i = U_i \setminus U_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

и образуем счетную систему множеств

$$\Phi_1 = \{x\} \cup V_0 \cup V_1 \cup V_3 \cup V_6 \cup \cdots \cup V_{\frac{n(n+1)}{2}} \cup \cdots$$

$$\Phi_2 = \{x\} \cup V_2 \cup V_4 \cup V_7 \cup \cdots \cup V_{\frac{n(n+1)}{2}+1} \cup \cdots$$

$$\Phi_3 = \{x\} \cup V_5 \cup V_8 \cup \cdots \cup V_{\frac{n(n+1)}{2}+2} \cup \cdots$$

. . . .

Эти множества замкнуты в U, пересечение любых двух из них содержит лишь точку x и объединение всех множеств Φ_i совпадает с U. Как было установлено в процессе доказательства леммы 11.1, можно предположить, что числа $\tau(V_i)$ стремятся к α при возрастании i, если α—предельное число, или равны все $\alpha - 1$, если α — не предельное число, а тогда

$$\tau(\Phi_i) = \alpha \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Занумеруем все точки из V натуральными числами:

$$V = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}.$$

Образуем группу $F(X)$, фиксируя в X точку из V и рассмотрим в этой группе множество

$$Y = \{x\} \cup V \cup x^{-1}\Phi_1 y_1 \cup x^{-1}\Phi_2 y_2 \cup \ldots \cup x^{-1}\Phi_n y_n \cup \ldots$$

Множество Y замкнуто в $F_3(X)$, ибо, ввиду сходимости системы множеств Φ_i к точке x, из всякой последовательности элементов из Y можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из Y. Кроме того, так как $Y \setminus e$ есть свободный алгебраический базис группы $F(X)$ и $X \subset F_3(Y)$, множество Y является свободным базисом в группе $F(X)$.

Так как

$$(x^{-1}\Phi_n y_n)_\alpha = x^{-1}(\Phi_n)_\alpha y_n = \{y_n\} \quad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

то $Y_\alpha \supseteq V$, а потому

$$\tau(Y) \geqslant \alpha + \beta = \sigma(\alpha, \beta).$$

Но, с другой стороны, $Y \subseteq X \cup x^{-1}U \cdot V$, а потому, в силу леммы 11.2,

$$\tau(Y) \leqslant \sigma(\alpha, \beta).$$

Следовательно,

$$\tau(Y) = \sigma(\alpha, \beta),$$

и лемма доказана.

Пусть, теперь, γ — произвольное порядковое число, конечное или счетное. Найдется натуральное число n и порядковое число $\nu \geqslant 0$ такие, что

$$\gamma = \omega^\nu \cdot n + \beta = \underbrace{\omega^\nu + \ldots + \omega^\nu}_{n \text{ раз}} + \beta,$$

где $\beta < \omega^\nu$. На основании леммы 11.4, которую приходится здесь применить последовательно n раз, заключаем, что множество типа γ F-эквивалентно множеству типа ω^ν.

С другой стороны, два счетных бикомпактных множества X и Y соответственно типов ω^μ и ω^ν, где, например, $\mu > \nu$, не могут быть F-эквивалентными. В самом деле, в свободной топологической группе $F(Y)$ имеем, на основании леммы 11.2,

$$\tau(F_n(Y)) = \omega^\nu \cdot n < \omega^\mu \quad (n = 1,\ 2, \ldots).$$

В силу теоремы 7, тип всякого свободного базиса в группе $F(Y)$ должен быть также меньше ω^μ.

Мы приходим, таким образом, к следующему результату.

ТЕОРЕМА 9. *Свободным топологическим группам счетных бикомпактных пространств могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие порядковые числа (конечные и счетные). Если при этом соответствии свободной топологической группе F соответствует число ν, то свободными базисами этой группы являются такие и только такие множества, типы которых γ удовлетворяют неравенству*

$$\omega^\nu \leqslant \gamma < \omega^{\nu+1} \quad (\nu \geqslant 0).$$

Легко видеть, что все рассуждения этого параграфа можно повторить дословно для свободных абелевых топологических групп. Следовательно, для свободных абелевых топологических групп счетных бикомпактных пространств имеет место теорема, аналогичная теореме 9. Отсюда следует, в частности, что *если X и Y — два счетных бикомпактных множества, то из изоморфизма групп $A(X)$ и $A(Y)$ вытекает изоморфизм групп $F(X)$ и $F(Y)$.*

§ 12. Подгруппы свободных топологических групп

Пусть множество Y в группе $F(X)$ $/A(X)/$ таково*, что $Y \setminus e$ есть *свободное алгебраическое множество*, т. е. элементы множества $Y \setminus e$ не связаны между собой никакими алгебраическими соотношениями, кроме тривиальных.

Будем говорить, что множество Y *правильно расположено* относительно базиса X группы $F(X)$ $/A(X)/$, если в подгруппе F_Y $/A_Y/$, алгебраически порождаемой множеством Y, нельзя найти последовательности элементов, длины которых относительно $Y \setminus e$ неограниченно возрастают, а длины их относительно $X \setminus e$ ограничены в совокупности.

Из теоремы 7 вытекает, что если X — бикомпактное пространство и X_1 — произвольный свободный базис в группе $F(X)$, то множества X и X_1 правильно расположены друг относительно друга. Отсюда следует, что если множество Y правильно расположено относительно X, то оно правильно расположено и относительно любого свободного базиса группы $F(X)$. Поэтому в случае бикомпактного пространства X мы можем говорить о правильной расположенности множества Y в группе $F(X)$.

Те же соображения имеют место и для группы $A(X)$.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть X — бикомпактное пространство и Y — бикомпактное подпространство в группе $F(X)$ $/A(X)/$ такое, что $e \in Y$ и $Y \setminus e$ есть свободное алгебраическое множество. Чтобы множество Y алгебраически порождало замкнутую подгруппу в группе $F(X)$ $/A(X)/$ и было свободным топологическим базисом в этой подгруппе, необходимо и достаточно, чтобы Y было правильно расположено в группе $F(X)$ $/A(X)/$.*

Доказательство. Пусть множество Y неправильно расположено в группе $F(X)$. Тогда для некоторого числа n в подгруппе F_Y, алгебраически порождаемой множеством Y, существует последовательность элементов неограниченно растущей длины относительно $Y \setminus e$ и длины n относительно $X \setminus e$.

Если бы подгруппа F_Y была замкнутой в $F(X)$, а множество Y было свободным базисом в F_Y, то эта последовательность элементов, ввиду теоремы 4, была бы замкнутым и дискретным подмножеством в $F(X)$, что невозможно, ибо она содержится в бикомпактном множестве F_n элементов из $F(X)$ длины, не превосходящей числа n относительно $X \setminus e$.

Предположим теперь, что множество Y правильно расположено в группе $F(X)$.

Обозначим через F_i^Y множество элементов в группе F_Y длины, не превышающей числа i относительно $Y \setminus e$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

---

* Ради простоты формулировок мы предполагаем здесь, что $A(X)$ — мультипликативная группа.

Ввиду правильной расположенности множества Y, для любого $k=1, 2, \ldots$ последовательность множеств

$$F_1^Y \cap F_k \subseteq F_2^Y \cap F_k \subseteq \ldots \subseteq F_i^Y \cap F_k \subseteq \ldots$$

должна стабилизироваться на конечном шаге, т. е. для некоторого индекса n_k будет

$$F_Y \cap F_k = F_{n_k}^Y \cap F_k.$$

Множества $F_{n_k}^Y$ и F_k бикомпактны, а следовательно, замкнуты в $F(X)$, откуда вытекает замкнутость множества $F_Y \cap F_k$ для любого индекса k. В силу теоремы 4, подгруппа F_Y замкнута в $F(X)$.

Пусть, теперь, M — множество в подгруппе F_Y такое, что множества $M \cap F_i^Y$ замкнуты в F_i^Y $(i=1, 2, \ldots)$. Тогда

$$M \cap F_k = M \cap (F_Y \cap F_k) = M \cap (F_{n_k}^Y \cap F_k) = (M \cap F_{n_k}^Y) \cap F_k,$$

а потому множества $M \cap F_k$ замкнуты в $F_k (k=1, 2, \ldots)$. В силу теоремы 4, множество M замкнуто в $F(X)$, а потому и в F_Y. Отсюда непосредственно вытекает, что Y — свободный топологический базис в группе F_Y.

Доказательство теоремы для группы $A(X)$ дословно то же.

Следствие 1. *Если Y — замкнутое подмножество в X, то подгруппа, порождаемая алгебраически множеством Y, замкнута в $F(X)$ (соответственно в $A(X)$) и свободна относительно базиса $Y \cup e$.*

Следствие 2. *Для любого натурального числа $n \geqslant 2$ существуют связные абелевы группы, алгебраически порождаемые элементами порядка n и не содержащие, следовательно, элементов порядка, большего чем n.*

В самом деле, если X — связное бикомпактное пространство, то группа $A(X)$ связна (§ 6). Множество Y элементов группы $A(X)$ вида $x^n (x \in X)$ бикомпактно и правильно расположено в группе $A(X)$. Следовательно, по доказанной теореме, множество Y алгебраически порождает замкнутую в $A(X)$ подгруппу $A^{(n)}$, и фактор-группа $A(X)/A^{(n)}$ дает нам пример искомой группы.

§ 13. Подгруппы свободных топологических групп (продолжение)

Естественно возникает вопрос, будет ли хотя бы в случае нульмерного пространства всякая замкнутая подгруппа свободной группы свободна.

Мы покажем, что это не так: *в абелевой группе $A(X)$ нульмерного пространства X может существовать несвободная замкнутая подгруппа.*

Пример. В качестве пространства X возьмем счетное бикомпактное множество точек с одной предельной точкой. Пусть

$$x_1,\ x_1',\ x_2,\ x_2',\ \ldots,\ x_n,\ x_n',\ \ldots \qquad (1)$$

— сходящаяся последовательность изолированных точек пространства X.

Образуем группу $A(X)$, фиксируя в пространстве X предельную точку.

Введем новую нумерацию для элементов последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$: первым 2^2 элементам последовательности припишем наверху индекс 2, а внизу — два индекса, каждый из которых принимает значения 1 и 2; следующим 3^2 элементам последовательности припишем наверху индекс 3, а внизу — два индекса, принимающие значения 1, 2, 3 и т. д. Такую же нумерацию введем и для элементов последовательности $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots$.

Обозначим через $U^n (n = 2, 3, \ldots)$ множество элементов (для упрощения письма мы опускаем всюду индексы n наверху):

$$u_{ij} = (x_{ij} - x_{i,j-1}) + (x'_{ij} - x'_{i-1,j}) \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

При этом мы полагаем $x_{i0} = x_{in}$ и $x_{0j} = x_{nj}$, т. е. рассматриваем индексы i и j по модулю n.

Легко видеть, что $\sum\limits_{i,j=1}^{n} u_{ij} = 0$. С другой стороны, это единственная линейная зависимость, связывающая элементы u_{ij}.

В самом деле, если имеет место соотношение

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{ij} = 0,$$

то, так как элемент x_{ij} входит только в запись элемента u_{ij} (с коэффициентом $+1$) и в запись элемента $u_{i,j+1}$ (с коэффициентом -1), имеем

$$a_{ij} = a_{i,j+1}.$$

Аналогично, рассматривая вместо x_{ij} элемент x'_{ij}, получим

$$a_{ij} = a_{i+1,j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Следовательно, все коэффициенты a_{ij} равны между собой, что и требовалось доказать.

Обозначим через S_n подгруппу группы $A(X)$, алгебраически порожденную множеством U^n, $n = 2, 3, \ldots$. Тогда имеет место утверждение:

А) *Если элемент x в S_n имеет относительно $X \setminus 0$ длину $k < n$, то относительно U^n он может быть записан в виде слова длины, не превышающей k^3.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Пусть $x = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{ij}$. Если по крайней мере два коэффициента a_{ij}, стоящие при элементах u_{ij} одной и той же строки (столбца) матрицы,

не равны между собой, то по крайней мере один из элементов множества $X \setminus 0$, входящий в первые (вторые) скобки записей (2) элементов этой строки (столбца), войдет и в несократимую запись элемента x относительно $X \setminus 0$.

В силу предположения относительно длины элемента x, при элементах всех строк и всех столбцов матрицы, за исключением не более чем k особых строк и столбцов, должны стоять коэффициенты, равные одному и тому же числу a. Тогда

$$x = a \cdot \sum_{i,j=1}^{n} u_{ij} + \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2} a'_{m_i n_j} u_{m_i n_j} = \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2} a'_{m_i n_j} u_{m_i n_j},$$

где $u_{m_i n_j}$ — элементы, стоящие на пересечении l_1 особых строк и l_2 особых столбцов матрицы. При этом $l_1 l_2 \leqslant k^2$.

С другой стороны, если $a'_{m_s n_t}$ — максимальное по абсолютной величине число среди $a'_{m_i n_j}$ и если среди особых столбцов матрицы содержатся столбцы с индексами $n_t, n_t+1, \ldots, n_t+l$ и не содержится столбец с индексом n_t+l+1, причем, очевидно, $l+1<n$, то в несократимую запись элемента x относительно $X \setminus 0$ входят элементы

$$(a'_{m_s n_t} - a'_{m_s, n_t+1}) x_{m_s n_t},\ (a'_{m_s, n_t+1} - a'_{m_s, n_t+2}) x_{m_s, n_t+1},\ \ldots$$
$$\ldots,\ (a'_{m_s, n_t+(l-1)} - a'_{m_s, n_t+l}) x_{m_s, n_t+(l-1)},\ a'_{m_s, n_t+l} x_{m_s, n_t+l}.$$

Отсюда

$$|a'_{m_s n_t}| \leqslant |a'_{m_s n_t} - a'_{m_s, n_t+1}| + |a'_{m_s, n_t+1} - a'_{m_s, n_t+2}| + \ldots$$
$$\ldots + |a'_{m_s, n_t+(l-1)} - a_{m_s, n_t+l}| + |a'_{m_s, n_t+l}| \leqslant k.$$

Но длина слова $\sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2} a'_{m_i n_j} u_{m_i n_j}$ относительно U^n не превосходит числа $|a'_{m_s n_t}| \cdot l_1 l_2$, а потому, в силу доказанных неравенств, не превосходит k^3. Утверждение А) доказано.

Обозначим теперь через S алгебраическую прямую сумму подгрупп $S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ в группе $A(X)$.

В) *Подгруппа S замкнута в группе $A(X)$.*

Доказательство. Отметим прежде всего, что множество

$$U = (\bigcup_{i=1}^{\infty} U^i) \cup \{0\}$$

бикомпактно, так как любая его бесконечная подпоследовательность имеет нулевой элемент предельной точкой.

Будем обозначать в дальнейшем длину и размерность элемента $x \in A(X)$ относительно множества $X \setminus 0$ соответственно через $l_X(x)$ и $r_X(x)$. Аналогичные обозначения введем и для других множеств в группе $A(X)$.

Пусть k — произвольное целое положительное число. Если для элемента $y \in S$ будет $l_X(y) \leqslant k$, то

$$y = s_{i_1} + s_{i_2} + \ldots + s_{i_l},$$

где $s_{i_j} \in S_{i_j}$, $l_X(s_{i_j}) \leqslant k$ $(j=1, \ldots, l)$ и $l \leqslant k$.

Так как в каждой из подгрупп $S_2, \ldots, S_k$ существует лишь конечное число элементов длины, не превышающей k относительно $X\diagdown 0$, то последние могут быть записаны как слова длины, не большей некоторого числа n_k относительно U.

Если, теперь, положим $m_k = \max(n_k, k^3)$, то, как легко видеть из сказанного и из утверждения А), всякий элемент y из S длины, не превосходящей k относительно X, может быть записан как слово длины, не большей чем $m_k \cdot k$ относительно U.

Следовательно,

$$S \cap A_k^r(X) = (m_k k U - m_k k U) \cap A_k(X)$$

и, так как множество $m_k k U - m_k k U$ бикомпактно, то множество $S \cap A_k(X)$ замкнуто в $A_k(X)$. Замкнутость множества S в группе $A(X)$ вытекает теперь непосредственно из теоремы 4′.

Предположим, что группа S — свободная абелева топологическая группа. Пусть тогда $Z = \{0, z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}$ — свободный базис в этой группе.

Множество Z нормально, как замкнутое подмножество группы S, а следовательно, и группы $A(X)$.

Так как множество U есть компактный алгебраический базис в группе S, то множество Z, в силу леммы 9.1, должно быть компактным. Следовательно, элементы из Z имеют ограниченную в совокупности длину относительно $X\diagdown 0$,

$$l_X(z_i) \leqslant s_1 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

а потому множество Z бикомпактно.

Элементы из U записываются также в виде слов ограниченной длины относительно Z,

$$l_Z(u_{ij}^n) \leqslant s_2 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ n = 2, 3, \ldots).$$

Положим $s = \max(s_1, s_2)$. Рассмотрим подгруппу S_n с достаточно большим индексом n. Из дальнейшего будет видно, насколько большим нужно выбрать n.

Пусть c_i — компонента элемента z_i в S_n относительно разложения

$$S = S_2 + S_3 + \cdots + S_n + \cdots \tag{3}$$

Очевидно,

$$l_X(c_i) \leqslant l_X(z_i) \leqslant s \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, при $n > s$, в силу утверждения А), существуют такие записи C_i элементов c_i в виде слов относительно U^n, что

$$l_{U^n}(C_i) \leqslant s^3.$$

Пусть a_i — коэффициент, с которым элемент $u = u^n_{nn}$ входит в слово C_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Если все a_i равны нулю, то слова C_i имеют длину не больше s^3 относительно свободного алгебраического базиса $U_n = U^n \setminus u$ в группе S_n. Но тогда, так как элемент u может быть записан в виде слова длины, не большей чем s относительно c_i, имеем $l_{U_n}(u) \leqslant s^4$, т. е. $n^2 - 1 \leqslant s^4$, что невозможно при $n^2 > s^4 + 1$.

Если же не все числа a_i равны нулю, то пусть a_1 — наименьшее по абсолютной величине число среди $a_i \neq 0$. Если существует по крайней мере одно a_i, не делящееся на a_1, например, a_2, то $a_2 = a_1 b_1 + d_1$, где b_1 и d_1 — целые числа и $|d_1| < |a_1|$.

Рассмотрим тогда слова C'_i:

$$C'_i = C_i \text{ при } i \neq 2, \quad C'_2 = C_2 - b_1 C_1.$$

Наименьший по абсолютной величине отличный от нуля коэффициент, с которым элемент u входит в слова C'_i, равен d_1. Так как

$$|a_i| \leqslant s^3 \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

то $|b_1| < s^3$, а потому

$$l_{U^n}(C'_i) \leqslant s^3 \cdot s^3.$$

Если не все коэффициенты, с которыми элемент u входит в слова C'_i, делятся на d_1, произведем аналогичную замену слов C'_i новыми и т. д. После конечного числа $m \leqslant s^3$ шагов мы придем, наконец, к таким словам $C^{(m)}_i$, что u входит в одно из них, например в $C^{(m)}_1$, с коэффициентом $\delta \neq 0$, а в остальные — с коэффициентами, кратными δ и не превосходящими числа s^3 по абсолютной величине. Наконец, если положить

$$\bar{C}_1 = C^{(m)}_1, \quad \bar{C}_i = C^{(m)}_i - \frac{a'_i}{\delta} C^{(m)}_1,$$

где a'_i — коэффициент, с которым u входит в слово $C^{(m)}_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$, то слова $\bar{C}_i$ $(i \geqslant 2)$ не будут содержать в своей записи элемента u.

Легко видеть, что

$$l_{U^n}(C^{(m)}_i) \leqslant s^3 \cdot (s^3)^m \leqslant s^3 (s^3)^{s^3} = s^{3s^3+3},$$

а потому

$$l_{U^n}(\bar{C}_i) \leqslant s^{3s^3+3}(s^3 + 1) = s^{3s^3+6} + s^{3s^3+3} = t \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $\bar{c}_i$ — элементы из S_n, равные $\bar{C}_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$l_{U_n}(\bar{c}_i) \leqslant t \quad (i = 2, 3, \ldots), \text{ но } r_{U_n}(\bar{c}_1) \geqslant n^2 - 1 - t.$$

Пусть $\overline{Z}=\{\overline{z}_1, \overline{z}_2, \ldots\}$—свободный алгебраический базис в группе S, элементы которого получены из элементов z_i базиса Z в точности по тем же формулам, по каким слова $\overline{C}_i$ получаются из слов C_i. Компоненты элементов $\overline{z}_i$ в группе S_n относительно разложения (3) равны тогда $\overline{c}_i$ $(i=1, 2, \ldots)$ и, как легко видеть,

$$l_{\overline{Z}}(z_i) \leqslant (s^3)^{s^3}(s^3+1),$$

а потому для любого элемента $v \in U^n$

$$l_{\overline{Z}}(v) \leqslant (s^3)^{s^3}(s^3+1)s < t.$$

В частности, если $v \in U_n$ и

$$v = k_1\overline{z}_1 + k_2\overline{z}_{i_2} + \ldots + k_r\overline{z}_{i_r}, \quad 1 < i_2 < \ldots < i_r,$$

то $r < t$ и

$$v = k_1\overline{c}_1 + k_2\overline{c}_{i_2} + \ldots + k_r c_{i_r},$$

а потому

$$k_1\overline{c}_1 = v - k_2\overline{c}_{i_2} - \ldots - k_r\overline{c}_{i_r}.$$

В правой части последнего равенства стоит элемент, имеющий относительно U_n размерность, не большую чем $t(r-1)+1$, а потому и подавно не большую чем t^2.

С другой стороны, при $k_1 \neq 0$

$$r_{U_n}(k\overline{c}_1) = r_{U_n}(\overline{c}_1) \geqslant n^2 - 1 - t.$$

Следовательно, при $n^2 > t^2+t+1$ должно быть $k_1=0$. Это означает, что все элементы из U_n, а следовательно, и элемент u, не содержат в своих записях относительно $\overline{Z}$ элемента $\overline{z}_1$. Но тогда u записывается как слово длины, меньшей чем t относительно элементов $\overline{c}_2, \overline{c}_3, \ldots$, а потому $l_{U_n}(u) < t^2$, т. е. $n^2-1 < t^2$. Но это невозможно при нашем выборе n.

Противоречие, к которому мы пришли, доказывает, что замкнутая подгруппа S группы $A(X)$ не является свободной (абелевой) топологической группой.

Поступило
21. I. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Alexandroff P., Darstellung der Grundzüge der Urysohnischen Dimensionstheorie, Math. Ann., 98 (1927), 31—63.

[2] Dantzig D., van, Zur topologischen Algebra, Math. Ann., 107 (1932), 587—626.

[3] Курош А. Г., Теория групп, М.—Л., 1944.

[4] Марков А. А., О свободных топологических группах, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 9 (1945), 3—64.

[5] Марков А. А., О существовании периодических связных топологических групп, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 8 (1945), 225—232.

Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, М.—Л., 1938.

[7] Хаусдорф Ф., Теория множеств, М.—Л., 1937.

[8] Weil A., Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Paris, 1938.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 325—336

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе рассматривается взаимная связь между некоторыми экстремальными задачами для аналитических функций.

Введение

Обозначим через A класс функций $f(z)$, регулярных в замкнутой области $|z|\leqslant 1$; введем для них обозначения

$$L(f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|f(z)|\cdot|dz|,\quad M(f)=\max_{|z|\leqslant 1}|f(z)|, \tag{1}$$

$$\omega^{(c)}(f)=\sum_{k=0}^{s}c_k f(\alpha_k),\quad |\alpha_k|\leqslant r<1\quad (k=0,1,\ldots,s). \tag{2}$$

Обозначим через $f^{(\gamma)}(z)$ функцию $f(z)\in A$, удовлетворяющую условиям

$$f(\alpha_k)=\gamma_k\quad (k=0,1,\ldots,s), \tag{3}$$

а через B — класс функций $R(z)$, мероморфных в замкнутой области $|z|\leqslant 1$ и имеющих в ней $s+1$ простых полюсов, причем

$$R(z)=\sum_{k=0}^{s}\frac{c_k}{z-\alpha_k}+\varphi(z),\quad \varphi(z)\in A. \tag{4}$$

Положим

$$L(R)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}|R(z)|\cdot|dz|,\quad M(R)=\max_{|z|=1}|R(z)|, \tag{5}$$

$$\Omega^{(m)}(R)=\sum_{k=0}^{s}c_k m_k, \tag{6}$$

и пусть $R^{(c)}(z)$ обозначает функцию $R(z)\in B$ с заданными вычетами $\{c_k\}_0^s$.

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}P(z)=\prod_{k=0}^{s}(z-\alpha_k),\quad P^*(z)=z^{s+1}\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)=\prod_{k=0}^{s}(1-\overline{\alpha}_k z),\\ \sum_{k=0}^{s}\frac{c_k}{z-\alpha_k}=\frac{Q(z)}{P(z)},\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

мы имеем

$$R(z)=\frac{Q(z)+\varphi(z)P(z)}{P(z)}=\frac{P^*(z)}{P(z)}\cdot\frac{Q(z)+\varphi(z)P(z)}{P^*(z)}=\frac{P^*(z)}{P(z)}\cdot\psi(z), \tag{8}$$

где $\psi(z)\in A$, причем из равенства

$$\psi(z)=\frac{Q(z)+\varphi(z)P(z)}{P^*(z)} \tag{9}$$

вытекает

$$\psi(\alpha_i)=\frac{Q(\alpha_i)}{P^*(\alpha_i)}=c_i\frac{P'(\alpha_i)}{P^*(\alpha_i)}=\gamma_i,\quad R^{(c)}(z)=\frac{P^*(z)}{P(z)}\psi^{(\gamma)}(z). \tag{10}$$

Таким образом,

$$\left.\begin{aligned}&L(R)=L(\psi),\quad M(R)=M(\psi),\quad \Omega^{(m)}(R)=\sum_{k=0}^{s}m_kc_k=\\&=\sum_{k=0}\frac{m_kP^*(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)}\psi(\alpha_k)=\omega^{(r)}(\psi),\quad r_k=m_k\frac{P^*(\alpha_k)}{P(\alpha_k)}.\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Настоящая заметка имеет целью рассмотрение взаимной связи между следующими экстремальными задачами:

I. Найти

$$\min M(f^{(\gamma)})=\max\frac{|\Omega^{(\gamma)}(R)|}{L(R)}. \tag{12}$$

II. Найти

$$\max\frac{|\omega^{(c)}(f)|}{L(f)}=\min M(R^{(c)}). \tag{13}$$

III. Найти

$$\min L(f^{(\gamma)})=\max\frac{|\Omega^{(\gamma)}(R)|}{M(R)}. \tag{14}$$

IV. Найти

$$\max\frac{|\omega^{(c)}(f)|}{M(f)}=\min L(R^{(c)}). \tag{15}$$

Во всех задачах $f(z)\in A$, $R(z)\in B$, числа $\{\alpha_k\}_0^s$ заданы, причем $\{|\alpha_k|\}_0^s<1$; кроме того, в задачах I, III заданы числа $\{\gamma_k\}_0^s$, а в задачах II, IV — числа $\{c_k\}_0^s$.

На основании (11), задача I эквивалентна задаче II, а задача III эквивалентна задаче IV.

Мы будем пользоваться теоремой G. Pick'a [см. (1), (2)], дающей решение задачи I.

ТЕОРЕМА I. *Для всех функций $f(z)\in A$, удовлетворяющих условиям*

$$f(\alpha_i)=\gamma_i,\quad |\alpha_i|<1\quad (i=0,1,\ldots,s), \tag{16}$$

имеет место неравенство *

$$M(f^{(\gamma)})\geq M(f_1^{(\gamma)})=\lambda_0, \tag{17}$$

* Через $f_i(z)$, $R_i(z)$ будем обозначать функции $f(z)$, $R(z)$, дающие решение i-й экстремальной задачи.

где λ_0 — *наибольший корень уравнения*

$$\left|\frac{\gamma_i\gamma_k-\lambda^2}{1-\alpha_i\bar{\alpha}_k}\right|_{i,\,k=0}^{s}=0; \tag{18}$$

если корень λ_0 *имеет кратность* ν, *то знак равенства в* (17) *имеет место только для функции*

$$f_1^{(\gamma)}=\lambda_0\frac{q(z)}{q^*(z)}, \tag{19}$$

где $q(z)$ — *полином степени* $\sigma=s+1-\nu$, *имеющий все корни в области* $|z|<1$, *однозначно определяемый условиями* (16).

С помощью предельного перехода можно получить тот случай, когда условия (16) заменяются условиями

$$f^{(r_i)}(\alpha_i)=\gamma_{r_i}\quad(r_i=0,\,1,\,\ldots,\,k_i;\ i=1,\,2,\,\ldots,\,p),\qquad\sum_{i=1}^{p}(k_i+1)=s+1;$$

в частности, легко получить проблему, решенную Carathéodory и Fejér'ом (3) ранее проблемы Pick'а и соответствующую тому случаю, когда условия (16) сводятся к заданию ряда коэффициентов [см. (4) — (9), (13), (14), (24)]:

$$\frac{1}{i}f^{(i)}(0)=\gamma_i,\qquad(i=0,\,1,\,\ldots,\,s). \tag{20}$$

Мы будем также пользоваться следующей леммой:

ЛЕММА. *Если полином* $\varphi(z)$ *степени* $2s$ *подчинен условиям*

$$\varphi(\alpha_i)=\beta_i\quad|\alpha_i|<1\ (i=0,\,1,\,\ldots,\,s), \tag{21}$$

то он всегда может быть единственным образом представлен в виде

$$\varphi(z)=r^2(z)\,\tau(z)\,\tau^*(z), \tag{22}$$

где полином $r(z)$ *степени* $\sigma\leqslant s$ *имеет все корни в области* $|z|>1$, *а полином* $\tau(z)$ *имеет степень* $s-\sigma$.

В том частном случае, когда условия (21) сводятся к заданию $s+1$ младших коэффициентов, эта лемма была доказана F. Riesz'ем (10), который вывел ее из решения задач, аналогичных задачам II, III; в нашей заметке (15) эта лемма доказана другим способом *; для условий (21) лемма доказана S. Kakeya (20) и обобщена автором (17).

Примечание. Теорема Pick'а может быть обобщена следующим образом: обозначим через D некоторую односвязную область в плоскости z и через $G(z,\alpha)$ — комплексную функцию Грина области D, т. е. на границе области D мы имеем

$$|G(z,\alpha)|=1, \tag{23}$$

причем для некоторой точки α области D $G(\alpha,\alpha)=0$.

* Г. М. Голузин вновь доказал лемму F. Riesz'а в (18).

Обозначим через A класс функций $\{f(z)\}$, регулярных в замкнутой области $\overline{D}$; пусть $\{\Omega_k(f)\}_0^s$ — некоторые линейные функционалы, обладающие тем свойством, что всякая функция $f(z)\in A$, для которой

$$\Omega_k(f)=0 \quad (k=0, 1, \ldots, s), \tag{24}$$

имеет в области D не менее $s+1$ нулей.

Если можно подобрать комплексные числа

$$\alpha_k\in D \quad (k=1, 2, \ldots, s) \tag{25}$$

и положительное число λ *так, чтобы функция*

$$f_1(z)=\lambda\prod_{k=1}^{s} G(z, \alpha_k) \tag{26}$$

удовлетворяла условиям

$$\Omega_k(f_1)=\beta_k \quad (k=0, 1, \ldots, s), \tag{27}$$

где $\{\beta_k\}_0^s$ — *заданные числа, то для всякой функции* $f(z)\in A$, *удовлетворяющей условиям*

$$\Omega_k(f)=\beta_k \quad (k=0, 1, \ldots, s), \tag{28}$$

справедливо неравенство

$$M(f)\geqslant M(f_1)=\lambda. \tag{29}$$

В проблемах Carathéodory-Fejér'a и Pick'a мы имеем

$$G(z, \alpha)=\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \quad D: |z|<1, \tag{30}$$

и подбор функции $f_1(z)$ может быть осуществлен и притом единственным образом.

§ 1. Начнем с решения задачи I; благодаря условиям (16), мы имеем

$$\Omega^{(\gamma)}(R)=\sum_{k=0}c_k\gamma_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}R(z)f(z)\,dz, \tag{1.1}$$

откуда вытекает (12), ибо

$$|\Omega^{(\gamma)}(R)|\leqslant M(f^{(\gamma)})L(R). \tag{1.2}$$

Так как функция $f_1^{(\gamma)}(z)$ определяется, по теореме Pick'a, формулой (19), то надо найти только $R_1(z)$. Знак равенства в (1.2) имеет место только в том случае, когда на всей окружности $|z|=1$, согласно (1.1) и (8), имеем

$$\begin{aligned}\arg\{R_1(z)f_1(z)z\}&=\arg\left\{\frac{zR_1(z)q(z)}{q^*(z)}\right\}=\arg\left\{\frac{z^{\sigma+1}R_1(z)}{[q^*(z)]^2}\right\}=\\&=\arg\left\{\frac{z^{\sigma+1}P^*(z)\psi(z)}{[q^*(z)]^2P(z)}\right\}=\arg\left\{\frac{z^{\sigma+1}\psi(z)}{P(z)P^*(z)}\cdot\left[\frac{P^*(z)}{q^*(z)}\right]^2\right\}=\\&=\arg\left\{\frac{\psi(z)}{z^{\nu-1}}\left[\frac{P^*(z)}{q^*(z)}\right]^2\right\}=\alpha=\text{const};\end{aligned} \tag{1.3}$$

отсюда для $|z|=1$ получаем

$$e^{-i\alpha}\frac{\psi(z)}{z^{\nu-1}}\left[\frac{P^*(z)}{q^*(z)}\right]^2 \geqslant 0. \tag{1.4}$$

Так как $\psi(z)\in A$, а $q^*(z)\neq 0$ при $|z|\leqslant 1$, то при $|z|\leqslant 1$ имеем

$$e^{-i\alpha}\psi(z)\,z^{-\nu+1}\left[\frac{P^*(z)}{q^*(z)}\right]^2 = z^{-\nu+1}(a_0+a_1z+\ldots+a_{2\nu-2}z^{2\nu-2}+\ldots). \tag{1.5}$$

Условие (1.4) дает

$$\{a_k\}_{2\nu-1}^{\infty}=0, \quad a_i=\bar a_{2\nu-2-i} \quad (i=0, 1, 2, \ldots, 2\nu-2); \tag{1.6}$$

таким образом,

$$e^{-i\alpha}\psi(z)\,z^{-\nu+1}\left[\frac{P^*(z)}{q^*(z)}\right]^2 = z^{-\nu+1}p(z), \tag{1.7}$$

где $p(z)$ — полином степени $\leqslant 2\nu-2$, подчиненный условию

$$p(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{\nu-1}z^{\nu-1}+\bar a_{\nu-1}z^{\nu}+\ldots+\bar a_0 z^{2\nu-2}\equiv p^*(z). \tag{1.8}$$

Так как при $|z|=1$ полином $z^{-\nu+1}p(z)$ неотрицателен, то, по теореме Fejér'а, при $|z|=1$ имеем

$$z^{-\nu+1}p(z)=|\tau(z)|^2=\tau(z)\bar\tau\left(\frac{1}{z}\right), \tag{1.9}$$

где $\tau(z)$ — полином степени не выше $\nu-1$. Таким образом, при всех значениях z

$$p(z)\equiv\tau(z)\,\tau^*(z),$$

откуда окончательно имеем

$$\psi_1(z)=e^{i\alpha}\left[\frac{q^*(z)}{P^*(z)}\right]^2\tau(z)\,\tau^*(z), \quad R_1(z)=e^{i\alpha}\frac{[q^*(z)]^2\,\tau(z)\,\tau^*(z)}{P(z)\,P^*(z)}. \tag{1.10}$$

ТЕОРЕМА I′. *Для всех функций $R(z)\in B$ и $f(z)$, $\psi(z)\in A$ справедливы неравенства*

$$\frac{|\Omega^{(\gamma)}(R)|}{L(R)}\leqslant\lambda_0, \quad \frac{|\omega^{(c)}(\psi)|}{L(\psi)}\leqslant\lambda_0, \quad M(f^{(\gamma)})\geqslant\lambda_0, \tag{1.11}$$

где числа $\{\alpha_k\}_0^s$, $\{\gamma_k\}_0^s$ заданы, λ_0 определяется формулой (18), а

$$c_k=\frac{\gamma_k P^*(z_k)}{P'(z_k)} \quad (k=0, 1, \ldots, s); \tag{1.12}$$

знак равенства в (1.11) имеет место только для функций

$$\left.\begin{aligned} R_1(z)=e^{i\alpha}\frac{[q^*(z)]^2\,\tau(z)\,\tau^*(z)}{P(z)\,P^*(z)}, \quad \psi_1(z)=e^{i\alpha}\left[\frac{q^*(z)}{P^*(z)}\right]^2\tau(z)\,\tau^*(z),\\ f_1^{(\gamma)}(z)=\lambda_0\frac{q(z)}{q^*(z)}, \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

где полином $q^*(z)$ степени $\sigma\leqslant s$ однозначно определяется условиями

$$\lambda_0\frac{q(z_i)}{q^*(z_i)}=\gamma_i \quad (i=0, 1, \ldots, s), \tag{1.14}$$

а $\tau(z)$ — произвольный полином степени $s-\sigma$.

Переходим к рассмотрению задачи II, решение которой содержится в теореме I. Перепишем (1.11), меняя местами функции $\psi(z)$ и $f(z)$ и пользуясь (10):

$$\frac{|\omega^{(c)}(f)|}{L(f)}\leqslant\lambda_0, \quad M(\psi^{(\gamma)})=M(R^{(c)})\geqslant\lambda_0. \tag{1.15}$$

ТЕОРЕМА II. *Для всех функций* $f(z)\in A$, $R(z)\in B$ *справедливы неравенства*

$$\frac{|\omega^{(c)}(f)|}{L(f)}\leqslant\lambda_0, \quad M(R^{(c)})\geqslant\lambda_0, \tag{1.16}$$

где числа $\{c_k\}_0^s$, $\{\alpha_k\}_0^s$ *заданы, а числа* $\{\gamma_k\}_0^s$ *находятся по формуле*

$$\gamma_k=c_k\frac{P'(\alpha_k)}{P^*(\alpha_k)} \quad (k=0,1,\ldots,s); \tag{1.17}$$

знак равенства в (1.16) *имеет место только для функций* *

$$f_2(z)=e^{i\alpha}\left[\frac{q^*(z)}{P^*(z)}\right]^2\tau(z)\,\tau^*(z), \quad R_2^{(c)}(z)=\lambda_0\frac{q(z)}{q^*(z)}\frac{P^*(z)}{P(z)}. \tag{1.18}$$

Рассмотрим тот частный случай теоремы II, когда $|\alpha|<1$ и

$$\left.\begin{aligned}\omega^{(c)}(f)=\sum_{k=0}^{s}\frac{c_k}{k!}f^{(k)}(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\left\{\sum_{k=0}^{s}\frac{c_k}{(z-\alpha)^{k+1}}+\varphi(z)\right\}f(z)\,dz,\\ \varphi(z)\in A.\end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

Мы имеем

$$R(z)=\sum_{k=0}^{s}\frac{c_k}{(z-\alpha)^{k+1}}+\varphi(z), \quad \varphi(z)\in A \tag{1.20}$$

или, согласно (8),

$$R(z)=\left(\frac{1-\bar{\alpha}z}{z-\alpha}\right)^{s+1}\psi(z), \quad \psi(z)=\frac{\sum_{k=0}^{s}c_k(z-\alpha)^{s-k}+(z-\alpha)^{s+1}\varphi(z)}{(1-\bar{\alpha}z)^{s+1}}.$$

Вводя новую переменную

$$y=\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \quad z=\frac{\alpha+y}{1+\bar{\alpha}y}, \tag{1.21}$$

находим

$$\psi\left(\frac{\alpha+y}{1+\bar{\alpha}y}\right)=\psi_1(y)=\sum_{k=0}^{s}c_k y^{s-k}\left(\frac{1+\bar{\alpha}y}{1-|\alpha|^2}\right)^{k+1}+y^{s+1}\psi_2(y), \quad \psi_2(y)\in A. \tag{1.22}$$

У функции $\psi_1(y)$ известны, таким образом, первые $s+1$ коэффициентов

$$\sum_{k=0}^{s}c_k y^{s-k}\left(\frac{1+\bar{\alpha}y}{1-|\alpha|^2}\right)^{k+1}+(y^{s+1})=a_0+a_1y+\ldots+a_sy^s+\ldots; \tag{1.23}$$

следовательно, функция такого типа, наименее уклоняющаяся от нуля, может быть найдена на основании теоремы Carathéodory-Fejér'a ([3]).

Мы приходим к теореме:

---

* Полиномы $q(z)$, $\tau(z)$ и число λ_0 имеют те же значения, как в теореме I, но вместо чисел $\{\gamma_k\}_0^s$ должны быть подставлены их значения из (1.17).

ТЕОРЕМА II'. *Для всех функций $f(z) \in A$ справедливо неравенство*

$$\frac{\omega^{(c)}(f)}{L(f)} = \left| \sum_{k=0}^{s} \frac{c_k f^{(k)}(\alpha)}{k!} \right| : \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} |f(z)| \cdot |dz| \geqslant \lambda_0, \tag{1.24}$$

где λ_0 — наибольший корень уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0\ldots 0 & a_0 & a_1 \ldots a_s \\ 0 & \lambda \ldots 0 & 0 & a_0 \ldots a_{s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots \lambda & 0 & 0 \ldots a_0 \\ \overline{a}_0 & 0 \ldots 0 & \lambda & 0 \ldots 0 \\ \overline{a}_1 & \overline{a}_0 \ldots 0 & 0 & \lambda \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \overline{a}_s & \overline{a}_{s-1} \ldots \overline{a}_0 & 0 & 0 \ldots \lambda \end{vmatrix} = 0; \tag{1.25}$$

числа $\{a_k\}_0^s$ являются первыми коэффициентами разложения (1.23); *знак равенства имеет место только для функции*

$$f_{2'}(z) = e^{i\alpha} \left\{ \frac{q_1^* \left(\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z} \right)}{1 - \overline{\alpha} z} \right\}^2 \tau(z) \tau^*(z), \tag{1.26}$$

где полином $q_1^*(y)$ степени $\sigma \leqslant s$ однозначно определяется из условия

$$\lambda_0 \frac{q_1(y)}{q_1^*(y)} = \sum_{k=0}^{s} c_k y^{s-k} \left(\frac{1 + \overline{\alpha} y}{1 - |\alpha|^2} \right)^{k-1} + (y^{s+1}), \tag{1.27}$$

а $\tau(z)$ — произвольный полином степени $\nu - 1$, где $\nu = s - \sigma + 1$ — кратность корня λ_0.

Из этой теоремы при $\alpha = 0$ мы получим теорему F. Riesz'a ([10]); если же мы положим в (1.24) $c_0 = c_1 = \ldots = c_{s-1} = 0$, $c_s = 1$, то получим теорему Г. М. Голузина [([19]), § 4, теорема 1]*.

§ 2. Перейдем теперь к задаче III**. Рассмотрим функцию $f_2(z)$ (1.18) и подберем числа $\{c_k\}_0^s$ так, чтобы выполнялись условия

$$f_2(\alpha_i) = \gamma_i \quad (i = 0, 1, \ldots, s), \tag{2.1}$$

где числа $\{\gamma_i\}_0^s$ заданы; вводя обозначения***

$$[q^*(z)]^2 \tau(z) \tau^*(z) = \varphi(z), \tag{2.2}$$

где $\varphi(z)$ — полином степени $2s$; мы видим, что этот полином должен быть найден по условиям

---

* Экстремальная функция, приводимая Голузиным, не является наиболее общей — она получится из нашего общего решения (1.26), если положить в нем $\sigma = s$, $\nu = 1$, $\tau(z) = 1$.

** Задача о нахождении $\min L(f^{(\gamma)})$ была впервые решена S. Kakeya ([22]).

*** $e^{i\alpha}$ можно включить в полином $[q^*(z)]^2$.

$$\varphi(\alpha_i) = f_2(\alpha_i)[P^*(\alpha_i)]^2 = \gamma_i [P^*(\alpha_i)]^2 \quad (i = 0, 1, \ldots, s). \tag{2.3}$$

На основании леммы, сформулированной во введении, этот полином можно единственным образом представить в форме (22), или, что то же самое, в форме (2.2). Таким образом, мы можем считать полином $\varphi(z)$ (2.2) подобранным по условиям (2.3); числа же $\{c_i\}_0^s$, фигурирующие в теореме II, можно найти по формулам (10); подобрав таким образом полином $\varphi(z)$, имеем функцию

$$f_2^{(\gamma)}(z) = \frac{\varphi(z)}{[P^*(z)]^2}, \quad f_2^{(\gamma)}(\alpha_i) = \gamma_i \quad (i = 0, 1, \ldots, s). \tag{2.4}$$

По теореме II,

$$\frac{|\omega^{(c)}(f^{(\gamma)})|}{L(f^{(\gamma)})} \leqslant \frac{|\omega^{(c)}(f_2^{(\gamma)})|}{L(f_2^{(\gamma)})}, \tag{2.5}$$

откуда вытекает

$$L(f^{(\gamma)})L \geqslant (f_2^{(\gamma)}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \frac{|\varphi(z)|\,|dz|}{|P^*(z)|^2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left| \frac{q^*(z)\tau(z)}{P^*(z)} \right|^2 |dz|. \tag{2.6}$$

ТЕОРЕМА III. *Для всех функций $f(z)$, $\psi(z) \in A$, $R(z) \in B$ справедливы неравенства*

$$L(f^{(\gamma)}) \geqslant \mu, \quad \frac{|\Omega^{(\gamma)}(R)|}{M(R)} \leqslant \mu, \quad \frac{|\omega^{(c)}(\psi)|}{M(\psi)} \leqslant \mu, \tag{2.7}$$

где числа $\{\gamma_k\}_0^s$ заданы, а числа $\{c_k\}_0^s$ находятся по формуле

$$c_k = \gamma_k \frac{P^*(\alpha_k)}{P'(\alpha_k)} \quad (k = 0, 1, \ldots, s). \tag{2.8}$$

При этом

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} \left| \frac{q^*(z)\tau(z)}{P^*(z)} \right|^2 |dz|, \tag{2.9}$$

где полином $q^*(z)$ степени $\sigma \leqslant s$, все корни которого лежат в области $|z| > 1$, и полином $\tau(z)$ степени $s - \sigma$ определяются из условий

$$[q^*(\alpha_i)]^2 \tau(\alpha_i) \tau^*(\alpha_i) = \gamma_i [P^*(\alpha_i)]^2 \quad (i = 0, 1, \ldots, s); \tag{2.10}$$

знак равенства в (2.7) имеет место только для функций

$$\left. \begin{aligned} f_3^{(\gamma)}(z) = \left[\frac{q^*(z)}{P^*(z)} \right]^2 \tau(z)\tau^*(z), \quad R_3(z) = e^{i\alpha} \frac{q(z)P^*(z)}{q^*(z)P(z)}, \\ \psi_3(z) = e^{i\alpha} \frac{q(z)}{q^*(z)}; \end{aligned} \right\} \tag{2.11}$$

Если вместо условий (13) задать ряд младших коэффициентов, то мы получим проблему F. Riesz'a ([10]).

Рассмотрим тот частный случай, когда $s=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=\alpha$,

$$f(0)=\gamma_0, \quad f(\alpha)=\gamma_1; \tag{2.12}$$

при заданном условии $f(0)=\gamma_0$ мы находим

$$\frac{L(f)}{|f(\alpha)|} \geqslant \mu,$$

откуда

$$\frac{|f(\alpha)|}{L(f)} \leqslant \frac{1}{\mu}. \tag{2.13}$$

Таким образом, мы можем найти максимум $|f(\alpha)|$ для функции $f(z) \in A$, удовлетворяющей условиям

$$f(0)=\gamma_0, \quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|=1} |f(z)| \cdot |dz| = 1; \tag{2.14}$$

этот частный случай был рассмотрен S. Kakeya ([22]), а затем Г. М. Голузиным [([19]), § 4, теорема 3].

Рассмотрим, наконец, задачу IV*; меняя местами функции $\psi(z)$ и $f(z)$ в (2.7), мы имеем

$$\frac{|\omega^{(c)}(f)|}{M(f)} \leqslant \mu, \quad L(\psi^{(\tau)}) = L(R^{(c)}) \geqslant \mu. \tag{2.15}$$

ТЕОРЕМА IV. *Для всех функций* $f(z) \in A$, $R(z) \in B$ *справедливы неравенства*

$$\frac{|\omega^{(c)}(f)|}{M(f)} \leqslant \mu, \quad L(R^{(c)}) \geqslant \mu, \tag{2.16}$$

где числа $\{c_k\}_0^s$ *заданы*, μ *определяется формулой* (2.9), *и полиномы* $q_*^*(z)$ *и* $\tau(z)$ *находятся из соотношений*

$$[q^*(\alpha_i)]^2 \tau(\alpha_i) \tau^*(\alpha_i) = c_i P'(\alpha_i) P^*(\alpha_i) \qquad (i=0, 1, \ldots, s); \tag{2.17}$$

знак равенства в (2.16) *имеет место для функций*

$$f_4(z) = e^{i\alpha} \frac{q(z)}{q^*(z)}, \quad R_4^{(c)}(z) = \frac{[q^*(z)]^2 \tau(z) \tau^*(z)}{P(z) P^*(z)}. \tag{2.18}$$

Рассмотрим снова тот частный случай, когда

$$\left.\begin{aligned} \omega^{(c)}(f) &= \sum_{k=1}^{s} \frac{c_k f^{(k)}(\alpha)}{k!}, \\ P(z) &= (z-\alpha)^{s+1}, \quad |\alpha| < 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Задача о нахождении $\max\{|\omega^{(c)}(f)| : M(f)\}$ была впервые решена S. Kakeya ([illegible]).

ТЕОРЕМА IV′. *Для всех функций* $f(z)\in A$, $R(z)\in B$ *справедливы неравенства*

$$\left.\begin{aligned} &\left|\sum_{k=0}^{s}\frac{c_k f^{(k)}(\alpha)}{k!}\right| : M(f)\leqslant\mu;\\ &\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=1}\left|\sum_{k=0}^{s}\frac{c_k}{(z-\alpha)^{k+1}}+\omega(z)\right|\cdot|dz|\geqslant\mu,\quad \omega(z)\in A, \end{aligned}\right\}\qquad(2.20)$$

где

$$\mu=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|y|=1}\frac{|q_1^*(y)\tau_1(y)|^2}{1-|\alpha|^2}|dy|,\qquad(2.21)$$

причем полином $q_1^*(y)$ *степени* $\sigma\leqslant s$, *все корни которого лежат в области* $|y|>1$, *и полином* $\tau_1(y)$ *степени* $s-\sigma$ *определяются из условия*

$$\begin{gathered}[q_1^*(y)]^2\tau_1(y)\tau_1^*(y)=\\ =(1-|\alpha|^2)^{2s}\sum_{k=0}^{s}c_k y^{s-k}\left(\frac{1+\bar\alpha y}{1-|\alpha|^2}\right)^{k-1}+(y^{s+1});\end{gathered}\qquad(2.22)$$

знак равенства в (2.20) *имеет место только для функций*

$$\left.\begin{aligned} f_{4'}(z)&=e^{i\alpha}\frac{q(z)}{q^*(z)},\\ R_{4'}(z)&=\frac{[q^*(z)]^2\tau(z)\tau^*(z)}{[(z-\alpha)(1-\bar\alpha z)]^{s+1}}, \end{aligned}\right\}\qquad(2.23)$$

где

$$\left.\begin{aligned} q^*(z)&=(1-\bar\alpha z)^{\sigma}q_1^*\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}\right),\\ \tau(z)&=(1-\alpha z)^{s-\sigma}\tau_1^*\left(\frac{z-\alpha}{1-\bar\alpha z}\right). \end{aligned}\right\}\qquad(2.24)$$

При $\alpha=0$ получим результат нашей заметки ([10])*.

Поступило
9. IX. 1947

---

* Как мне любезно указал в письме G. Szegö, этот результат был впервые получен O. Szász'ем. [([11]), ([12])] и опубликован на венгерском языке; недавно Г. М. Голузин вновь получил эти результаты в ([13]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pick G., Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden, Math. Ann. 77, (1916), 7—23.

[2] Ахиезер Н. И., Об одной minimum-проблеме теории функций и о числе корней алгебраического уравнения, которые лежат внутри единичного круга, Изв. Ак. Наук СССР, ОМЕН, 9 (1931) 1169—1189.

[3] Carathéodory C. und Fejér L., Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard—Landauschen Satz. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 32 (1911), 218—239.

[4] Takenaka S., On the mean modulus of regular functions, Japanese Journ. of Math. II (1925), 47—50.

[5] Takagi T., On an algebraic problem related to an analytic theorem of Carathéodory and Fejér and on an allied theorem of Landau, ibid., I (1924), 83—93.

[6] Takagi T., Remark on an algebraic problem, ibid., II (1925), 13—18.

[7] Landau E., Über einen Bieberbachschen Satz, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 46 (1922), 456—462.

[8] Fejér L., Über gewisse Minimumproblem der Funktionentheorie, Math. Ann., 97 (1927), 104—123.

[9] Egerváry E., Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie, ibid., 99 (1928), 542—561.

[10] Riesz F., Über Potenzreihen mit vorgeschreibenen Anfangsgliedern, Acta Mathematica, 42 (1920), 145—171.

[11] Szász O., Über die Koeffizienten beschränkter Potenzreihen, Math. und Naturwiss. Anzeiger der Ungar. Akademie der Wiss., t. XIII (1926), 488—503.

[12] Szász O., Über beschränkte Potenzreihen, ibid., 504—519.

[13] Геронимус Я. Л., О некоторых экстремальных задачах, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 2 (1937), 185—202.

[14] Геронимус Я. Л. Об одной экстремальной задаче Чебышева. Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 4 (1938), 445—456.

[15] Геронимус Я. Л., Об одной задаче F. Riesz'а и обобщенной задаче Чебышева—Коркина—Золотарева, Изв. Ак. Наук СССР, 3 (1939), 279—288.

[16] Геронимус Я. Л., К проблеме коэффициентов для ограниченных функций, Доклады Ак. Наук СССР, XIV (1937), 95—96.

[17] Geronimus J. L., The generalization of a lemma of M. S. Kakeya, Bull. of the American Math. Soc., 47 (1941), 93—95.

[18] Голузин Г. М., О задаче Каратеодори — Фейера и об одной аналогичной задаче, Матем. сб., 18 (1946), 213—226.

[19] Голузин Г. М., Оценки для аналитических функций с ограниченным средним модулем, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, XIII (1946).

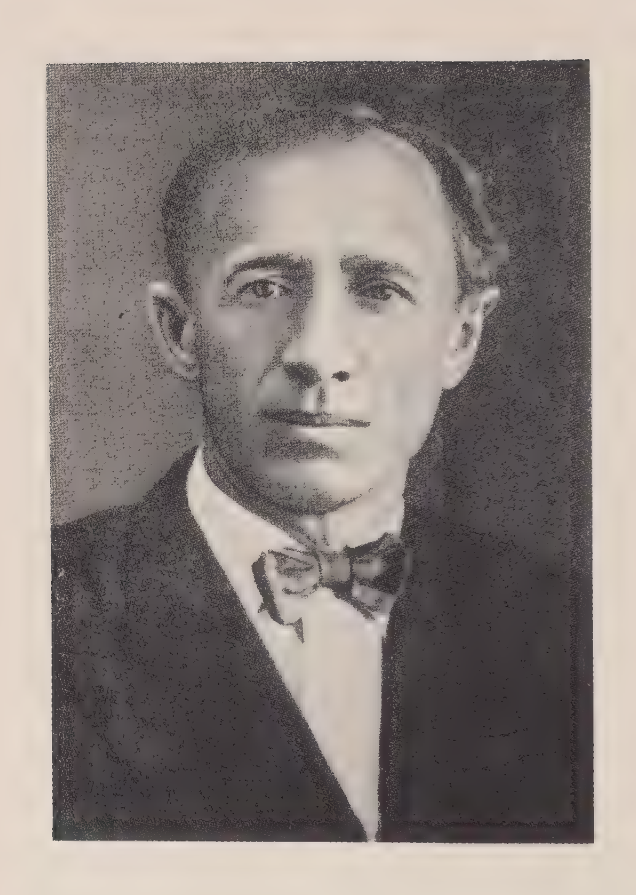
[20] Kakeya S., Maximum modulus of some expressions of limited analytic functions, Trans. American Math. Soc., 22 (1921), 489—504.

[21] Kakeya S., General mean modulus of analytic functions, Proc. Phys.-Math. Soc. of Japan, 3 (1921), 48.

[22] Kakeya S., Upper and lower limits of some quantities regarding analytic functions, Tôhoku Science Rep. 6 (1917), 153—168, Jap. Phys. Math. Soc. Proc., 6 (1924), 91—98.

[23] Kakeya S., On the maximum modulus of an analytic function, Tôhoku Science Rep. 4 (1915), 297—311.

[24] Gronwall T., On the maximum modulus of an analytic function, Ann. of Math. 16 (1914—15), 77—81.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 337–340

НИКОЛАЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ЧЕБОТАРЕВ

1894—1947

2 июля прошлого года скончался от тяжелой болезни в возрасте 53 лет профессор Казанского университета, член-корреспондент Академии Наук СССР Николай Григорьевич Чеботарев.

В лице Н. Г. Чеботарева наша страна потеряла крупнейшего алгебраиста, причем надо сказать, что за все время своего развития русская наука может указать только два имени, которые можно поставить в области алгебры рядом с именем Чеботарева,—это знаменитого петербуржца Золотарева, одного из создателей теории идеальных чисел, и Молина, давшего в свое время первые глубокие теоремы теории алгебр.

Николай Григорьевич Чеботарев родился 15 июня 1894 года. Отец его был юристом. Еще в младших классах гимназии начали обнаруживаться исключительные математические способности Н. Г. Пятнадцати лет Н. Г. самостоятельно доказывает малую теорему Ферма, а семнадцати—решает задачу о погонной линии, сводя ее на интегрирование дифференциального уравнения второго порядка; тогда же он одолевает основной мемуар Лобачевского.

В 1912 г. Н. Г. поступает в Киевский университет. Эти годы были годами расцвета алгебраической школы Д. А. Граве. Н. Г. посещает семинары Граве, изучает теорию алгебраических чисел и многое другое; в эти же годы он делает первую работу, доказывая свою «арифметическую теорему монодромии» о том, что композицией группы инерции образуют всю группу Галуа. На 1915 и 1916 гг. Киевский университет, в связи с войной, эвакуируется в Саратов; туда переезжает и Чеботарев. В Саратове Н. Г. сближается со мною и начинает работать над известной задачей Фробениуса о плотностях простых чисел, принадлежащих к данному классу подстановок группы Галуа алгебраического поля, которой я тогда занимался. Решение этой задачи позже прославило имя Чеботарева.

В 1916 г. в Саратове Н. Г. был оставлен Граве при университете для подготовки к профессорскому званию. Вернувшись в Киев, Н. Г. живет один и занимается математикой с неослабевающей энергией. Он пишет ряд работ: о поверхностях переноса, о критерии вещественности корней

трансцендентных уравнений, о линиях и телах постоянной ширины, об обратной задаче Чирнгаузена и т. д. Одновременно Н. Г. сдает магистерские экзамены и по прочтении двух пробных лекций избирается приват-доцентом Киевского университета. Так как родители Н. Г. жили тогда в Одессе и в то время (1921 год) нечего было и думать перевезти их в Киев, Н. Г. решает переехать в Одессу. К этому времени Н. Г. имеет уже более 10 разнообразных и очень интересных работ. Научная работа Чеботарева, несмотря на большие материальные трудности, становится в Одессе еще более интенсивной, чем в Киеве. В самом конце 1921 г. он усовершенствует доказательство теоремы Кронекер-Вебера, а летом 1922 г. доказывает, наконец, предположение Фробениуса о плотностях.

Поясним, почему этой теореме придается такое большое значение. Совсем легко показать, что в ряду всех натуральных чисел бесконечно много простых чисел, но долго не удавалось доказать того же самого для арифметической прогрессии $mx + n$, где m и n взаимно простые. Доказательство теоремы о том, что бесконечно много простых чисел в прогрессии, было получено Дирихле, причем эта теорема представляет собою и до сих пор одну из самых глубоких в теории чисел. Теорема Дирихле может быть высказана в терминах теории поля деления круга на m равных частей так: для любого целого числа α этого поля и любой подстановки s его группы Галуа есть бесконечно много таких простых чисел p, что

$$\alpha^p \equiv \alpha/s \pmod p),$$

где α/s есть число, получающееся из α подстановкой s. Фробениус понял, что теорема Дирихле о прогрессии в этой форме обобщается на любые поля алгебраических чисел (если только подстановку s заменить классом подстановок группы Галуа поля). Однако Фробениусу, несмотря на упорные 16-летние исследования, удалось для общего поля алгебраических чисел доказать лишь некоторый частный результат. Полную теорему, обобщающую теорему Дирихле о прогрессии на общее алгебраическое поле, доказал лишь Чеботарев.

Эта работа поставила Чеботарева в ряд небольшого числа классиков теории алгебраических чисел. Она стояла в самом центре тогдашних интересов и стала поэтому сразу очень широко известной, тем более, что, опираясь на примененный в ней Чеботаревым метод присоединения полей деления круга, немецкому математику Артину удалось доказать одну из основных теорем теории поля классов.

В 1927 г. Н. Г. переходит из Одесского в Казанский университет. Научное творчество Чеботарева не ослабевает, он печатает работу за работой. В 1931 году появляется вторая первоклассная работа Чеботарева. Она посвящена теории резольвент, т. е. вопросу о том, на цепь каких простейших вспомогательных уравнений может быть сведено решение данного алгебраического уравнения n-й степени; каковы числа параметров, от которых зависят коэффициенты этих вспомогательных уравнений. Этой важной задачей занимались крупнейшие математики—

Клейн, Гильберт и другие, но получили в ней только частные результаты. Лишь Чеботареву удалось получить в этой области общую теорему. Эта работа Чеботарева также стала сразу широко известной.

В 1932 г. состоялся очередной международный конгресс математиков в Цюрихе, который совпадал со 100-летием со дня смерти гениального французского математика Эвариста Галуа. Международное признание важности алгебраических работ Чеботарева было в то время так велико, что президиум конгресса предложил прочесть обзорный доклад памяти гениального алгебраиста не кому-нибудь другому, а именно Чеботареву.

В сравнительно недавние годы, во время Отечественной войны, Н. Г. сделал вторую важную работу по теории резольвент, в которой он дает в общем случае границу, больше которой должно быть число параметров хотя бы в одном вспомогательном уравнении цепи.

Чеботарев работал в математике до последних дней жизни. Приехав в Москву на операцию, оказавшуюся для него роковой, Н. Г. за несколько дней до того, как лечь в больницу, выступил с докладом в Московском математическом обществе о своей последней работе.

Одновременно с Н. Г. в Казани работал крупный геометр П. А. Широков, с которым Н. Г. был тесно связан. Их совместная деятельность подняла значение Казанского университета, как математического центра, до высоты, которой он не достигал со времен Лобачевского. При Н. Г. в Казани был создан научно-исследовательский институт математики, которого он был бессменным директором. С 1943 г. Н. Г. состоял президентом Казанского физико-математического общества.

Круг математических вопросов, интересовавших Чеботарева, был очень широк. Он часто читал необязательные курсы по далеким от своей специальности вопросам и нередко фиксировал эти курсы в виде литографированных лекций. Так возникли, например, его литографированные курсы вариационного исчисления и топологии. Известные книги Чеботарева по теории Галуа и теории групп Ли тоже восходят к его лекциям в университете.

Учеником Чеботарева его одесского периода является М. Г. Крейн, член-корреспондент Академии наук УССР, а в Казани, где он создал большую школу, учениками его являются профессора В. В. Морозов, И. Д. Адо и др.

Академия Наук СССР еще в 1929 г. избрала Н. Г. своим членом-корреспондентом, а Советское правительство высоко оценило деятельность Чеботарева, присвоив ему звание заслуженного деятеля науки РСФСР и наградив его орденом Ленина и двумя орденами Трудового красного знамени.

После смерти Чеботарева Академия Наук постановила издать полное собрание его сочинений. Это постановление уже проводится в жизнь. Все 62 математические работы Чеботарева, а также интереснейшая его научная автобиография, к сожалению, доведенная только до 1926 г., которые вместе займут более 1000 страниц, будут напечатаны в виде двух больших томов.

Учреждена премия Академии Наук СССР имени Н. Г. Чеботарева. За последние работы по резольвентам Чеботареву посмертно присуждена Сталинская премия 1-й степени.

Николай Григорьевич Чеботарев был человеком необыкновенно высоких нравственных качеств, простым в обращении со всеми, без различия их положения, отзывчивым и прямым. Необыкновенную сердечность и обаяние его личности чувствовали все, с ним соприкасавшиеся. Чеботарев имел исключительные математические способности и притом был, как он сам говорил, математиком-профессионалом. Вся сознательная жизнь его прошла в непрерывном творческом горении. Это и выдвинуло его в число самых крупных математиков современности.

Б. Делоне

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 341—350

И. М. ВИНОГРАДОВ

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ И ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ МЕБИУСА

Дается оценка некоторой тригонометрической суммы, содержащей произведения одинакового числа различных простых сомножителей. Эта оценка применяется далее к выводу одного общего свойства распределения значений числовой функции Мебиуса.

В настоящей работе дается применение моего метода 1934—1937 гг. к выводу оценки для суммы

$$\sum_{k=1}^{K}\left|\sum_{w\leqslant N} e^{2\pi i \alpha k w}\right|,$$

где w пробегает произведения, состоящие из одинакового числа различных простых сомножителей. В частности, дается применение этой оценки к выводу одного общего свойства суммы

$$\sum_{0<n\leqslant N} \mu(n).$$

Результаты настоящей работы ранее указывались в моих работах (¹) лишь в менее совершенном виде и без доказательств. Дальнейшее уточнение этих результатов с помощью моего метода представляет уже значительные трудности.

Обозначения. Буквою θ обозначаем число с условием $-1\leqslant\theta\leqslant 1$; c — положительное постоянное число; ε — произвольно малое положительное постоянное число. При $B>0$ обозначение $A\ll B$ показывает, что $|A|\leqslant cB$.

При вещественных A и B с условием $0<B-A\leqslant 1$ обозначения

$$A<z<B \pmod 1,\quad A\leqslant z<B \pmod 1,\quad A<z\leqslant B \pmod 1,$$
$$A\leqslant z\leqslant B \pmod 1$$

соответственно показывают, что при некотором целом C имеем

$$A+C<z<B+C,\quad A+C\leqslant z<B+C,\quad A+C<z\leqslant B+C,$$
$$A+C\leqslant z\leqslant B+C.$$

При вещественном x символом $\{x\}$ обозначаем дробную часть числа x.

Буквою N обозначаем число с условием $N > c_0$, где c_0 достаточно велико; полагаем $r = \log N$.

ЛЕММА 1. *Пусть* $0 < c < 0{,}1$; $0 < \gamma < 0{,}4$, P — *произведение простых чисел, не превосходящих* $N^{0,2}$. *Тогда, полагая*

$$D = r^{\frac{\log r}{\log (1+c)}},$$

делители d числа P, не превосходящие N, можно распределить среди $< D$ совокупностей, причем для каждой совокупности существует свое φ с условием, что принадлежащие этой совокупности значения d удовлетворяют неравенствам

$$\varphi < d \leqslant \varphi^{1+c}.$$

Для некоторых совокупностей будет $\varphi = N^{\gamma}$; для каждой же из остальных совокупностей существует целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел x и y такие, что все значения x удовлетворяют неравенству

$$N^{\gamma} < x \leqslant {}^{\gamma+0,2+c},$$

причем все числа d рассматриваемой совокупности, взятые каждое B раз, и только эти числа, получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условию $(x, y) = 1$.

Доказательство Эта лемма есть упрощенная лемма 5, гл. IX моей книги (²).

ЛЕММА 2. *Пусть x и y пробегают целые положительные числа, принадлежащие двум возрастающим последовательностям; u и v пробегают произведения, состоящие соответственно из c_1 и c_2 сомножителей, каждый из которых принадлежит к своей возрастающей последовательности целых положительных чисел. Пусть, далее,*

$$\sqrt{N} \leqslant \tau \leqslant N e^{-r^{\varepsilon_0}},$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad e^{r^{\varepsilon_0}} \leqslant q \leqslant \tau, \quad \Delta = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}},$$

$$f = \Delta^{-1}, \quad K \text{ — целое положительное число с условием } K \ll f^{\varepsilon},$$

$$1 \leqslant U, \quad 1 \leqslant X, \quad UX \ll N\Delta^3, \quad U' \ll U < U', \quad X' \ll X < X',$$

$$S = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{u} \sum_{x} \sum_{y} \sum_{v} e^{2\pi i \alpha k u x y v} \right|,$$

где суммирование распространяется на область

$$U < u \leqslant U', \quad X < x \leqslant X', \quad uxyv \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Тогда имеем

$$S \ll KN\left(\Delta^{1-\varepsilon} + \left(\frac{1}{UX} + \frac{UX}{N}\right)^{0,5-\varepsilon}\right).$$

Доказательство. Эта лемма есть незначительное видоизменение леммы 6, гл. IX моей книги (²). По недосмотру, в этой книге указано лишь условие $N^{0,25} \ll UX \ll N^{0,75}$. Однако то же доказатель-

ство с очевидным уточнением (конец доказательства — случай $q > N^{0,3}$) производится и при условии $UX \ll N\Delta^3$. В соответствии с этим в конце доказательства теоремы 3 указанной главы моей книги (случай $M_4 > N^{0,2}$) следует рассматривать случаи $M_4 > N\Delta^3$ и $M_4 \leqslant N\Delta^3$.

ЛЕММА 3. *Пусть*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}, \quad (a, q) = 1, \quad 2 < q < W, \quad 1 < W_0 \leqslant W,$$

$$S = \sum_{0 < z \leqslant W_0} \min\left(\frac{W}{z}, \frac{1}{2(\alpha z)}\right).$$

Тогда

$$S \leqslant (W_0 + 3{,}5q + 12Wq^{-1}) \log W.$$

Доказательство. Эта лемма есть лемма 8,b гл. 1 моей книги (2).

ТЕОРЕМА 1 *Пусть l — целое положительное число и w пробегает произведения, состоящие из l различных простых сомножителей. Пусть, далее,*

$$\sqrt{N} \leqslant \tau \leqslant Ne^{-r^{\varepsilon_0}},$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad e^{r^{\varepsilon_0}} \leqslant q \leqslant \tau, \quad \Delta = \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{q}{N}},$$

$$f = \Delta^{-1}, \quad K \text{ — \textit{целое положительное число с условием} } K \ll f^2,$$

$$S = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{w \leqslant N} e^{2\pi i \alpha k w} \right|.$$

Тогда имеем

$$S \ll KN(\Delta^{1-\varepsilon'} + N^{-0{,}2+\varepsilon'}).$$

Доказательство. Пусть δ пробегает произведения, состоящие из n различных простых сомножителей, не превосходящих $N^{0,2}$. Пусть z_h пробегает произведения, состоящие из h различных простых сомножителей, превосходящих $N^{0,2}$. Согласно лемме 1, все значения δ, не превосходящие N, можно распределить среди $< D$ совокупностей, причем для каждой совокупности можно указать число φ с условием, что все значения δ этой совокупности будут подчинены условию

$$\varphi < \delta \leqslant \varphi^{1+c}.$$

Рассмотрим сумму

$$S_h = \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_{\delta} \sum_{z_h \leqslant N} e^{2\pi i \alpha k \delta z_h} \right|,$$

где δ пробегает значения δ, принадлежащие какой-либо одной из этих совокупностей.

Сначала займемся совокупностью с условием $\varphi > N^{0,4}$. Пусть $\gamma = 0{,}4$; $\sigma = 0{,}2$. Существует целое положительное число B и две

возрастающие последовательности целых положительных чисел x и y такие, что все значения x удовлетворяют условию

$$N^{0,4} < x \leqslant N^{0,6+c}, \tag{1}$$

причем все значения δ рассматриваемой совокупности, взятые каждое B раз, и только эти значения, получим, если из всех произведений xy выберем лишь удовлетворяющие условию $(x, y) = 1$. Поэтому

$$S_h \ll \sum_{k=1}^{K} \left| \sum_x \sum_y \sum_{z_h} e^{2\pi i \alpha k x y z_h} \right|,$$

где суммирование распространяется на область

$$xyz_h \leqslant N, \quad (x, y) = 1.$$

Но интервал (1) можно разбить на $\ll r$ интервалов вида $X < x \leqslant X'$, где $X' \ll X < X'$. В соответствии с этим последняя сумма разобьется на $\ll r$ новых сумм, к каждой из которых уже можно применить лемму 2 $(U = 1,\ v = z_h)$; получим

$$S_h \ll KN \left(\Delta^{1-\varepsilon'} + \left(\frac{1}{N^{0,4}} + \frac{N^{0,6}}{N} \right)^{0,5-\varepsilon'} \right) \ll KN (\Delta^{1-\varepsilon'} + N^{-0,2+\varepsilon'}).$$

Далее мы рассмотрим случай $\varphi \leqslant N^{0,4}$. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь самого трудного случая, а именно предположим, что $\varphi < N^{0,2}$ и постараемся при этом оценить сумму S_h для всех случаев $h = 1, 2, 3, 4$ (при $h = 0$, ввиду $\varphi < N^{0,2}$, очевидно, $S_h \ll KN^{0,2+c}$; при $h > 4$, очевидно, $S_h = 0$).

Пусть P - произведение всех простых чисел, не превосходящих $N^{0,2}$, и Q — произведение всех простых чисел с условием $N^{0,2} < p \leqslant N$. При $s = 1, 2, 3, 4$, полагая

$$\sum_{\delta} \sum_{\substack{y_1 \backslash Q \\ \delta y_1 \ldots \delta y_s \leqslant N}} \cdots \sum_{y_s \backslash Q} e^{2\pi i \alpha k \delta y_1 \ldots y_s} = W_s, \tag{2}$$

имеем

$$W_s = \sum_{\delta} \sum_{d_1 \backslash P} \sum_{\substack{m_1 > 0 \\ \delta d_1 m_1 \ldots d_s m_s \leqslant N}} \cdots \sum_{d_s \backslash P} \sum_{m_s > 0} \mu(d_1) \ldots \mu(d_s) e^{2\pi i \alpha k \delta d_1 m_1 \ldots d_s m_s}.$$

Среди произведений $y_1 \cdots y_s$ левой части равенства (2) при данном δ данное z_h или встретится s^h раз (так как каждый простой сомножитель его может входить в $y_1, \ldots, y_s$), или же совсем не встретится. Так как среди произведений $y_1, \ldots, y_s$ (при данном δ) может находиться одно, равное 1, и $\ll N^{0,8} \delta^{-1}$ произведений, делящихся на квадрат простого делителя числа Q, то из (2) следует

$$sS_1 + s^2 S_2 + s^3 S_3 + s^4 S_4 = W_s + O(N^{0,8+c}).$$

Это равенство при $s=1, 2, 3, 4$ дает

$$\begin{aligned} S_1+S_2+S_3+S_4&=W_1+O(N^{0,8+c}),\\ 2S_1+4S_2+8S_3+16S_4&=W_2+O(N^{0,8+c}),\\ 3S_1+9S_2+27S_3+81S_4&=W_3+O(N^{0,8+c}),\\ 4S_1+16S_2+64S_3+256S_4&=W_4+O(N^{0,8+c}). \end{aligned}$$

Определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 8 & 16\\ 3 & 9 & 27 & 81\\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{vmatrix}$$

не равен нулю. Поэтому при некоторых постоянных $\alpha_{i,j}$ ($i=1, 2, 3, 4$; $j=1, 2, 3, 4$) отсюда найдем

$$\begin{aligned} S_1&=\alpha_{1,1}W_1+\alpha_{1,2}W_2+\alpha_{1,3}W_3+\alpha_{1,4}W_4+O(N^{0,8+c}),\\ S_2&=\alpha_{2,1}W_1+\alpha_{2,2}W_2+\alpha_{2,3}W_3+\alpha_{2,4}W_4+O(N^{0,8+c}),\\ S_3&=\alpha_{3,1}W_1+\alpha_{3,2}W_2+\alpha_{3,3}W_3+\alpha_{3,4}W_4+O(N^{0,8+c}),\\ S_4&=\alpha_{4,1}W_1+\alpha_{4,2}W_2+\alpha_{4,3}W_3+\alpha_{4,4}W_4+O(N^{0,8+c}). \end{aligned}$$

Следовательно, достаточно остановиться на оценке W_1, W_2, W_3, W_4. Мы ограничимся здесь лишь оценкою W_4, так как W_1, W_2, W_3 оцениваются аналогично.

При каждом $j=1, 2, 3, 4$ все значения d_j распределятся среди $<D$ совокупностей (лемма 1), а все значения m_j распределятся среди $\ll r$ совокупностей с условиями вида

$$M_j<m_j\leqslant M_j', \quad 2M_j\leqslant M_j'<4M_j.$$

Пусть

$$T=\sum_{k=1}^{K}\Bigl|\sum_{\delta}\sum_{d_1}\sum_{d_2}\sum_{d_3}\sum_{d_4}\sum_{m_1}\sum_{m_2}\sum_{m_3}\sum_{\substack{m_4\\ \delta d_1d_2d_3d_4m_1m_2m_3m_4\leqslant N}} e^{2\pi i\alpha k\delta d_1d_2d_3d_4m_1m_2m_3m_4}\Bigr|,$$

где суммирование распространяется на значения δ выбранной совокупности значений d_1, d_2, d_3, d_4 с некоторыми условиями вида

$$\varphi^{(1)}<d_1\leqslant F^{(1)}, \quad \varphi^{(2)}<d_2\leqslant F^{(2)}, \quad \varphi^{(3)}<d_3\leqslant F^{(3)}, \quad \varphi^{(4)}<d_4\leqslant F^{(4)},$$
$$F=\varphi^{1+c}$$

и четыре совокупности значений m_1, m_2, m_3, m_4 с условиями вида

$$M_1<m_1\leqslant M_1', \quad M_2<m_2\leqslant M_2', \quad M_3<m_3\leqslant M_3', \quad M_4<m_4\leqslant M_5'.$$

При

$$\varphi\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)}M_1M_2M_3M_4\leqslant N^{0,8}$$

очевидно имеем

$$T\ll KN^{0,8+c}.$$

Поэтому в дальнейшем ограничимся лишь случаем

$$\varphi\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)}M_1M_2M_3M_4>N^{0,8}.$$

Пусть сначала

$$\varphi\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} > N^{0,4}$$

и пусть t обозначает наименьшее целое число с условием

$$\varphi\varphi^{(1)}\cdots\varphi^{(t)} > N^{0,4}.$$

Очевидно, $t > 0$. Определяя число γ (лемма 1) равенством

$$\varphi\varphi^{(1)}\cdots\varphi^{(t-1)}N^{\gamma} = N^{0,4}$$

(при $t=1$ следует считать $\varphi^{(1)}\cdots\varphi^{(t-1)}=1$), мы будем иметь $\varphi^{(t)} > N^{\gamma}$. Поэтому существует целое положительное B и две возрастающие последовательности целых положительных чисел x и y с условием

$$N^{\gamma} < x \leqslant N^{\gamma+0,2+c}$$

такие, что все значения d_t выбранной совокупности, взятые каждое B раз, и только эти значения, получим, если из всех произведений xy выберем лишь те, которые удовлетворяют условию $(x, y)=1$. Положим

$$u = \delta\, d_1 \cdots d_{t-1}, \quad v = d_{t+1}\cdots d_4 m_1 m_2 m_3 m_4.$$

Все значения u разобьем на $\ll r$ совокупностей, каждая из которых включает лишь значения с условием вида

$$U < u \leqslant U', \quad 2U \leqslant U' < 4U.$$

Равным образом все значения x разобьем на $\ll r$ совокупностей, каждая из которых включает лишь значения с условием вида

$$X < x \leqslant X', \quad 2X \leqslant X' < 4X.$$

Если T' — отвечающая интервалам $U < u \leqslant U'$, $X < x \leqslant X'$ часть суммы T, то, согласно лемме 2, имеем

$$T' \ll KN\left(\Delta^{1-\varepsilon} + \left(\frac{1}{UX} + \frac{UX}{N}\right)^{0,5-\varepsilon}\right),$$

откуда, в силу

$$\frac{1}{UX} \ll \frac{1}{\varphi\varphi^{(1)}\cdots\varphi^{(t-1)}N^{\gamma}} \ll N^{-0,4}, \quad \frac{UX}{N} \ll \frac{FF^{(1)}\cdots F^{(t-1)}N^{\gamma+0,2+c}}{N} \ll N^{-0,4+2c},$$

замечая, что общее число сумм T' будет $\ll r^2$, имеем

$$T \ll KN(\Delta^{1-\varepsilon'} + N^{-0,2+\varepsilon'}).$$

Пусть теперь $\varphi\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)} \leqslant N^{0,4}$ и пусть (это не нарушит общности наших рассуждений) M_4 — наибольшее из всех M_1, M_2, M_3, M_4.

Сначала предположим, что $M_4 \leqslant N^{0,2}$. Пусть t — наименьшее целое число с условием

$$\varphi\varphi^{(1)}\varphi^{(2)}\varphi^{(3)}\varphi^{(4)}M_1\cdots M_t > N^{0,4}.$$

Тогда, полагая

$$u = \delta\, d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 \cdots m_t, \quad v = m_{t+1}\cdots m_4,$$

будем иметь $N^{0,4} < u \leqslant N^{0,6+c}$. Все значения u можно распределить среди $\ll r$ совокупностей с условиями вида

$$U < u \leqslant U', \quad U' \leqslant 2U.$$

К соответствующей какой-либо из этих совокупностей части суммы T можно применить лемму 2 ($X=1$, $x=y=1$); получим

$$T \ll KN(\Delta^{1-\varepsilon'}+N^{-0,2+\varepsilon'}).$$

Наконец, предположим, что $M_4 > N^{0,2}$. Если при этом $N^{0,1} \leqslant q \leqslant N^{0,9}$, или же при одном из условий $q < N^{0,1}$, $q > N^{0,9}$ будет $M_4 > N\Delta^2$, то число решений неопределенного уравнения

$$k\delta\, d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 m_2 m_3 = z$$

будет $\ll \Delta^{-\varepsilon}$. Поэтому (лемма 3)

$$T \ll \Delta^{-\varepsilon} \sum_{0<m\leqslant\frac{KN}{M_4}} \min\left(\frac{KN}{m}, \frac{1}{2(\alpha m)}\right) \ll KN\Delta^{-\varepsilon'}\left(\frac{q}{N}+\frac{1}{q}+N^{-0,2}\right).$$

Если же при одном из условий $q < N^{0,1}$, $q > N^{0,9}$ будет $M_4 \leqslant N\Delta^3$, то применим лемму 2, положив

$$u = m_4, \quad v = \delta\, d_1 d_2 d_3 d_4 m_1 m_2 m_3.$$

Получим ($x=y=1$)

$$T \ll KN\left(\Delta^{1-\varepsilon}+\left(\frac{1}{N^{0,2}}+\Delta^3\right)^{0,5-\varepsilon}\right) \ll KN\Delta^{1-\varepsilon'}.$$

Из всего доказанного и следует справедливость теоремы 1.

Как частный случай (при $l=1$) из этой теоремы следует и теорема 3 моей книги (2).

ЛЕММА 4. *Пусть α и β вещественные,*

$$0 < \Delta < 0,5, \quad \Delta \leqslant \beta-\alpha \leqslant 1-\Delta.$$

Тогда существует периодическая функция $\psi(x)$ с периодом 1 и с условиями

1. $\psi(x)=1$ *в интервале* $\alpha+0,5\Delta < x \leqslant \beta-0,5\Delta$;
2. $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$ *в интервалах* $\alpha-0,5\Delta \leqslant x \leqslant \alpha+0,5\Delta$ *и* $\beta-0,5\Delta \leqslant x \leqslant \beta+0,5\Delta$;
3. $\psi(x)=0$ *в интервале* $\beta+0,5\Delta \leqslant x \leqslant 1+\alpha-0,5\Delta$;
4. $\psi(x)$ *разлагается в ряд Фурье вида*

$$\psi(x) = \beta-\alpha+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos 2\pi kx + b_k \sin 2\pi kx),$$

где, полагая

$$h_k=\frac{1}{k}, \text{ если } k \leqslant \frac{1}{\Delta}, \qquad h_k=\frac{1}{\Delta k^2}, \text{ если } k > \frac{1}{\Delta},$$

будем всегда иметь

$$a_k \ll h_k, \quad b_k \ll h_k.$$

Доказательство. Эта лемма есть частный случай леммы 12, гл. 1 моей книги (2).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть*

$$\sqrt{N} \leqslant \tau \leqslant Ne^{-r^{\varepsilon_0}},$$

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q\tau}, \quad (a, q) = 1, \quad e^{r^{\varepsilon_0}} \leqslant q \leqslant \tau,$$

l — целое положительное число, w пробегает произведения, состоящие из l различных простых сомножителей. Пусть, наконец, при $0 < \beta \leqslant 1$ символ $L(\beta)$ обозначает число значений w, не превосходящих N, с условием $\{\alpha w\} < \beta$. Тогда имеем

$$L(\beta) = \beta L(1) + O(N\Delta_1), \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N}\right)^{0,5-\varepsilon_1} + N^{-0,2+\varepsilon_1}.$$

Доказательство. Пусть

$$\varepsilon' = 0,5\varepsilon_1, \quad \Delta = \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N}\right)^{0,5-\varepsilon'} + N^{-0,2+\varepsilon'},$$

$$K_1 = [\Delta^{-2}], \quad S_k = \sum_{w \leqslant N} e^{2\pi i k\alpha w}.$$

Тогда, согласно теореме 1, при любом целом K с условием $0 < K \leqslant K_1$, полагая

$$U_K = \sum_{k=1}^{K} |S_k|,$$

будем иметь

$$U_K \ll KN\Delta.$$

При $\Delta \geqslant 0,25$ теорема очевидна; поэтому рассмотрим лишь случай $\Delta < 0,25$. Взяв любые A и B с условием $0 \leqslant B - A \leqslant 1 - 2\Delta$, рассмотрим периодическую функцию $\psi(x)$ с периодом 1, указанную в лемме 4, при предположениях:

$$\alpha + 0,5\Delta = A, \quad \beta - 0,5\Delta = B.$$

Тогда будем иметь

$$\psi(\alpha w) = 1, \text{ если } A \leqslant \alpha w \leqslant B \pmod 1;$$

$$0 \leqslant \psi(\alpha w) \leqslant 1, \text{ если } A - \Delta \leqslant \alpha w \leqslant A \pmod 1 \text{ или } B \leqslant \alpha w \leqslant B + \Delta \pmod 1;$$

$$\psi(\alpha w) = 0, \text{ если } B + \Delta \leqslant \alpha w \leqslant A - \Delta + 1 \pmod 1;$$

$$\psi(\alpha w) = (B - A + \Delta) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos 2\pi k w + b_k \sin 2\pi k w); \tag{3}$$

$$a_k \ll h_k, \quad b_k \ll h_k.$$

Но из (3) следует

$$\sum_{w \leqslant N} \psi(\alpha w) = (B - A + \Delta) L(1) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k S'_k + b_k S''_k),$$

где S'_k и S''_k определяются равенством $S_k = S'_k + iS''_k$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k S'_k + b_k S''_k) \ll \sum_{k=1}^{\infty} h_k |S_k| = \sum_{k\leqslant K_1} h_k |S_k| + \sum_{k>K_1} h_k |S_k|.$$

Отсюда, замечая, что при $k \geqslant 1$ имеем

$$0 < h_k - h_{k+1} \ll \frac{1}{k^2},$$

находим

$$\sum_{k\leqslant K_1} h_k |S_k| = h_1 U_1 + h_2(U_2 - U_1) + \ldots + h_{K_1}(U_{K_1} - U_{K_1-1}) =$$
$$= U_1(h_1 - h_2) + U_2(h_2 - h_3) + \ldots + U_{K_1}(h_{K_1-1} - h_{K_1}) + h_{K_1}U_{K_1} \ll$$
$$\ll N\Delta \log K_1 + N\Delta^2 \ll N\gamma.$$

Замечая, что всегда $|S_k| \ll N$, получим также

$$\sum_{k>K_1} h_k |S_k| \ll \sum_{k>K_1} \frac{N}{\Delta k^2} \ll \frac{N}{\Delta k} \ll N\Delta \ll N\Delta_1.$$

Поэтому

$$\sum_{w\leqslant N} \psi(\alpha w) = (B - A) L(1) + O(N\Delta_1). \qquad (4)$$

Обозначим символом $T(A; B)$ число значений αw с условием $A \leqslant \alpha w < B \pmod 1$. Тогда равенство (4) можно привести к виду

$$\theta_1 T(A - \Delta; A) + T(A; B) + T(B; B + \Delta) = (B - A) L(1) + O(N\Delta_1),$$

откуда, ввиду очевидных неравенств

$$T(A - \Delta; A) \ll N\Delta_1, \quad T(B; B + \Delta) \ll N\Delta_1,$$

найдем

$$T(A; B) = (B - A) L(1) + O(N\Delta_1).$$

Отсюда выводим

$$L(\beta) = T(0; 0{,}5\beta) + T(0{,}5\beta; \beta) = \beta L(1) + O(N\Delta_1).$$

С л е д с т в и е. *Пусть q — целое число с условием*

$$e^{r^{\varepsilon_0}} \leqslant q \leqslant Ne^{-r^{\varepsilon_0}},$$

l — целое положительное число, w_l пробегает все не превосходящие N произведения, состоящие из l различных простых сомножителей, w'_l обозначает наименьший неотрицательный вычет числа w_l по модулю q. Тогда, обозначая при $0 < \beta \leqslant 1$ символом $R(\beta)$ число значений w_l с условием $w'_l < \beta q$ (следовательно, $R(1)$ равно числу всех значений w_l), имеем

$$R(\beta) = \beta R(1) + O(N\Delta_1), \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N}\right)^{0{,}5-\varepsilon_1} + N^{-0{,}2+\varepsilon_1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Указанное следствие получим из теоремы 2, полагая $a = 1$, $\theta = 0$, $\tau = Ne^{-r^{\varepsilon_0}}$. Тогда, очевидно, при $w \leqslant N$ имеем $w_l = w$. Кроме того, имеем $R(\beta) = L(\beta)$.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть q — целое число с условием*

$$e^{r^{\varepsilon_0}} \leqslant q \leqslant N e^{-r^{\varepsilon_0}},$$

n пробегает все не превосходящие N целые положительные числа, n' обозначает наименьший неотрицательный вычет числа n по модулю q. Тогда, обозначая при $0 < \beta \leqslant 1$ символом $M(\beta)$ сумму значений функций Мебиуса $\mu(n)$, отвечающих лишь значениям n с условием $n' < \beta q$, имеем

$$M(\beta) = \beta M(1) + O(N\Delta_2) \quad \Delta_2 = \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N}\right)^{0,5-\varepsilon_2} + N^{-0,2+\varepsilon_2}. \tag{5}$$

Доказательство. Числа w_l следствия теоремы 2, очевидно, суть все те значения n, которые не делятся на квадрат целого числа, превосходящего 1, и состоят из l различных простых сомножителей. При этом, согласно указанному следствию, имеем

$$(-1)^l R(\beta) = \beta(-1)^l R(1) + O(N\Delta_1), \quad \Delta_1 = \left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N}\right)^{0,5-\varepsilon_1} + N^{-0,2+\varepsilon_1}.$$

Написав такие равенства соответственно всем возможным значениям l и сложив их почленно, получим (число всех возможных значений l, очевидно, $\ll r$) равенство (5).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Виноградов И. М., Некоторое общее свойство распределения произведений простых чисел, Доклады Ак. Наук СССР, XXX, № 8 (1941), 675—676.

[2] Виноградов И. М., Метод тригонометрических сумм в теории чисел, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова Ак. Наук СССР, XXIII, 1947.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 351—378

П. Е. ДЮБЮК

О ЧИСЛЕ ПОДГРУПП АБЕЛЕВОЙ p-ГРУППЫ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

Доказывается теорема: число подгрупп порядка p^{α} абелевой группы $\mathfrak{P}$ порядка p^n и ранга d сравнимо по модулю p^d с числом подгрупп порядка p^{α} элементарной абелевой группы порядка p^n. Попутно доказывается ряд других предложений о числе подгрупп абелевой группы.

§ 1. Предварительный материал. Определения и обозначения

Пусть p — простое число, α и β — целые числа. Введем в рассмотрение символ $P_{\alpha,\beta}$, определив его следующим образом:

$P_{\alpha,\beta}=(p^{\alpha}-1)(p^{\alpha-1}-1)\cdots(p^{\beta+1}-1)$, если $0\leqslant\beta<\alpha$,

$P_{\alpha,\beta}=1$, если $\beta=\alpha$ или $\alpha\leqslant\beta=0$,

$P_{\alpha,\beta}=0$ в остальных случаях, т. е. если $0>\beta\neq\alpha$ или $\alpha<\beta\neq 0$.

Положим

$$\varphi_{\alpha,\rho}=\frac{P_{\alpha,\alpha-\rho}}{P_{\rho,0}}=\frac{P_{\alpha,\rho}}{P_{\alpha-\rho,0}}=\varphi_{\alpha,\alpha-\rho}. \qquad (1)$$

Из определения (1) вытекает, что если не выполняется условие

$$\alpha\geqslant\rho\geqslant 0, \qquad (2)$$

то $\varphi_{\alpha,\rho}=0$, если $\alpha\neq\rho$ и $\rho\neq 0$, и $\varphi_{\alpha,\rho}=1$, если $\rho=0$ или $\alpha=\rho$.

Докажем следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Если* $\alpha\geqslant 0$, *то*

$$\varphi_{\alpha+1,\rho}=\varphi_{\alpha,\rho-1}+p^{\rho}\varphi_{\alpha,\rho}. \qquad (3)$$

Доказательство. Если $\alpha+1<\rho$, то равенство (3) принимает вид $0=0$; при $\alpha+1=\rho$ оно сводится к соотношению $1=1$.

Если $\rho<0$, то равенство (3) становится тождеством. Справедливость его легко проверяется также при $\rho=0$.

Остается рассмотреть случай, когда $\alpha\geqslant\rho\geqslant 1$. Тогда имеем

$$\varphi_{\alpha+1,\rho}=\frac{P_{\alpha+1,\,\alpha-\rho+1}}{P_{\rho,0}}=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\rho}-1}\cdot\frac{P_{\alpha,\alpha-\rho+1}}{P_{\rho-1,0}}=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^{\rho}-1}\varphi_{\alpha,\rho-1}=$$

$$=\left(1+p^{\rho}\frac{p^{\alpha-\rho+1}-1}{p^{\rho}-1}\right)\varphi_{\alpha,\rho-1}=\varphi_{\alpha,\rho-1}+p^{\rho}\varphi_{\alpha,\rho}.$$

ЛЕММА 2. *Если a, b и c — целые неотрицательные числа, то имеет место тождество*

$$\sum_{i=1}^{c}p^{i(b-c+i)}P_{b,b-c+i}P_{c,c-i}\varphi_{a,i}=P_{a+b,\,a+b-c}. \qquad (4)$$

Доказательство. Равенство (4) тривиально при $a=0$. Применим индукцию по a. Будем считать, что равенство (4) справедливо при данном a и при любых b и c, удовлетворяющих условию леммы. Докажем, что будет также справедливо равенство, которое получается из (4) заменой a на $a+1$.

Заменим в левой части равенства (4) a на $a+1$ и преобразуем полученное выражение с помощью равенства (3).

$$\sum_{i=0}^{c} p^{i(b-c+i)} P_{b,b-c+i} P_{c,c-i}\, \varphi_{a+1,i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{c} p^{i(b-c+i)} P_{b,b-c+i} P_{c,c-i} [\varphi_{a,i-1} + p^{i}\varphi_{a,i}] =$$

$$= \sum_{i=0}^{c} p^{i(b-c+i)} P_{b,b-c+i} P_{c,c-i}\varphi_{a,i-1} + \sum_{i=0}^{c-1} p^{i(b-c+i+1)} P_{b,b-c+i} P_{c,c-i}\, \varphi_{a,i} +$$

$$+ p^{c(b+1)} P_{c,0}\, \varphi_{a,c} = \sum_{i=0}^{c-1} p^{(i+1)(b-c+i+1)} P_{b,b-c+i+1} P_{c,c-i-1}\, \varphi_{a,i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{c-1} p^{i(b-c+i+1)} P_{b,b-c+i} P_{c,c-i}\, \varphi_{a,i} + p^{c(b+1)} P_{c,0}\, \varphi_{a,c} =$$

$$= \sum_{i=0}^{c-1} p^{i(b-c+i+1)} P_{b,b-c+i+1} P_{c,c-i}\, \varphi_{a,i} [p^{b-c+i+1}(p^{c-i}-1) +$$

$$+ p^{b-c+i+1} - 1] + p^{c(b+1)} P_{c,0}\, \varphi_{a,c} = \sum_{i=0}^{c-1} p^{i(b-c+i+1)} P_{b+1,\, b-c+i+1} P_{c,c-i}\, \varphi_{a,i} +$$

$$+ p^{c(b+1)} P_{c,0}\, \varphi_{a,c} = \sum_{i=0}^{c} p^{i(b-c+i+1)} P_{b+1,\, b-c+i+1} P_{c,c-i}\, \varphi_{a,i}.$$

Последняя сумма равна левой части равенства (4) при условии, что в этом равенстве b заменено на $b+1$. Следовательно, выражение, к которому мы пришли, равно $P_{a+b+1,\, a+b-c+1}$, что и требовалось доказать.

Укажем для дальнейшего, что, как представляется очевидным, равенство (4) можно переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{a} p^{i(b-c+i)} P_{b,b-c+i} P_{c,c-i}\, \varphi_{a,i} = P_{a+b,\, a+b-c}. \tag{5}$$

Разделив обе части последнего соотношения на $P_{c,0}$, приходим к формуле

$$\sum_{i=0}^{a} p^{i(b-c+i)} \varphi_{b,c-i}\, \varphi_{a,i} = \varphi_{a+b,c}.$$

Заметим, что при различных отношениях между a, b и c внешний вид равенства (4), записываемого в общей форме, может измениться (без того, чтобы это влияло на ход вывода леммы). Если, например, $b < c$, то равенство (4) удобнее записывать в форме

$$\sum_{i=0}^{b} p^{(c-b+i)\,i} P_{b,i} P_{c,b-i} \varphi_{a,c-b+i} = P_{a+b,\,a+b-c}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь дробь $\frac{(-1)^l}{P_{l,0}}$, где $l \geqslant 0$. Расположим $P_{l,0}$ по возрастающим степеням p и будем делить $(-1)^l$ до тех пор, пока в частном не получим многочлен степени l. Обозначив остаток от деления через Q_l, будем иметь

$$\frac{(-1)^l}{P_{l,0}} = 1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_l p^l + \frac{Q_l}{P_{l,0}}.$$

Введем обозначение:

$$\left\{\frac{l}{l}\right\} = 1 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_l p^l. \tag{7}$$

Заметим, что числа $a_1, a_2, \ldots, a_j$ зависят только от порядкового номера и не зависят от l. Таким образом, например,

$$\left\{\frac{0}{0}\right\} = 1, \quad \left\{\frac{1}{1}\right\} = 1 + p, \quad \left\{\frac{2}{2}\right\} = 1 + p + 2p^2,$$
$$\left\{\frac{3}{3}\right\} = 1 + p + 2p^2 + 3p^3, \quad \left\{\frac{4}{4}\right\} = 1 + p + 2p^2 + 3p^3 + 5p^4$$

и т. д.

Таблица значений коэффициентов a_j при желании может быть продолжена как угодно далеко. Имеем:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 5,$$
$$a_5 = 7, \quad a_6 = 11, \quad a_7 = 15, \quad a_8 = 22, \quad a_9 = 30, \quad a_{10} = 48.$$

Известно, что если условие (2) выполняется, то функция $\varphi_{\alpha,\rho}$ определяет число подгрупп порядка p^ρ элементарной абелевой группы порядка p^α. Таким образом, в этом случае при любом простом p функция $\varphi_{\alpha,\rho}$ равна целому числу. Отсюда следует, что $\varphi_{\alpha,\rho}$ представляет собой многочлен относительно p.

Если $i < \rho < \alpha - i$ $\left(i = -1, 0, 1, \ldots, \left[\frac{\alpha}{2}\right] - 1\right)$, то, очевидно,

$$\varphi_{\alpha,\rho} \equiv \left\{\frac{i+1}{i+1}\right\} \pmod{p^{i+2}}. \tag{8}$$

Переходим к следующему определению. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_l$ — целые неотрицательные числа, причем при любом i $(i = 1, 2, \ldots, l-1)$ $d_i \geqslant d_{i+1}$; пусть, далее, $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — произвольные целые числа.

Определим символ

$$\begin{Bmatrix} d_1 \, d_2 \, \ldots \, d_l \\ a_1 \, a_2 \, \ldots \, a_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l}$$

следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l} = p^{\sum\limits_{i=1}^{l} (d_i - a_i)\, a_{i+1}} \frac{\prod\limits_{i=1}^{l} P_{d_i - a_{i+1},\, a_i - a_{i+1}}}{\prod\limits_{i=1}^{l} P_{d_i - a_i,\, 0}}, \qquad a_{l+1} = 0, \tag{9}$$

или, что то же,

$$\begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l} = p^{\sum\limits_{i=1}^{l} (d_i - a_i) a_{i+1}} \prod_{i=1}^{l} \varphi_{d_i - a_{i+1},\, a_i - a_{i+1}}, \qquad a_{l+1} = 0. \tag{10}$$

Положим, что

$$d_i \geqslant a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, l) \tag{11}$$

и

$$a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, l-1). \tag{12}$$

Покажем, что если нарушается хотя бы одно из условий (11) или (12), то, по смыслу введенного определения,

$$\begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l} = 0.$$

В самом деле, если при каком-нибудь $i \, (1 \leqslant i \leqslant l)$ $d_i < a_i$, то

$$P_{d_i - a_{i+1},\, a_i - a_{i+1}} = 0,$$

если только $a_i \neq a_{i+1}$. Если же $a_i = a_{i+1}$, то

$$P_{d_i - a_{i+1},\, a_i - a_{i+1}} = 1,$$

но тогда рассматриваем $P_{d_{i+1} - a_{i+2},\, a_{i+1} - a_{i+2}}$. Если $a_{i+2} \neq a_{i+1}$, то

$$P_{d_{i+1} - a_{i+2},\, a_{i+1} - a_{i+2}} = 0,$$

так как $a_{i+1} = a_i > d_i \geqslant d_{i+1}$; если же $a_{i+2} = a_{i+1}$, то рассматриваем $P_{d_{i+2} - a_{i+3},\, a_{i+2} - a_{i+3}}$ и продолжаем рассуждение до тех пор, пока не придем к произведению $P_{d_l - a_{l+1},\, a_l - a_{l+1}}$. Если ни одно из предыдущих произведений не обратилось в ноль, то

$$P_{d_l - a_{l+1},\, a_l - a_{l+1}} = 0,$$

так как $a_{l+1} = 0$ и $d_l < a_l$; a_l равняться нулю не может, поскольку d_l по предположению не отрицательно.

Если при каком-нибудь $i \, (1 \leqslant i \leqslant l-1)$ $a_{i+1} > a_i$, то

$$P_{d_i - a_{i+1},\, a_i - a_{i+1}} = 0,$$

если только $d_i \neq a_i$; если же $d_i = a_i$, то рассматриваем $P_{d_{i+1} - a_{i+2},\, a_{i+1} - a_{i+2}}$

Так как $a_{i+1} > a_i = d_i \geqslant d_{i+1}$, то

$$P_{d_{i+1} - a_{i+2},\, a_{i+1} - a_{i+2}} = 0,$$

если только $a_{i+1} \neq a_{i+2}$. Продолжая рассуждать, как и раньше, снова приходим к противоречию.

Предположим, наконец, что при некотором i $(1 \leqslant i \leqslant l-1)$ $a_{i+1} < 0$. Тогда $P_{d_{i+1}-a_{i+2},\, a_{i+1}-a_{i+2}}$ не равно нулю только в случае, если $d_{i+1} = a_{i+1}$, что исключено, так как d_{i+1} не отрицательно, или в случае, когда $a_{i+1} - a_{i+2} \geqslant 0$, т. е. когда a_{i+2} отрицательно. Продолжая те же рассуждения, приходим к выводу, что или равно нулю одно из последовательно рассматриваемых произведений P или $a_l < 0$, а это означает, что

$$P_{d_l - a_{l+1},\, a_l - a_{l+1}} = 0.$$

Из принятого определения вытекает такое свойство введенного символа:

$$\left\{ \begin{matrix} d_1\, d_2 \ldots d_{l-1}\, d_l \\ a_1\, a_2 \ldots a_{l-1}\; 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} d_1\, d_2 \ldots d_{l-1} \\ a_1\, a_2 \ldots a_{l-1} \end{matrix} \right\}. \tag{13}$$

Пусть, далее, $\mathfrak{M}$ — произвольная абелева p-группа. Условимся относительно следующих обозначений:

$\mathfrak{D}(\mathfrak{M})$ — подгруппа $\mathfrak{M}$, порожденная всеми элементами $\mathfrak{M}$, возведенными в степень p.

$d(\mathfrak{M})$ — ранг $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M} = 1$, то будем считать $d(\mathfrak{M}) = 0$.

Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева p-группа, причем p^k — наивысший из порядков элементов группы $\mathfrak{P}$. Условимся называть k *высотою* $\mathfrak{P}$.

Пусть $\mathfrak{D}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}_1) = \mathfrak{D}_2$ и вообще $\mathfrak{D}(\mathfrak{D}_i) = \mathfrak{D}_{i+1}$. Очевидно, $\mathfrak{D}_k = 1$, $\mathfrak{D}_{k+1} = 1$ и т. д., и естественно принять $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{P}$.

Далее, пусть

$$d(\mathfrak{D}_i) = d_{i+1} \quad (i = 0, 1, \ldots, k-1).$$

В соответствии с определением $d(\mathfrak{M})$, примем, что при любом положительном x $d_{k+x} = 0$.

Числа d_i $(i = 1, 2, \ldots)$ будем называть **инвариантами** **группы** $\mathfrak{P}$. Очевидно, если p^n — порядок $\mathfrak{P}$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i = \sum_{i=1}^{k} d_i = n. \tag{14}$$

§ 2. Теорема о числе подгрупп данного типа абелевой p-группы

Имея в виду общие замечания, сделанные Миллером [см. ([1]) и ([2])] в его работах, посвященных вопросу о числе подгрупп абелевой группы, нетрудно обосновать следующее предложение:

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева p-группа, имеющая инварианты d_i $(i = 1, 2, \ldots;\ d_k \neq 0$, и при любом $x < 0$ $d_{k+x} = 0)$. Пусть a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность целых чисел, причем при $x > 0$ $a_{k+x} = 0$. Тогда число подгрупп группы $\mathfrak{P}$, имеющих инварианты a_i $(i = 1, 2, \ldots)$, равно*

$$\left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}$$

Доказательство. Заметим, что если числа a_i не удовлетворяют хотя бы одному из условий (11) и (12), то не существует подгрупп группы $\mathfrak{P}$, обладающих соответствующими инвариантами. Но в этом случае, как отмечалось раньше, символ $\left\{\begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix}\right\}_{i=1}^{k}$ равен нулю. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что условия (11) и (12) выполнены.

Искомое число подгрупп $\mathfrak{S}$ группы $\mathfrak{P}$ равно, очевидно, числу b способов выбора элементов базиса подгруппы, имеющей инварианты a_i $(i=1, 2, \ldots, k)$, поделенному на порядок группы автоморфизмов подгруппы $\mathfrak{S}$.

Определим сначала b. Пусть l — наибольшее из чисел i таких, что $a_i \neq 0$. Число способов выбора первого элемента базиса какой-либо группы $\mathfrak{S}$ из элементов группы $\mathfrak{P}$ равно числу элементов порядка p^l группы $\mathfrak{P}$, т. е. равно

$$p^{\sum\limits_{s=1}^{l} d_s} - p^{\sum\limits_{s=1}^{l-1} d_s} = p^{\sum\limits_{s=1}^{l-1} d_s}(p^{d_s}-1).$$

Предположим, что первый элемент A_1 базиса некоторой группы $\mathfrak{S}$ уже избран и заметим, что число способов выбора второго элемента базиса порядка p^l равно числу элементов порядка p^l группы $\mathfrak{P}$ таких, что никакая степень их не принадлежит $\{A_1\}$. Число подобных элементов, очевидно, равно

$$p^{\sum\limits_{s=1}^{l} d_s} - p^{1+\sum\limits_{s=1}^{l-1} d_s} = p^{\sum\limits_{s=1}^{l-1} d_s}\cdot p\,(p^{d_l-1}-1).$$

Аналогично, число способов выбора третьего элемента порядка p^l базиса группы $\mathfrak{S}$ равно

$$p^{\sum\limits_{s=1}^{l-1} d_s}\cdot p^2\,(p^{d_l-2}-1).$$

Вообще, число способов выбора первых a_l элементов базиса группы $\mathfrak{S}$ (т. е. всех элементов базиса этой группы, порядок которых равен p^l) равно

$$p^{a_l\sum\limits_{s=1}^{l-1} d_s}\cdot p^{\frac{1}{2}a_l(a_l-1)}\,P_{d_l,\, d_l-a_l}.$$

Далее, предполагая, что первые a_l элементов базиса $\mathfrak{S}$ уже избраны, приходим к выводу, что число способов выбора следующих $a_{l-1}-a_l$ элементов базиса (т. е. элементов базиса порядка p^{l-1}) равно

$$p^{(a_{l-1}-a_l)\sum\limits_{s=1}^{l-2} d_s}\cdot p^{\frac{1}{2}(a_{l-1}-a_l)(a_{l-1}+a_l-1)}\,P_{d_{l-1}-a_l,\, d_{l-1}-a_{l-1}}.$$

Вообще, предполагая избранными первые a_{l-j+1} элементов базиса группы $\mathfrak{S}$ (представляющие собой все элементы этого базиса, порядок которых не ниже p^{l-j+1}), можно притти к заключению, что число способов выбора следующих $a_{l-j}-a_{l-j+1}$ элементов базиса $\mathfrak{S}$, т. е. элементов этого базиса порядка p^{l-j}, равно

$$p^{(a_{l-j}-a_{l-j+1})\sum\limits_{s=1}^{l-j-1} d_s}\cdot p^{\frac{1}{2}(a_{l-j}-a_{l-j+1})(a_{l-j}+a_{l-j+1}-1)}\, P_{d_{l-j}-a_{l-j+1},\, d_{l-j}-a_{l-j}}.$$

Теперь мы имеем возможность написать

$$b=p^{\sum\limits_{j=0}^{l-2}\left[(a_{l-j}-a_{l-j+1})\sum\limits_{j=1}^{l-j-1} d_s\right]}\cdot p^{\frac{1}{2}a_1(a_1-1)}\prod_{j=0}^{l-1} P_{d_{l-j}-a_{l-j+1},\, d_{l-j}-a_{l-j}}.$$

Полагая $l-j=i$, получаем

$$b=p^{\sum\limits_{i=2}^{l}\left[(a_i-a_{i+1})\sum\limits_{s=1}^{i-1} d_s\right]}\, p^{\frac{1}{2}a_1(a_1-1)}\prod_{i=1}^{l} P_{d_i-a_{i+1},\, d_i-a_i}.$$

Заметим, что

$$\sum_{i=2}^{l}\left[(a_i-a_{i+1})\sum_{s=1}^{i-1} d_s\right]=\sum_{i=2}^{l}\left[a_i\sum_{s=1}^{i-1} d_s\right]-\sum_{i=2}^{l}\left[a_{i+1}\sum_{s=1}^{i-1} d_s\right]=$$

$$=a_2d_1+\sum_{i=3}^{l}\left[a_i\sum_{s=1}^{i-1} d_s\right]-\sum_{i=2}^{l}\left[a_{i+1}\sum_{s=1}^{i-1} d_s\right]=a_2d_1+\sum_{i=3}^{l}\left[a_i\left(d_{i-1}+\sum_{s=1}^{i-2} d_s\right)\right]-$$

$$-\sum_{i=2}^{l-1}\left[a_{i+1}\sum_{s=1}^{i-1} d_s\right]=\sum_{i=2}^{l} a_id_{i-1}+\sum_{i=3}^{l}\left[a_i\sum_{s=1}^{i-2} d_s\right]-\sum_{i=2}^{l-1}\left[a_{i+1}\sum_{s=1}^{i-1} d_s\right]=$$

$$=\sum_{i=2}^{l} a_id_{i-1}=\sum_{i=1}^{l} a_{i+1}d_i.$$

Таким образом,

$$b=p^{\sum\limits_{i=1}^{l} a_{i+1}d_i}\, p^{\frac{1}{2}a_1(a_1-1)}\prod_{i=1}^{l} P_{d_i-a_{i+1},\, d_i-a_i}, \tag{15}$$

или

$$b=p^{\sum\limits_{i=1}^{k} a_{i+1}d_i}\, p^{\frac{1}{2}a_1(a_1-1)}\prod_{i=1}^{k} P_{d_i-a_{i+1},\, d_i-a_i}. \tag{16}$$

Полагая в последнем равенстве $a_i=d_i$ $(i=1, 2, \ldots, k)$, приходим к выводу, что порядок группы автоморфизмов группы $\mathfrak{P}$ равен

$$p^{\sum\limits_{i=1}^{k} d_{i+1}d_i}\, p^{\frac{1}{2}d_1(d_1-1)}\prod_{i=1}^{k} P_{d_i-d_{i+1},\, 0}. \tag{17}$$

Для порядка a группы автоморфизмов группы $\mathfrak{S}$ имеем, таким образом, следующее выражение:

$$a = p^{\sum_{i=1}^{l} a_{i+1}a_i} \quad p^{\frac{1}{2}a_1(a_1-1)} \prod_{i=1}^{l} P_{a_i-a_{i+1},0} = p^{\sum_{i=1}^{k} a_{i+1}a_i} \quad p^{\frac{1}{2}a_i(a_i-1)} \prod_{i=1}^{k} P_{a_i-a_{i+1},\,0}. \quad (18)$$

Разделив b, определенное равенством (16), на a, определяемое равенством (18), и заметив, что

$$\frac{P_{d_i-a_{i+1},d_i-a_i}}{P_{a_i-a_{i+1},\,0}} = \frac{P_{d_i-a_{i+1},a_i-a_{i+1}}}{P_{d_i-a_i,\,0}}, \quad (19)$$

приходим к выражению $\begin{Bmatrix} d_l \\ a_l \end{Bmatrix}$. Теорема 1, таким образом, доказана.

Ряд предложений, доказанных в свое время Миллером, представляет собой частные случаи только что полученного результата. Например, непосредственно из теоремы 1 получаем следующее утверждение Миллера [([2]), стр. 10]:

Число подгрупп порядка $p^{\alpha\lambda}$ и типа $(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ абелевой p-группы порядка p^{kl} и типа $(l, l, \ldots, l)$ $(l \geqslant \alpha,\ k \geqslant \lambda)$ равно

$$p^{\lambda(k-\lambda)(\alpha-1)}\, \varphi_{k,\lambda}. \quad (20)$$

Понятно, что выражение (20) получается при соответствующих частных предположениях из (9).

В дальнейшем нам часто придется пользоваться известным предложением, согласно которому во всякой конечной абелевой группе число подгрупп определенного порядка равно числу подгрупп того же индекса [см. например, ([3]), стр. 182—183]. Эту теорему будем для краткости называть теоремой о симметрии.

§ 3. Следствия теоремы о числе подгрупп данного типа

Пусть попрежнему $d_1, d_2, \ldots, d_l$ — целые неотрицательные числа, причем при любом i $(i = 1, 2, \ldots, l-1)$ $d_i \geqslant d_{i+1}$.

Будем обозначать через $H(d_1, d_2, \ldots, d_l; \alpha)$ число подгрупп порядка (или индекса) p^α абелевой p-группы, имеющей инварианты $d_1, d_2, \ldots, d_l, 0, 0, \ldots$ Из данного определения следует, что

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_l, 0; \alpha) = H(d_1, d_2, \ldots, d_l; \alpha).$$

Будем полагать для краткости

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_l; \alpha) = H_l(d_i, \alpha).$$

В наших обозначениях формулировка теоремы о симметрии для частного случая абелевой p-группы сводится к соотношению

$$H_k(d_i, \alpha) = H_k(d_i, n-\alpha), \quad (21)$$

где n определяется равенством (14).

ТЕОРЕМА 2.

$$H_l(d_i, \alpha) = \sum_{\sum\limits_{i=1}^{l} a_i = \alpha} \begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l}. \tag{22}$$

Здесь, как указано, знак суммирования распространяется на все символы $\begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l}$, какие можно получить при условии, что a_i $(i = 1, 2, \ldots, l)$ — целые числа, удовлетворяющие уравнению

$$\sum_{i=1}^{l} a_i = \alpha. \tag{23}$$

Доказательство. В соответствии с определением символа

$$H_l(d_i, \alpha) = H(d_1, d_2, \ldots, d_l; \alpha),$$

d_i — целые неотрицательные числа, причем при любом $i = 1, 2, \ldots, l-1$

$$d_i \geqslant d_{i+1}.$$

Пусть $k (\leqslant l)$ — наибольшее из чисел s таких, что $d_s \neq 0$. Тогда

$$d_{k+1} = d_{k+2} = \ldots = d_l = 0.$$

По свойству символа $H(d_1, d_2, \ldots, d_l; \alpha)$, имеем

$$H_l(d_i, \alpha) = H(d_1, d_2, \cdots, d_l; \alpha) = H(d_1, d_2, \cdots, d_k; \alpha) = H_k(d_i, \alpha).$$

С другой стороны, если хотя бы одно из чисел $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_l$ отлично от нуля, то

$$\begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l} = 0.$$

Таким образом, в правой части равенства (22) следует принимать в расчет только те символы $\begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l}$, которые можно получить при условии, что

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \alpha \tag{24}$$

и $a_k = a_{k+1} = \cdots = 0$. Но для таких символов, в силу их свойства, выраженного соотношением (13), имеет место равенство

$$\begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{l} = \begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{k}.$$

Итак,

$$\sum_{\sum_{i=1}^{l} a_i=\alpha} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{l} = \sum_{\sum_{i=1}^{k} a_i=\alpha} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}.$$

Доказательство теоремы сводится, таким образом, к проверке равенства

$$H_k(d_i, \alpha) = \sum_{\sum_{i=1}^{k} a_i=\alpha} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}, \qquad (25)$$

причем в правой части знак суммирования распространяется на все символы $\left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}$, какие можно получить при условии, что a_i $(i=1, 2, \cdots k)$ — целые числа, удовлетворяющие уравнению (24).

Каждая из подгрупп порядка p^α абелевой p-группы, имеющей инварианты $d_1, d_2, \ldots, d_k, 0, 0 \ldots$, обладает инвариантами $a_1, a_2, \ldots \ldots, a_k, 0, 0, \ldots$, удовлетворяющими равенству (24). При этом, конечно, соблюдаются условия

$$d_i \geqslant a_i \quad (i=1, 2, \ldots, k), \quad a_i \geqslant a_{i+1} \geqslant 0 \quad (i=1, 2, \ldots, k-1). \qquad (26)$$

Обратно, каждой системе чисел a_i, удовлетворяющих уравнению (24), соответствуют подгруппы порядка p^α группы $\mathfrak{P}$, имеющие такие инварианты; число подобных подгрупп равно $\left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}$ (теорема 1, § 2).

Остается заметить, что если для чисел a_i выполняются условия (24), но не удовлетворяется хотя бы одно из равенств (26), то

$$\left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k} = 0.$$

Теорема 2, таким образом, доказана.

Заметим, что равенство (25) можно представить в виде

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_k; \alpha) = \sum_{a_k=0}^{d_k} \sum_{a_{k-1}=a_k}^{d_{k-1}} \cdots \sum_{a_2=a_3}^{d_2} \left\{ \begin{matrix} d_1 & d_2 \ldots d_{k-1}\, d_k \\ \alpha - \sum_{i=2}^{k} a_i & a_2 \ldots a_{k-1}\, a_k \end{matrix} \right\}. \qquad (27)$$

В случае элементарной абелевой группы $l=1$. Оставляя без рассмотрения случай, когда $d_1=0$, имеем также $k=1$.

В соответствии с хорошо известным результатом, формула (22) или (25) приводит к соотношению

$$H_1(d_1, \alpha) = \left\{ \begin{matrix} d_1 \\ \alpha \end{matrix} \right\} = \varphi_{d_1, \alpha}.$$

Полагая $l=2$, приходим к случаю, когда все элементы абелевой p-группы будут порядка не выше p^2. Число подгрупп порядка (или индекса) p^α подобной группы определяется выражением

$$H_2(d_i,\alpha)=H(d_1,d_2;\alpha)=\sum_{\alpha_1+\alpha_2=\alpha}\begin{Bmatrix} d_1 & d_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{Bmatrix}=\sum_{i=0}^{\infty}\begin{Bmatrix} d_1 & d_2 \\ \alpha-i & i \end{Bmatrix}=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} p^{i(d_i-\alpha+i)}\varphi_{d_1-i,\alpha-2i}\,\varphi_{d_2,i}. \tag{28}$$

Например:

$$H_2(d_i,1)=\frac{p^{d_1}-1}{p-1},$$

$$H_2(d_i,2)=\frac{(p^{d_1}-1)(p^{d_1-1}-1)}{(p^2-1)(p-1)}+p^{d_1-1}\cdot\frac{p^{d_2}-1}{p-1},$$

$$H_2(d_i,3)=\frac{(p^{d_1}-1)(p^{d_1-1}-1)(p^{d_1-2}-1)}{(p^3-1)(p^2-1)(p-1)}+$$

$$+p^{d_1-2}\cdot\frac{p^{d_1-1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{d_2}-1}{p-1}$$

и т. д.

Будем, как и раньше, порядок рассматриваемой абелевой p-группы обозначать через p^n. Заметим, что если только $d_1>1$ и $0<\alpha<n$, то

$$H_2(d_i,\alpha)\equiv 1+p \pmod{p^2}. \tag{29}$$

В самом деле, при рассмотрении выражения $H_2(d_i,\alpha)$ можно всегда считать $\alpha\leqslant d_1$, так как, имея в виду равенство (14), на основании формулы (21), можно записать

$$H_2(d_i,\alpha)=H_2(d_i,d_1+d_2-\alpha),$$

и если $\alpha>d_1$, то $d_1+d_2-\alpha<d_1$.

Согласно (28), получаем

$$H_2(d_i,\alpha)\equiv\varphi_{d_1,\alpha}\pmod{p^{d_1-\alpha+1}}. \tag{30}$$

Если

$$0<\alpha<d_1, \tag{31}$$

то, как известно [см. ([4]), стр. 39],

$$\varphi_{d_1,\alpha}\equiv 1+p\pmod{p^2}\quad\text{и}\quad d_1-\alpha+1\geqslant 2.$$

Итак, остается рассмотреть случай $\alpha=d_1$. Если $d_2<d_1$, то вместо α можно взять число $d_1+d_2-\alpha$, которое при данных условиях будет равно d_2. Таким образом, условие (31) снова будет выполняться и, воспользовавшись сравнением (30), мы опять приходим к выводу, что соотношение (29) имеет место.

Наконец, если $\alpha=d_1=d_2$, то формула (28) дает

$$H_2(d_i,\alpha)=H(d_1,d_2;\alpha)=H(\alpha,\alpha;\alpha)=\sum_{i=0}^{\infty}p^{i^2}\varphi_{\alpha-i,\alpha-2i}\,\varphi_{\alpha,i}\equiv 1+p\pmod{p^2}$$

(так как по условию $d_1>1$).

Подобно тому, как это было проделано в случаях $l=1$, $l=2$, нетрудно записать развернутое выражение для любой функции $H_l(d_i, \alpha)$.

Таким образом, теорема 2 позволяет определить число подгрупп произвольного порядка (или индекса) данной абелевой p-группы, если только известны инварианты этой группы. Если заданы не все, а только некоторые из этих инвариантов, то число подгрупп данного порядка может быть определено не точно, а приближенно. В последующем изложении обнаруживается, что известные до сих пор теоремы о числе подгрупп абелевой p-группы представляют собой такого рода аппроксимации. Так, например, задание одного только инварианта приводит к результату Холла. Естественно, что, идя указанным путем, можно установить также ряд новых предложений, иногда объединяющих выведенные ранее. Это и делается в дальнейшем в теоремах 3—9. Отметим, что существенную роль в подобных рассмотрениях играет теорема о симметрии, выраженная равенством (21).

Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева p-группа порядка p^n, имеющая инварианты

$$d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_k,\ d_{k+1},\ \ldots, \tag{32}$$

причем $d_k \neq 0$, $d_{k+1}=d_{k+2}=\cdots=0$.

Будем в дальнейшем через d_i обозначать число из ряда (32). Тогда, в соответствии с этим и ранее данным определением, $H_l(d_i, \alpha)$ будет обозначать число подгрупп порядка (или индекса) p^α абелевой p-группы, имеющей инварианты $d_1,\ d_2, \ldots, d_l,\ 0,\ 0, \ldots$

Если $l \geqslant k$, то, очевидно,

$$H_l(d_i, \alpha) = H_k(d_i, \alpha),$$

т. е. равняется числу подгрупп порядка p^α группы $\mathfrak{P}$.

ТЕОРЕМА 3. *Если $k>1$ и $0<\alpha<n$, то*

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_{k-1}(d_i, \alpha') \pmod{p^{\sum\limits_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha' + 1}}, \tag{33}$$

где α' — любое из чисел α и $n-\alpha$, однако такое, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha' + 1 > 0.$$

Доказательство. По теореме 2,

$$H_k(d_i, \alpha) = \sum_{\sum\limits_{i=1}^{k} a_i = \alpha} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}.$$

В правой части последнего равенства выделяем все те слагаемые, для которых $a_k=0$. Имея в виду формулу (13), заключаем, что сумма таких слагаемых равна $H_{k-1}(d_i, \alpha)$.

Итак,

$$H_k(d_i, \alpha) = H_{k-1}(d_i, \alpha) + \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{k} a_i = \alpha, \\ a_k \neq 0}} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}.$$

Элемент $\left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}$, стоящий под знаком суммы в правой части последнего равенства, содержит множителем

$$p^{\sum_{i=1}^{k} (d_i - a_i) a_{i+1}},$$

причем, в силу условий $k > 1$, $a_k \neq 0$, получаем

$$\sum_{i=1}^{k} (d_i - a_i) a_{i+1} = \sum_{i=1}^{k-1} (d_i - a_i) a_{i+1} \geqslant a_k \left[\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i \right] =$$
$$= a_k \left(\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha + a_k \right) \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha + 1.$$

Таким образом, если $\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha + 1 > 0$, то сравнение (33) имеет место при $\alpha' = \alpha$.

Далее, очевидно, что

$$H_k(d_i, \alpha) = H_k(d_i, n - \alpha) \equiv H_{k-1}(d_i, n - \alpha) \left(\mathrm{mod}\, p^{\sum_{i=1}^{k-1} d_i - (n-\alpha) + 1} \right),$$

откуда следует, что сравнение (33) справедливо также при $\alpha' = n - \alpha$, если только

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_i - (n - \alpha) + 1 > 0.$$

Нетрудно видеть, что по крайней мере одно из чисел

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha + 1, \quad \sum_{i=1}^{k-1} d_i - (n - \alpha) + 1$$

непременно положительно.

Условимся, теперь, через α_1 обозначать наименьшее из чисел α и $n - \alpha$, через α_2 — наименьшее из чисел α_1 и $\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha_1$ и вообще, применяя определение по индукции, через α_j — наименьшее из чисел α_{j-1} и $\sum_{i=1}^{k-j+1} d_i - \alpha_{j-1}$.

Тогда по теореме 3 будем иметь

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_{k-1}(d_i, \alpha_1) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha_1 + 1}}$$

или, тем более,

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_{k-1}(d_i, \alpha_1) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} d_i}{2}\right] + 1}}.$$

Точно так же

$$H_{k-1}(d_i, \alpha_1) \equiv H_{k-2}(d_i, \alpha_2) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{k-2} d_i - \left[\frac{\sum_{i=1}^{k-1} d_i}{2}\right] + 1}}$$

и т. д., так что если $1 \leqslant l < k$, то

$$H_{l+1}(d_i, \alpha) \equiv H_l(d_i, \alpha_{k-l}) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{l} d_i - \left[\frac{\sum_{i=1}^{l+1} d_i}{2}\right] + 1}}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \left[\frac{\sum_{i=1}^{k} d_i}{2}\right] \geqslant \sum_{i=1}^{k-2} d_i - \left[\frac{\sum_{i=1}^{k-1} d_i}{2}\right] \geqslant \cdots \geqslant \sum_{i=1}^{l} d_i - \left[\frac{\sum_{i=1}^{l+1} d_i}{2}\right],$$

так что можно сформулировать следующий результат:

ТЕОРЕМА 4. *Если $k > 1$, $0 < \alpha < n$ и $1 \leqslant l < k$, то*

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_l(d_i, \alpha_{k-l}) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{l} d_i - \left[\frac{\sum_{i=1}^{l+1} d_i}{2}\right] + 1}}.$$

Переходим к другим следствиям теоремы 3.

ТЕОРЕМА 5. *Если $k \geqslant l > 0$ и $\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{l} d_i$, то*

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_l(d_i, \alpha) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{l} d_i - \alpha + 1}}.$$

Доказательство. Применяя последовательно теорему 3, имеем

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_{k-1}(d_i, \alpha) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{k-1} d_i - \alpha + 1}},$$

$$H_{k-1}(d_i, \alpha) \equiv H_{k-2}(d_i, \alpha) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{k-2} d_i - \alpha + 1}},$$

. . . .

$$H_{l+1}(d_i, \alpha) \equiv H_l(d_i, \alpha) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{l} d_i - \alpha + 1}},$$

откуда непосредственно и вытекает доказываемое предложение.

Положив в условии теоремы 5 $l=1$, приходим к следующему результату:

Число подгрупп порядка или индекса p^α $(0 \leqslant \alpha \leqslant d_1)$ группы $\mathfrak{P}$ сравнимо с $\varphi_{d_1,\alpha}$ по модулю $p^{d_1-\alpha+1}$.

Поскольку речь шла о подгруппах индекса p^α, приведенное предложение было доказано Холлом [(4), стр. 42] для любой p-группы.

ТЕОРЕМА 6. *Если $k \geqslant r \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{r-1} d_i \leqslant \alpha < \sum_{i=1}^{r} d_i$ и $l > 1$, то*

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_l(d_i, \alpha') \pmod{p^{\sum_{i=1}^{r} d_i-\alpha+1}}, \tag{34}$$

причем $\alpha'=\alpha$, если $r \leqslant l$, и $\alpha' = \sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha$, если $r \geqslant l$.

Доказательство. Если $l \geqslant k$, то $r \leqslant l$ и сравнение (34) должно иметь место при условии замены α' на α.

Действительно, в этом случае

$$H_k(d_i, \alpha) = H_l(d_i, \alpha).$$

Будем теперь считать $l < k$. Пусть $r \leqslant l$. Применяя теорему 5, получаем

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_l(d_i, \alpha) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{l} d_i-\alpha+1}},$$

т. е. результат более сильный, чем сформулированный в условии теоремы 6.

Переходим к случаю $r > l$. По теореме 5,

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_r(d_i, \alpha) \pmod{p^{\sum_{i=1}^{r} d_i-\alpha+1}}. \tag{35}$$

Далее, по теореме 3,

$$H_r(d_i, \alpha) \equiv H_{r-1}(d_i, \alpha') \pmod{p^{\sum_{i=1}^{r-1} d_i-\alpha'+1}}, \tag{36}$$

где $\alpha' = \sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha$. Таким образом,

$$\alpha' \leqslant \sum_{i=1}^{r} d_i - \sum_{i=1}^{r-1} d_i = d_r,$$

откуда, поскольку $r > l > 1$,

$$\sum_{i=1}^{l} d_i - \alpha' + 1 \geqslant \sum_{i=1}^{l-1} d_i + 1 \geqslant d_r + 1 \geqslant \sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha + 1 \geqslant 2. \tag{37}$$

Снова пользуясь теоремой 5, приходим к заключению:

$$H_{r-1}(d_i, \alpha') \equiv H_l(d_i, \alpha') \pmod{p^{\sum_{i=1}^{l} d_i-\alpha'+1}}. \tag{38}$$

Сопоставляя сравнения (35), (36), (38), получаем

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_l(d_i, \alpha') \pmod{p^{\sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha + 1}}.$$

Заметим, наконец, что при $r = l$, по формуле (21), имеем

$$H_l(d_i, \alpha) = H_l(d_i, \alpha').$$

Положив в условии теоремы 6 $l = 2$, приходим к следующему частному случаю, который выделяем особо:

ТЕОРЕМА 7. *Если* $k \geqslant r \geqslant 1$ *и* $\sum_{i=1}^{r-1} d_i \leqslant \alpha < \sum_{i=1}^{r} d_i$, *то*

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_2(d_i, \alpha') \pmod{p^{\sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha + 1}},$$

причем $\alpha' = \alpha$, *если* $r \leqslant 2$ *и* $\alpha' = \sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha$, *если* $r \geqslant 2$.

Только что приведенная теорема содержит в себе цитированный выше результат Холла, а также следующее, хорошо известное предложение Миллера ([5]):

Во всякой нециклической абелевой группе порядка p^n $(n > 1)$ *число подгрупп порядка* p^α $(1 \leqslant \alpha \leqslant n-1)$ *сравнимо с* $1 + p$ *по модулю* p^2.

В самом деле, если $0 \leqslant \alpha < d$, то в условии теоремы 7 надо положить $r = 1$, что приводит к следующей записи:

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_2(d_i, \alpha) \pmod{p^{d_1 - \alpha + 1}}$$

и остается только заметить, что, по теореме 3,

$$H_2(d_i, \alpha) \equiv \varphi_{d_1, \alpha} \pmod{p^{d_1 - \alpha + 1}}.$$

С другой стороны, при $d_1 > 1$ имеем, на основании (29),

$$H_2(d_i, \alpha') \equiv 1 + p \pmod{p^2}.$$

Теорема 6, как и оговорено в условии, не приложима при $l = 1$, так как тогда неравенство (37) может и не быть справедливым. В этом случае будет иметь место следующая теорема, которую также можно рассматривать как обобщение цитированного предложения Холла.

ТЕОРЕМА 8. *Если* $k \geqslant r \geqslant 1$ *и* $\sum_{i=1}^{r-1} d_i \leqslant \alpha < \sum_{i=1}^{r} d_i$, *то*

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv \varphi_{d_1, \alpha'} \pmod{p^s},$$

причем $\alpha' = \alpha$, *если* $r = 1$, *и* $\alpha' = \sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha$, *если* $r > 1$, *а* s — *наименьшее из чисел* $\sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha + 1$ *и* $d_1 - \alpha' + 1$.

Доказательство. По теореме 7,

$$H_k(d_i, \alpha) \equiv H_2(d_i, \alpha') \pmod{p^{\sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha + 1}},$$

причем $\alpha' = \alpha$, если $r = 1$, и $\alpha' = \sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha + 1$, если $r > 1$. Применяя, далее, теорему 3, получаем

$$H_2(d_i, \alpha') \equiv \varphi_{d_1, \alpha'} \pmod{p^{d_1 - \alpha' + 1}},$$

так как $d_1 - \alpha' + 1 > 0$, что и доказывает теорему.

Так как при $r = 1$ $\alpha' = \alpha$, то в этом случае

$$d_1 - \alpha' + 1 = \sum_{i=1}^{r} d_i - \alpha + 1,$$

что вновь приводит к теореме Холла.

ТЕОРЕМА 9.

$$H_k(d_i, \alpha) = H_\alpha(d_i, \alpha). \tag{39}$$

Доказательство. Если $\alpha > k$, то равенство (24) следует из самого определения символа $H_l(d_i, \alpha)$. Если $\alpha < k$, то обращаемся к соотношению

$$H_k(d_i, \alpha) = \sum_{\sum_{i=1}^{k} a_i = \alpha} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}. \tag{25}$$

Пусть $a_s > 0$, причем $\alpha < s \leqslant k$. Тогда, ввиду условия $\sum_{i=1}^{k} a_i = \alpha$, по крайней мере одно из чисел a_j $(j \leqslant \alpha)$ будет $\leqslant 0$ и соответствующий символ $\left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}$ в правой части равенства (25) обращается в нуль.

Итак, в правой части равенства (25) будут отличны от нуля только те символы $\left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k}$, для которых выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{\alpha} a_l = \alpha,$$

$$a_{\alpha+1} = a_{\alpha+2} = \cdots = a_k = 0.$$

Таким образом,

$$H_k(d_i, \alpha) = \sum_{\sum_{i=1}^{k} a_i = \alpha} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k} = \sum_{\substack{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i = \alpha \\ a_{i+x} = 0,\ x > 0}} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{k} = \sum_{\sum_{i=1}^{\alpha} a_i = \alpha} \left\{ \begin{matrix} d_i \\ a_i \end{matrix} \right\}_{i=1}^{\alpha} = H_\alpha(d_i, \alpha).$$

Например, число подгрупп порядка или индекса p^2 во всякой абелевой p-группе равно

$$H_2(d_i, 2) = \frac{(p^{d_1}-1)(p^{d_1-1}-1)}{(p^2-1)(p-1)} + p^{d_1-1}\frac{p^{d_2}-1}{p-1};$$

число подгрупп порядка или индекса p^3 определяется равенством

$$H_3(d_i, 3) = \frac{(p^{d_1}-1)(p^{d_1-1}-1)(p^{d_1-2}-1)}{(p^3-1)(p^2-1)(p-1)} +$$

$$+ p^{d_1-2}\cdot\frac{p^{d_1-1}-1}{p-1}\cdot\frac{p^{d_2}-1}{p-1} + p^{d_1+d_2-2}\cdot\frac{p^{d_3}-1}{p-1}$$

и т. д.

Отметим в заключение, что из предыдущего вытекает следующее известное предложение о числе циклических подгрупп абелевой p-группы:

Если $\mathfrak{P}$ — нециклическая абелева p-группа порядка p^n, то число циклических подгрупп порядка p^m $(1 < m < n)$ группы $\mathfrak{P}$ сравнимо с 0 по модулю p.

Эта теорема с незначительными ограничениями была доказана Миллером ([6]) для любой p-группы.

В самом деле, число циклических подгрупп порядка p^m группы $\mathfrak{P}$ равно

$$\begin{Bmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_m & d_{m+1} & \ldots & d_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_m \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_i \\ 1 \end{Bmatrix}_{i=1}^{m}.$$

Обращаясь к определению символа $\begin{Bmatrix} d_i \\ a_i \end{Bmatrix}_{i=1}^{k}$, замечаем, что в данном случае $\sum_{i=1}^{k}(d_i - a_i)\,a_{i+1} \neq 0$, если только $d_1 > 1$.

§ 4. Теорема о концентрации

Все результаты, приведенные в предыдущем параграфе, представляют собой простые следствия теоремы 1, § 2 и теоремы о симметрии; напротив, предложения, к выводу которых мы сейчас переходим, хотя и опираются по существу на указанные теоремы, но никоим образом не вытекают из них непосредственно.

Формулируем основную лемму.

ЛЕММА 3. *Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева p-группа высоты $s > 1$, имеющая инварианты $d_1, d_2, \ldots, d_s$. Тогда*

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_s; \alpha) \equiv H(d_1 + d_2, d_3, \ldots, d_s; \alpha) \pmod{p^{d_1}}.$$

Доказательство. Покажем, что лемма справедлива при $s = 2$, т. е. что

$$H(d_1, d_2; \alpha) \equiv \varphi_{d_1+d_2,\,\alpha} \pmod{p^{d_1}}.$$

Будем считать, сначала, что $\alpha \leqslant d_1$. Имеем

$$H(d_1, d_2; \alpha) = \sum_{k=0}^{d_2} p^{k(d_1-\alpha+k)} \varphi_{d_1-k,\, d_1-\alpha+k} \varphi_{d_2,\, k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{d_2} p^{k(d_1-\alpha+k)} \cdot \frac{P_{d_1-k,\, d_1-\alpha+k}}{P_{\alpha-2k,\, 0}} \varphi_{d_2,\, k} =$$

$$= \frac{1}{P_{\alpha,\, 0}} \sum_{k=0}^{d_2} p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{d_1-k,\, d_1-\alpha+k} P_{\alpha,\, \alpha-2k} \varphi_{d_2,\, k}.$$

Заметим, что если $0 \leqslant k \leqslant d_1$, то

$$(-1)^k p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{d_1-k,\, d_1-\alpha+k} \equiv p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{d_1,\, d_1-\alpha+k} \pmod{p^{d_1}}, \qquad (40)$$

так как при $k=0$ сравнение (40) тривиально, а при $k>0$

$$k(d_1-\alpha+k)+d_1-k+1 = k(d_1-\alpha)+k^2-k+1+d_1 > d_1.$$

Имея в виду определение символа $P_{\alpha,\, \beta}$, следует особо рассмотреть случай, когда $d_1-k < d_1-\alpha+k$, т. е. $\alpha < 2k$. Дело в том, что в указанном случае $P_{d_1-k,\, d_1-\alpha+k}=0$ без того, чтобы $P_{d_1,\, d_1-\alpha+k}$ непременно обращалось в нуль. Сравнение (40), тем не менее, сохраняет свою силу, так как теперь будем иметь

$$k(d_1-\alpha+k) \geqslant k(d_1-2k+1+k) = k(d_1-k+1) =$$
$$= (k-1)(d_1-k)+d_1 \geqslant d_1.$$

Далее, при $0 \leqslant k \leqslant d_1$

$$(-1)^k p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{\alpha,\, \alpha-2k} \equiv p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{\alpha,\, \alpha-k} \pmod{p^{d_1}}, \qquad (41)$$

так как при $k=0$ сравнение (41) тривиально, а при $k>0$ имеем

$$k(d_1-\alpha+k)+\alpha-2k+1 = (k-1)(d_1-\alpha)+d_1-\alpha+\alpha+(k-1)^2 \geqslant d_1.$$

Следует иметь в виду, что если $\alpha < 2k$, то $P_{\alpha,\, \alpha-2k}=0$ без того, чтобы $P_{\alpha,\, \alpha-k}$ непременно обращалось в нуль. Сравнение (41) остается, однако, справедливым и в этом случае, так как теперь

$$k(d_1-\alpha+k) \geqslant k(d_1-2k+1+k) \geqslant d_1.$$

Итак, если $0 \leqslant k \leqslant d_1$, то

$$p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{d_1-k,\, d_1-\alpha+k} P_{\alpha,\, \alpha-2k} \varphi_{d_2,\, k} \equiv$$
$$\equiv p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{d_1,\, d_1-\alpha+k} P_{\alpha,\, \alpha-k} \varphi_{d_2,\, k} \pmod{p^{d_1}},$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{d_2} p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{d_1-k,\, d_1-\alpha+k} P_{\alpha,\, \alpha-2k} \varphi_{d_2,\, k} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{d_2} p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{d_1,\, d_1-\alpha+k} P_{\alpha,\, \alpha-k} \varphi_{d_2,\, k} \pmod{p^{d_1}}.$$

Преобразуем правую часть последнего сравнения с помощью леммы 2, § 1, применяя конкретно равенство (5). Очевидно, в данном случае следует принять

$$a = d_2, \quad b = d_1, \quad c = \alpha, \quad i = k.$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{d_2} p^{k(d_1-\alpha+k)} P_{d_1-k,\ d_1-\alpha+k} P_{\alpha,\ \alpha-2k} \varphi_{d_2,\ k} \equiv P_{d_1+d_2,\ d_1+d_2-\alpha} \pmod{p^{d_1}}.$$

Разделив обе части сравнения на $P_{\alpha,\ 0}$, получим

$$H(d_1,\ d_2;\ \alpha) \equiv \varphi_{d_1+d_2,\ \alpha} \pmod{p^{d_1}}.$$

Пусть, теперь, $\alpha > d_1$. Тогда

$$H(d_1,\ d_2;\ \alpha) = H(d_1,\ d_2;\ d_1+d_2-\alpha) \equiv \varphi_{d_1+d_2,\ d_1+d_2-\alpha} \pmod{p^{d_1}},$$

но

$$\varphi_{d_1+d_2,\ d_1+d_2-\alpha} = \varphi_{d_1+d_2,\alpha},$$

так что

$$H(d_1,\ d_2;\ \alpha) \equiv \varphi_{d_1+d_2,\ \alpha} \pmod{p^{d_1}}.$$

Таким образом, лемма доказана полностью для случая $s=2$. Применим теперь индукцию, предполагая, что теорема имеет место для всех неэлементарных абелевых групп с высотой, меньшей s, и поставив себе целью доказать ее для групп с высотой, равной s.

Очевидно, мы можем полагать при этом, что $s \geqslant 3$. Будем считать сначала, что $\alpha \leqslant \sum_{i=1}^{s-1} d_i$. Величину $H(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_s;\ \alpha)$ можно определить следующим образом:

$$H(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_s;\ \alpha) = \sum_{q_s=0}^{d_s} \sum_{q_{s-1}=q_s}^{d_{s-1}} \cdots \sum_{q_2=q_3}^{d_2} \begin{Bmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_{s-1} & d_s \\ \alpha-\sum_{i=2}^{s} q_i & q_2 & \ldots & q_{s-1} & q_s \end{Bmatrix}$$

или

$$H(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_s;\ \alpha) = H(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{s-1};\ \alpha) +$$
$$+ \sum_{q_s=1}^{d_s} \sum_{q_{s-1}=q_s}^{d_{s-1}} \cdots \sum_{q_2=q_3}^{d_2} \begin{Bmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_s \\ \alpha-\sum_{i=2}^{s} q_i & q_2 & \ldots & q_s \end{Bmatrix}.$$

Имея в виду определение символа $\begin{Bmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_l \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_l \end{Bmatrix}$ и полагая для краткости $\sum_{i=l}^{s} q_i = f_l$, получаем

$$H(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_s;\ \alpha) = H(d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{s-1};\ \alpha) +$$
$$+ \sum_{q_s=1}^{d_s} \sum_{q_{s-1}=q_s}^{d_{s-1}} \cdots \sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^t \varphi_{d_1-q_2,\ d_1-\alpha+f_2} \cdot \prod_{i=2}^{s} \varphi_{d_i-q_{i+1},\ d_i-q_i} \quad (q_{s+1}=0), \quad (42)$$

где

$$t = (d_1-\alpha+f_2)\, q_2 + \sum_{i=2}^{s-1} (d_i-q_i)\, q_{i+1}.$$

или

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_s; \alpha) = H(d_1, d_2, \ldots, d_{s-1}; \alpha) +$$
$$+ \sum_{q_s=1}^{d_s} \sum_{q_{s-1}=q_s}^{d_{s-1}} \cdots \sum_{q_3=q_4}^{d_3} \prod_{i=3}^{s} \varphi_{d_i-q_{i+1},\, d_i-q_i} \sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^t \varphi_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} \varphi_{d_2-q_3,\, d_2-q_2}. \quad (43)$$

Введем следующие обозначения:

$$\sum_{i=1}^{j} d_i = n_j, \quad n_s = n, \quad q_i - q_{i+1} = k_i,$$

так что $q_j = \sum_{i=j}^{s} k_i$. Имеем

$$t = \left(d_1 - \alpha + \sum_{i=2}^{s} q_i\right) q_2 + \sum_{i=2}^{s-1} (d_i - q_i)\, q_{i+1} =$$
$$= (d_1 - \alpha + q_2 + q_3 + \cdots + q_s)(k_2 + k_3 + \cdots + k_{s-1} + k_s) +$$
$$+ (d_2 - q_2)(k_3 + k_4 + \cdots + k_{s-1} + k_s) + \cdots + (d_{s-1} - q_{s-1})\, k_s =$$
$$= (n_1 - \alpha + f_2)\, k_2 + (n_2 - \alpha + f_3)\, k_3 + \cdots + (n_{s-1} - \alpha + f_s)\, k_s =$$
$$= \sum_{i=1}^{s-1} (n_i - \alpha + f_{i+1})\, k_{i+1}.$$

Прежде чем перейти к преобразованию выражения (43), рассмотрим произведение

$$p^t \varphi_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} \varphi_{d_2-d_3,\, q_2-q_2}.$$

Заметим, что

$$p^t \varphi_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} \varphi_{d_2-q_3,\, d_2-q_2} = p^t \cdot \frac{P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} \varphi_{d_2-q_3,\, d_2-q_2}}{P_{\alpha-q_2-f_2,\, 0}} =$$
$$= \frac{p^t}{P_{\alpha,\, 0}} P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2} \varphi_{d_2-q_3,\, q_2-q_3}.$$

Легко видеть, что если $k_s = q_s > 0$ и $d_1 - \alpha + f_2 > 0$, то

$$(-1)^{f_2+q_2-k_2} p^t P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} \equiv p^t P_{d_1+f_2-k_2,\, d_1-\alpha+f_2} \pmod{p^{d_1}}. \quad (44)$$

В самом деле, отметим прежде всего, что при всех значениях j, удовлетворяющих условию $0 < j < s$,

$$n_j - \alpha + f_{j+1} > 0.$$

Действительно, разность

$$(n_j - \alpha + f_{j+1}) - (n_1 - \alpha + f_2) = (n_j - n_1) - (f_2 - f_{j+1}) =$$
$$= \sum_{i=2}^{j} d_i - \sum_{i=2}^{j} q_i = \sum_{i=2}^{j} (d_i - q_i) \geqslant 0$$

и так как, по предположению, $n_1 - \alpha + f_2 > 0$, то и $n_j - \alpha + f_{j+1} > 0$. Таким образом,

$$t \geqslant \sum_{i=1}^{s-1} k_{i+1} = \sum_{i=2}^{s} k_i = q_2$$

и, следовательно,

$$t + d_1 - q_2 + 1 > d_1,$$

что и подтверждает справедливость сравнения (44). Отметим при этом, что если $d_1 - \alpha + f_2 > d_1 - q_2$, т. е. $\alpha \leqslant f_2 + q_2 - 1$, так что

$$P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} = 0,$$

то $t \geqslant d_1$. В самом деле, в этом случае

$$t \geqslant (d_1 - f_2 - q_2 + 1 + f_2)\, q_2 = (q_2 - 1)(d_1 - q_2) + d_1 \geqslant d_1.$$

Далее, если $k_s = q_s > 0$ и $d_1 - \alpha + f_2 > 0$, то

$$(-1)^{f_2+q_2-k_2} p^t P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2} \equiv p^t P_{\alpha,\, \alpha-k_2} \pmod{p^{d_1}}. \qquad (45)$$

Для того чтобы убедиться в правильности сравнения (45), достаточно заметить, что $t + \alpha - q_2 - f_2 + 1 \geqslant d_1$. Но

$$t + \alpha - q_2 - f_2 + 1 = \sum_{i=1}^{s-2} (n_i - \alpha + f_{i+1})\, k_{i+1} + (n_{s-1} - \alpha + f_s)\, k_s +$$

$$+ \alpha - q_2 - f_2 + 1 \geqslant \sum_{i=2}^{s-1} k_i + (n_{s-1} - \alpha)(k_s - 1) + f_s k_s + n_{s-1} - \alpha + \alpha - q_2 - f_2 + 1.$$

Так как

$$\sum_{i=2}^{s-1} k_i = q_2 - k_s, \quad n_{s-1} \geqslant d_1 + f_2 - f_3, \quad f_s = q_s = k_s, \quad \alpha \leqslant n_{s-1},$$

то

$$t + \alpha - q_2 - f_2 + 1 \geqslant q_2 - k_s + k_s^2 + d_1 - k_s - q_2 + 1 = d_1 + (k_s - 1)^2 \geqslant d_1.$$

Если $\alpha - q_2 - f_2 < 0$, т. е. $\alpha \leqslant q_2 - f_2 - 1$, так что $P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2} = 0$, то

$$t \geqslant (d_1 - q_2 - f_2 + 1 + f_2)\, q_2 \geqslant d_1.$$

Покажем теперь, что если $k_s > 0$, то

$$p^t P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2} \equiv p^t P_{d_1+f_2-k_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-k_2} \pmod{p^{d_1}}. \quad (46)$$

Если $d_1 - \alpha + f_2 > 0$, то сравнение (46) вытекает из сравнений (44) и (45). Если $d_1 - \alpha + f_2 < 0$, то сравнение (46) тривиально, так как обе части его обращаются в ноль. Если $d_1 - \alpha + f_2 = 0$, то $d_1 - q_2 = \alpha - q_2 - f_2$ и $d_1 + f_2 - k_2 = \alpha - k_2$, так что

$$P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2} P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} = P_{\alpha,\, \alpha-k_2} P_{d_1+f_2-k_2,\, d_1-\alpha+f_2} = P_{\alpha,\, 0}.$$

Из (46) следует, что

$$\sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^t P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2}\, \varphi_{d_2-q_3,\, q_2-q_3} \equiv$$

$$\equiv \sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^t P_{d_1+f_2-k_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-k_2}\, \varphi_{d_2-q_3,\, k_3} \pmod{p^{d_1}}$$

или

$$\sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^t P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2} \varphi_{d_2-q_3,\, q_2-q_3} \equiv$$

$$\equiv p^{t_1} \sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^{(d_1-\alpha+f_2)k_2} P_{d_1+f_2-k_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-k_2} \varphi_{d_2-q_3,\, k_2} \pmod{p^{d_1}}, \qquad (47)$$

где

$$t_1 = \sum_{i=2}^{s-1} (n_i - \alpha + f_{i+1}) k_{i+1} = \left(d_1 + d_2 - \alpha + \sum_{i=3}^{s} q_i\right) q_3 + \sum_{i=3}^{s-1} (d_i - q_i)\, q_{i+1}$$

(если $s=3$, то, конечно, надо считать $\sum_{i=3}^{s-1}(d_i-q_i)\,q_{i+1}=0$).

Далее, замечаем, что

$$d_1 - \alpha + f_2 = d_1 - \alpha + f_3 + q_3 + k_2 \quad \text{и} \quad d_1 + f_2 - k_2 = d_1 + f_3 + q_3.$$

Поэтому

$$\sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^{(d_1-\alpha+f_2)k_2} P_{d_1+f_2-k_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-k_2} \varphi_{d_2-q_3,\, k_2} =$$

$$= \sum_{k_2=0}^{d_2-q_3} p^{(d_1+f_3+q_3-\alpha+k_2)k_2} P_{d_1+f_3+q_3,\, d_1+f_3+q_3-\alpha+k_2} P_{\alpha,\, \alpha-k_2} \varphi_{d_2-q_3,\, k_2}. \qquad (48)$$

Преобразуем выражение, стоящее в правой части последнего равенства, используя упомянутую ранее лемму. При этом принимаем

$$a = d_2 - q_3, \quad b = d_1 + f_3 + q_3, \quad c = \alpha, \quad i = k_2.$$

Имеем

$$\sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^{(d_1-\alpha+f_2)k_2} P_{d_1+f_2-k_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-k_2} \varphi_{d_2-q_3,\, k_2} = P_{d_1+d_2+f_3,\, d_1+d_2+f_3-\alpha},$$

откуда

$$\sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^t P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2} \varphi_{d_2-q_3,\, q_2-q_3} \equiv$$

$$\equiv p^{t_1} P_{d_1+d_2+f_3,\, d_1+d_2+f_3-\alpha} \pmod{p^{d_1}}.$$

Так как $P_{\alpha,\,0}$ взаимно просто с p и обе части последнего сравнения делятся на $P_{\alpha,\,0}$, то мы имеем право записать:

$$\sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^t \frac{P_{d_1-q_2,\, d_1-\alpha+f_2} P_{\alpha,\, \alpha-q_2-f_2}}{P_{\alpha,\,0}} \varphi_{d_2-q_3,\, q_2-q_3} \equiv$$

$$\equiv p^{t_1} \varphi_{d_1+d_2+f_3,\, d_1+d_2+f_3-\alpha} \pmod{p^{d_1}}. \qquad (49)$$

Как было замечено Холлом [(4), стр. 38], функция $\varphi_{\alpha,\,\rho}$ обладает тем свойством, что

$$\varphi_{\alpha+\beta,\,\rho} \equiv \varphi_{\alpha,\,\rho} \pmod{p^{\alpha-\rho+1}}.$$

Поэтому, если $\alpha - f_3 - q_3 \geqslant 0$, то

$$\varphi_{d_1+d_2+f_3,\ d_1+d_2+f_3-\alpha} \equiv \varphi_{d_1+d_2-q_3,\ d_1+d_2+f_3-\alpha} \pmod{p^{\alpha-f_3-q_3+1}}.$$

Отсюда, если $q_3 > 0$, то

$$p^{t_1}\varphi_{d_1+d_2+f_3,\ d_1+d_2+f_3-\alpha} \equiv p^{t_1}\varphi_{d_1+d_2-q_3,\ d_1+d_2+f_3-\alpha} \pmod{p^{d_1}}. \qquad (50)$$

В самом деле, если $\alpha - f_3 - q_3 \geqslant 0$ и $d_1 + d_2 + f_3 - \alpha \geqslant 0$, то сравнение (50) вытекает из предыдущего, так как

$$t_1 + \alpha - f_3 - q_3 + 1 = (d_1 + d_2 - \alpha + f_3)\, q_3 + \sum_{i=3}^{s-1} (d_i - q_i)\, q_{i+1} +$$
$$+ \alpha - f_3 - q_3 + 1 \geqslant d_1 + d_2 - \alpha + f_3 + \alpha - f_3 - q_3 + 1 > d_1.$$

Если $d_1 + d_2 + f_3 - \alpha \geqslant 0$, но $\alpha \leqslant f_3 + q_3 - 1$, то достаточно заметить, что в данном случае

$$t_1 = \Bigl(d_1 + d_2 - \alpha + \sum_{i=3}^{s} q_i\Bigr) q_3 + \sum_{i=3}^{s-1} (d_i - q_i)\, q_{i+1} \geqslant$$
$$\geqslant d_1 + d_2 - f_3 - q_3 + 1 + f_3 > d_1.$$

Если, наконец, $d_1 + d_2 + f_3 - \alpha < 0$, то сравнение (50) тривиально.

Из сравнения (49) получаем

$$\sum_{q_2=q_3}^{d_2} p^{t}\varphi_{d_1-q_2,\ d_1-\alpha+f_2}\,\varphi_{d_2-q_3,\ d_2-q_3} \equiv$$
$$\equiv p^{t_1}\varphi_{d_1+d_2-q_3,\ d_1+d_2+f_3-\alpha} \pmod{p^{d_1}}. \qquad (51)$$

Преобразуя, с помощью сравнения (51), правую часть равенства (43), приходим к выводу:

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_s;\ \alpha) \equiv H(d_1, d_3, \ldots, d_{s-1};\ \alpha) +$$
$$+ \sum_{q_s=1}^{d_s} \sum_{q_{s-1}=q_s}^{d_{s-1}} \cdots \sum_{q_3=q_4}^{d_3} p^{t_1}\varphi_{d_1+d_2-q_3,\ d_1+d_2-\alpha+f_3} \prod_{i=3}^{s} \varphi_{d_i-q_{i+1},\ d_i-q_i} \pmod{p^{d_1}}; \quad (52)$$

Пользуясь индукционным предположением и учитывая определение символа $\begin{Bmatrix} d_1 d_2 \ldots d_l \\ a_1 a_2 \ldots a_l \end{Bmatrix}$, преобразуем правую часть сравнения (52). Имеем

$$H(d_1, d_2, \ldots d_s;\alpha) \equiv H(d_1 + d_2, d_3, \cdots, d_{s-1};\alpha) +$$
$$+ \sum_{q_s=1}^{d_s} \sum_{q_{s-1}=q_s}^{d_{s-1}} \cdots \sum_{q_3=q_4}^{d_3} \begin{Bmatrix} d_1 + d_2 & d_3 \ldots d_{s-1}\, d_s \\ \alpha - f_3 & q_3 \ldots q_{s-1}\, q_s \end{Bmatrix} \pmod{p^{d_1}},$$

откуда

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_s; \alpha) \equiv$$

$$\equiv \sum_{q_s=0}^{d_s} \sum_{q_{s-1}=q_s}^{d_{s-1}} \cdots \sum_{q_3=q_4}^{d_3} \begin{Bmatrix} d_1+d_2 & d_3 \ldots d_{s-1} & d_s \\ \alpha - f_3 & q_3 \ldots q_{s-1} & q_s \end{Bmatrix} \pmod{p^{d_1}}$$

или

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_s; \alpha) \equiv H(d_1+d_2, d_3, \ldots, d_s; \alpha) \pmod{p^{d_1}}.$$

Пусть, теперь, $\alpha > \sum_{i=1}^{s-1} d_i$. Тогда

$$H(d_1, d_2, \ldots d_s; \alpha) = H\left(d_1, d_2, \ldots, d_s; \sum_{i=1}^{s} d_i - \alpha\right) \equiv$$

$$\equiv H\left(d_1+d_2, d_3, \ldots, d_s; \sum_{i=1}^{s} d_i - \alpha\right) \pmod{p^{d_1}},$$

откуда снова имеем

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_s; \alpha) \equiv H(d_1+d_2, d_3, \ldots, d_s; \alpha) \pmod{p^{d_1}}.$$

Лемма, таким образом, доказана полностью.

Важнейшим и непосредственным следствием полученного только что предложения является

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева группа порядка p^n и ранга d. Число подгрупп порядка (или индекса) p^α $(0 \leqslant \alpha \leqslant n)$ группы $\mathfrak{P}$ сравнимо с $\varphi_{n,\alpha}$ по модулю p^d.*

В самом деле, пусть инвариантами $\mathfrak{P}$ будут числа $d_1 = d, d_2, \ldots, d_s$. Очевидно, $\sum_{i=1}^{s} d_i = n$. Применяя последовательно лемму, имеем

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_s; \alpha) \equiv H(d_1+d_2, d_3 \ldots, d_s; \alpha) \pmod{p^d},$$

$$H(d_1+d_2, d_3, \ldots, d_s; \alpha) \equiv H(d_1+d_2+d_3, \ldots, d_s; \alpha) \pmod{p^{d_1+d_2}},$$

. . . .

$$H(d_1+d_2+\cdots+d_{s-1}, d_s; \alpha) \equiv \varphi_{n,\alpha} \pmod{p^{\sum_{i=1}^{s-1} d_i}},$$

так что

$$H(d_1, d_2, \ldots, d_s; \alpha) \equiv \varphi_{n,\alpha} \pmod{p^d}.$$

Легко видеть, что теорема (10) содержит, как частные случаи, различные предложения о числе подгрупп абелевой p-группы. Прежде всего из нее непосредственно вытекает классическое положение, согласно которому число подгрупп определенного порядка абелевой p-группы тождественно равно $1 \pmod p$.

Далее, теорема 10 значительно усиливает такое, уже упоминавшееся ранее (§ 3), предложение, представляющее собой частный случай теоремы Холла (справедливой для любых p-групп):

Число подгрупп индекса p абелевой p-группы ранга d $(0 \leqslant \alpha \leqslant d)$ сравнимо с $\varphi_{d,\alpha}$ по модулю $p^{d-\alpha+1}$.

В самом деле, нетрудно видеть, что

$$\varphi_{n,\alpha} \equiv \varphi_{d,\alpha} \pmod{p^{d-\alpha+1}}.$$

Отметим также, что теорема 10 усиливает для абелевых групп другое общее предложение Холла [(7), стр. 499], которое в случае коммутативной группы может быть сформулировано следующим образом:

Число подгрупп порядка p^α абелевой p-группы $\mathfrak{P}$ ранга d сравнимо с $\varphi_{\sigma+\alpha-1,\alpha}$ по модулю p^σ, где $\sigma = d - \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$.

В самом деле, очевидно, что $\sigma+\alpha-1 \leqslant d$ и что

$$\varphi_{n,\alpha} \equiv \varphi_{\sigma+\alpha-1,\alpha} \pmod{p^\sigma}.$$

Наконец, заметив, что если $0 < \alpha < n$, то

$$\varphi_{n,\alpha} \equiv 1 + p \pmod{p^2},$$

приходим к выводу, что частным случаем теоремы 10 является известный, цитированный выше (§ 3), результат Миллера.

Теорему 10 будем называть также «теоремой о концентрации». Чтобы до известной степени оправдать это название и вместе с тем представить в наиболее отчетливой форме вытекающее из полученного предложения обобщение теоремы Миллера, формулируем следующий результат, для обоснования которого достаточно будет сослаться на сравнение (8) (§ 1):

ТЕОРЕМА 11. *Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева группа порядка p^n и ранга d. Если $i < \alpha < n - i$, а $d > i+1$, то число подгрупп порядка (или индекса) p^α группы $\mathfrak{P}$ сравнимо с $\left\{ {i+1 \atop i+1} \right\}$ по модулю p^{i+2}.*

Задавая i различные значения, можно получить целый ряд теорем, позволяющих при тех или иных предположениях оценить число подгрупп заданного порядка абелевой p-группы. В частности, при $i = -1$ получается вышеупомянутое классическое предложение, при $i = 0$ теорема 11 сводится к теореме Миллера, а при $i = 1$ имеет следующий результат, который отметим особо:

ТЕОРЕМА 12. *Пусть $\mathfrak{P}$ — абелева группа порядка p^n и ранга $d > 2$. Если $1 < \alpha < n-1$, то число подгрупп порядка (или индекса) p^α группы $\mathfrak{P}$ сравнимо с $1 + p + 2p^2$ по модулю p^3.*

В настоящем исследовании мы не ставим перед собой задачи распространить в той или другой формулировке теорему 11 или хотя бы ближайшим образом — теорему 12 на случай любой p-группы. Следует заметить, что теорема 12 (если оставить текст ее неизмененным) применительно к любой p-группе просто неверна.

В самом деле, как заметил Tazawa ([8]), существует неабелева группа порядка p^4, у которой $d=3$ и которая имеет $1+p+p^2$ подгрупп порядка p^2. Эта группа порождается элементами P, Q, R, связанными такими определяющими равенствами:

$$P^{p^2}=1, \qquad Q^p=1, \qquad R^p=1,$$

$$R^{-1}QR=QP^p,$$

$$R^{-1}PR=P,$$

$$Q^{-1}PQ=P. \tag{53}$$

С другой стороны, нельзя в этом контексте не упомянуть о следующей частного характера, но интересной теореме Tazawa ([9]).

Пусть $\mathfrak{P}$ — группа порядка p^n, имеющая циклическую главную подгруппу. Пусть $d \geqslant 3$, $p>3$ и $\mathfrak{P}$ не содержит подгрупп порядка p^4 типа (53). *Число подгрупп порядка p^m группы $\mathfrak{P}$ сравнимо с $1+p+2p^2$ по модулю p^3, если $1<m<n-1$.*

Очевидно, приведенное предложение не включает теорему 12, но и не вытекает из нее. Представляется поэтому вполне естественным попытаться получить результат, который включал бы, как частные случаи, и теорему 12 и теорему Tazawa.

Краснознаменная Военно-Воздушная
Академия В. С. СССР

Поступило
15. II. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Miller G. A., Number of the subgroups of any given Abelian group, Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A. 25 (1939), 258—262.

[2] Miller G. A., Independent generators of the subgroups of an Abelian group, Proc. Nat. Ac. Sci. U. S. A. 25 (1939), 364—367.

[3] Hilton H., An introduction to the theory of groups of finite order, Oxford, 1908.

[4] Hall P., A contribution to the theory of groups of prime-power order, Proc. London Math. Soc. (2), 36 (1933), 29—95.

[5] Miller G. A., Form of the number of subgroups of prime-power groups, Bulletin of the Amer. Math. Soc., 26 (1919), 66—72.

[6] Miller G. A., An extension of Sylow's theorem, Proc. London Math. Soc. 2, 2, 1904.

[7] Hall P., On a theorem of Frobenius, Proc. London Math. Soc., 40 (1935), 468—501.

[8] Tazawa Mosatada, Remarks of Frobenius' and Kulakoff's theorems on *p*-groups, The Science Reports of the Tôhoku imperial University, XXIII, N. 4 (1934), 449—476.

[9] Tazawa Mosatada, Remarks of Frobenius' and Kulakoff's theorems on *p*-groups. II, The Science Reports of the Tôhoku imperial University, XXIV, N 1 (1935), 161—163.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 379–396

В. М. ДАРЕВСКИЙ

УСЛОВИЯ СОВМЕСТНОСТИ МЕТОДОВ TOEPLITZ'А

(*Представлено академиком* С. Л. Соболевым)

Устанавливаются эффективные достаточные условия совместности конечнострочных методов Toeplitz'а. Строятся методы A, B, для которых эти условия реализуются, причем поля A', B' методов A, B удовлетворяют требованиям: $A'B' \neq A'$, $A'B' \neq B'$, $A'B'$ содержит расходящиеся последовательности.

Настоящая заметка является дополнением статьи ([1]) и имеет целью установить эффективные достаточные условия совместности методов Toeplitz'а.

Мы будем пользоваться некоторыми определениями и обозначениями, введенными в начале статьи ([1]), пополнив их следующими.

Множество всех последовательностей $x=(x_k)$, входящих в поле A' метода A, для которых имеем $x_k = O(\chi_k)$, где $\chi=(\chi_k)$ — какая-нибудь фиксированная последовательность $(\chi_k > 0,\ k=1, 2, \ldots)$, будем обозначать через A'_χ. Методы A и B будем называть *χ-совместными*, если для любого $x \in A'_\chi B'_\chi$ имеем $\overline{A}(x) = \overline{B}(x)$. *

χ-совместные методы A и B, для которых $A'_\chi = B'_\chi$, будем называть *χ-эквивалентными*.

Если для линейного метода суммирования A можно указать такую последовательность $\chi=(\chi_k)$ $(\chi_k > 0,\ k=1, 2, \ldots)$, что $A' = A'_\chi$, то будем называть ее *мажорантной* последовательностью по отношению к A, а метод A — *принадлежащим к классу* L^χ и писать $A \in L^\chi$.

Метод суммирования, заданный с помощью матрицы, у которой в каждой строчке имеется лишь конечное число отличных от нуля элементов, будем называть *конечнострочным*.

Условия совместности методов Toeplitz'а A и B будут выведены в предположении, что эти методы конечнострочные и что $A \in L^\chi$.

Укажем, что всякий реверсивный матричный метод

$$A=(a_{ik}) \in L^\chi.$$

Действительно, обозначим через $\xi^{(0)} = (\xi_k^{(0)})$ решение системы уравнений

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \quad (i=1, 2, \ldots)$$

при $y=(y_i)=1, 1, \ldots$

* $\overline{A}(x)$ означает результат суммирования последовательности x методом A.

Для любых $x=(x_k)\in A'$, $y=(y_i)=A(x)$ * имеем [см. ([2]), стр. 47—50; 65—67 и ([3]), стр. 376]:

$$x_k=\Big(\xi_k^{(0)}-\sum_{i=1}^{\infty}\xi_k^{(i)}\Big)\lim_{i\to\infty}y_i+\sum_{i=1}^{\infty}\xi_k^{(i)}y_i, \qquad (a)$$

где $\xi^{(i)}=(\xi_k^{(i)})$ — фундаментальные последовательности, соответствующие матрице (a_{ik}) [см. ([1])], причем

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_k^{(i)}|<\infty \quad (k=1,2,\ldots).$$

Отсюда следует, что если положить

$$\chi_k=\max\Big(\sum_{i=0}^{\infty}|\xi_k^{(i)}|,\ 1\Big) \quad (k=1,2,\ldots), \text{ **}$$

то $\chi=(\chi_k)$ будет мажорантной последовательностью для метода $A=(a_{ik})$, т. е. для любого $x=(x_k)\in A'$ будем иметь $x_k=O(\chi_k)$.

Если метод $A=(a_{ik})$ нормальный ***, то в качестве его мажорантной последовательности может быть принята последовательность $\chi=(\chi_k)$, у которой

$$\chi_k=\sum_{i=1}^{k}|\xi_k^{(i)}|,$$

так как в этом случае для любых $x=(x_k)\in A'$, $y=(y_i)=A(x)$ имеем

$$x_k=\sum_{i=1}^{k}\xi_k^{(i)}y_i$$

и так как $\chi_k>0$ $(k=1,2,\ldots)$, поскольку $\xi_k^{(k)}=\frac{1}{a_{kk}}\neq 0$.

---

* $A(x)=(A_i(x))$, $A_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}x_k$.

** При таком выборе величин χ_k исключается возможность равенства их нулю. Мы не будем рассматривать вопрос о том, может ли для какого-нибудь реверсивного метода A $\sum_{i=0}^{\infty}|\xi_k^{(i)}|$ равняться нулю при некотором k. Укажем только, что этого не может быть, если все столбцы метода A являются сходящимися последовательностями. В самом деле, в этом случае каждая из последовательностей $\delta^{(n)}=(\delta_k^{(n)})$ ($\delta_n^{(n)}=1$, $\delta_k^{(n)}=0$ когда $k\neq n$, $n=1,2,\ldots$) принадлежит A'. Но если бы $\sum_{i=0}^{\infty}|\xi_k^{(i)}|$ равнялось нулю при некотором $k=k_1$, то, согласно равенству (a), k_1-й член любой последовательности, принадлежащей A', должен был бы быть равен нулю и, значит, последовательность $\delta^{(k_1)}$ не могла бы принадлежать A'.

*** Т. е. если $a_{ik}=0$ при $k>i$, а $a_{ii}\neq 0$ $(i=1,2,\ldots)$.

ЛЕММА 1. *Пусть матричный метод* $A=(a_{ik})$ *конечнострочный, а* $\chi=(\chi_k)$ — *какая-нибудь последовательность, причем* $\chi_k>0$ $(k=1, 2, \ldots)$. *Какова бы ни была монотонно возрастающая последовательность* (n_i) $(n_{i+1}\geqslant n_i,\ i=1, 2, \ldots,\ n_i$ — *натуральные числа*), *всегда можно указать такой метод* $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$, χ-*эквивалентный методу* A, *что* $\alpha_{in_i}\neq 0$, $\alpha_{ik}=0$, *если* $k>n_i$ $(i=1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Так как метод $A=(a_{ik})$ предполагается конечнострочным, то существует такая последовательность (k_i) (k_i — натуральные числа), что $a_{ik_i}\neq 0$, * $a_{ik}=0$, если $k>k_i$ $(i=1, 2, \ldots)$.

Пусть (ε_i) — какая-нибудь сходящаяся к нулю последовательность, причем $\varepsilon_i\neq 0$ $(i=1, 2, \ldots)$. Строим метод $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$ следующим образом: если $k_1<n_1$, то полагаем

$$\alpha_{1k}=a_{1k}\quad (1\leqslant k\leqslant k_1),\qquad \alpha_{1k}=0\quad (k_1+1\leqslant k<n_1),$$
$$\alpha_{1n_1}=\frac{\varepsilon_1}{\chi_{n_1}},\qquad \alpha_{1k}=0\quad (k>n_1).$$

Если же $k_1\geqslant n_1$, то взяв из последовательности (n_i) такое n_{i_1}, что $n_{i_1-1}\leqslant k_1<n_{i_1}$, выбираем произвольно величины α_{ik} $(1\leqslant i<i_1,\ k<n_i)$ и полагаем

$$\alpha_{in_i}=\frac{\varepsilon_i}{\chi_{n_i}}\quad (1\leqslant i<i_1),\qquad \alpha_{ik}=0\quad (1\leqslant i<i_1,\ k>n_i),$$
$$\alpha_{i_1k}=a_{1k}\quad (1\leqslant k\leqslant k_1),\qquad \alpha_{i_1k}=0\quad (k_1<k<n_{i_1}),$$
$$\alpha_{i_1n_{i_1}}=\frac{\varepsilon_{i_1}}{\chi_{n_{i_1}}},\qquad \alpha_{i_1k}=0\quad (k>n_{i_1}).$$

Таким образом, построены i_1 строчек матрицы $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$ (в случае, когда $k_1<n_1$, $i_1=1$).

Далее, если $k_2<n_{i_1+1}$, то полагаем

$$\alpha_{i_1+1,k}=a_{2k}\quad (1\leqslant k\leqslant k_2),\qquad \alpha_{i_1+1,k}=0\quad (k_2<k<n_{i_1+1}),$$
$$\alpha_{i_1+1,n_{i_1+1}}=\frac{\varepsilon_{i_1+1}}{\chi_{n_{i_1+1}}},\qquad \alpha_{i_1+1,k}=0\quad (k>n_{i_1+1}).$$

Если же $k_2\geqslant n_{i_1+1}$, то взяв из последовательности (n_i) такое n_{i_2}, что $n_{i_2-1}\leqslant k_2<n_{i_2}$, полагаем:

$$\alpha_{ik}=a_{1k}\quad (i_1+1\leqslant i<i_2,\ 1\leqslant k\leqslant k_1),\qquad \alpha_{ik}=0\quad (i_1+1\leqslant i<i_2,\ k_1<k\leqslant n_i),$$
$$\alpha_{in_i}=\frac{\varepsilon_i}{\chi_{n_i}}\quad (i_1+1\leqslant i<i_2),\qquad \alpha_{ik}=0\quad (i_1+1\leqslant i<i_2,\ k>n_i),$$
$$\alpha_{i_2k}=a_{2k}\quad (1\leqslant k\leqslant k_2),\qquad \alpha_{i_2k}=0\quad (k_2<k<n_{i_2}),$$
$$\alpha_{i_2n_{i_2}}=\frac{\varepsilon_{i_2}}{\chi_{n_{i_2}}},\qquad \alpha_{i_2k}=0\quad (k>n_{i_2}).$$

Таким образом, построены $i_2>i_1$ строчек матрицы $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$ (если $k_2<n_{i_1+1}$, то $i_2=i_1+1$).

---

* Мы исключаем из рассмотрения случай, когда некоторые из строк матрицы (a_{ik}) состоят сплошь из нулей.

Продолжая указанный процесс до бесконечности, мы получим в результате метод $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$, который, очевидно, будет χ-эквивалентен методу $A=(a_{ik})$ и удовлетворять условию: $\alpha_{in_i}\neq 0$, $\alpha_{ik}=0$, если $k>n_i$ $(i=1, 2, \dots)$. *

ЛЕММА 2. *Пусть* $\chi=(\chi_k)$ — *некоторая последовательность, для которой* $\inf\chi_k>0$. *Методы Toeplitz'a* $A=(a_{ik})$ *и* $B=(b_{ik})$ χ-*совместны тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} y_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots,\\ cy_2&=b_{11}x_1+b_{12}x_2+\dots,\\ y_3&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots,\\ cy_4&=b_{21}x_1+b_{22}x_2+\dots,\\ &\dots\dots\dots\dots\\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

не имеет решения $x=(x_k)$, *удовлетворяющего условию* $x_k=O(\chi_k)$, *если одновременно* $c\neq 1$, *а* $y=(y_i)$ *есть сходящаяся последовательность с пределом, не равным нулю.*

Доказательство**. Пусть методы $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ χ-совместны. Если существует некоторое $c=c'\neq 1$ и некоторая последовательность $y=y'=(y_i')$, сходящаяся к величине $\eta\neq 0$, при которых система (1) имеет решение $x=x'=(x_k')$, причем $x_k=O(\chi_k)$, то

$$\bar{A}(x')=\eta\neq\bar{B}(x')=c'\eta,$$

что противоречит χ-совместности методов A и B и, следовательно, условие леммы является необходимым.

Предположим теперь, что для методов Toeplitz'a $A=(a_{ik})$ и $B=(b_{ik})$ условие леммы выполнено. Если эти методы не являются χ-совместными, то существует последовательность $\chi'=(\chi_k')$ $(\chi_k'=O(\chi_k))$ такая, что

$$\bar{A}(x')=a\neq\bar{B}(x')=b.$$

Можно считать, что $a\neq 0$, $b\neq 0$, ибо если одна из величин a, b равна нулю, то можно говорить не о последовательности $x'=(x_k')$, а о последовательности

$$x''=(x_k'')=(x_k'+a+b)$$

$(x_k''=O(\chi_k)$, поскольку $\inf\chi_k>0)$, для которой

$$\bar{A}(x'')=2a+b\neq 0,\quad \bar{B}(x'')=2b+a\neq 0,$$

---

* Ясно, что указанный процесс построения метода $\mathfrak{A}$ может быть различным образом видоизменен и, следовательно, могут быть получены различные методы $\mathfrak{A}=(\alpha_{ik})$, χ-эквивалентные методу A и удовлетворяющие условию: $\alpha_{in_i}\neq 0$, $\alpha_{ik}=0$, если $k>i$ $(i=1, 2, \dots)$.

** Приводимое доказательство леммы 2 совершенно аналогично доказательству леммы 1 в статье (1).

так как предполагается, что одна и только одна из величин a, b равна нулю. Но если $\overline{A}(x') = a \neq 0$, $\overline{B}(x') = b \neq 0$ и $a \neq b$, то последовательность x' является решением системы (1), когда $c = \frac{b}{a} \neq 1$, а $y = y' = (y'_i)$, где

$$y'_{2i-1} = A_i(x'), \quad y'_{2i} = \frac{a}{b} B_i(x') \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Так как $y'_i \to a \neq 0$, то мы пришли к противоречию с условием леммы и, следовательно, достаточность этого условия доказана.

Сделаем несколько замечаний.

Пусть имеются два метода A и B, причем $A \in L^{\chi}$, и пусть метод A χ-эквивалентен некоторому методу $\mathfrak{A}$, а B χ-эквивалентен некоторому методу $\mathfrak{B}$. Очевидно, что методы A и B будут совместны тогда и только тогда, когда методы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ будут χ-совместны.

Пусть, теперь, A и B — конечнострочные методы Toeplitz'a, причем $A \in L^{\chi}$. Согласно лемме 1, можно указать такой метод $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$, χ-эквивалентный методу A, и такой метод $\mathfrak{B} = (\beta_{ik})$, χ-эквивалентный методу B, что

$$\begin{aligned} &\alpha_{i,\,2i-1} \neq 0, \quad \alpha_{ik} = 0, \text{ если } k > 2i-1, \\ &\beta_{i,\,2i} \neq 0, \quad \beta_{ik} = 0, \text{ если } k > 2i. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \dots) \tag{2}$$

Так как $A \in L^{\chi}$, то ясно, что вместе с A, B будут являться методами Toeplitz'a и χ-эквивалентные им методы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$.

Заметим, наконец, что если какой-нибудь метод Toeplitz'a $A \in L^{\chi}$ $(\chi = (\chi_k))$, то $\inf \chi_k > 0$, поскольку последовательность

$$x = 1, 1, \dots \in A'.$$

В силу сделанных замечаний и леммы 2, имеет место

ЛЕММА 3. *Пусть A и B — конечнострочные методы Toeplitz'a, причем $A \in L^{\chi}$. Пусть, далее, $\mathfrak{A} = (\alpha_{ik})$ и $\mathfrak{B} = (\beta_{ik})$ — какие-нибудь методы, удовлетворяющие условиям (2) и χ-эквивалентные, соответственно, методам A и B. Методы A и B будут совместными тогда и только тогда, когда система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1, \\ cy_2 &= \beta_{11}x_1 + \beta_{12}x_2, \\ y_3 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\ cy_4 &= \beta_{21}x_1 + \beta_{22}x_2 + \beta_{23}x_3 + \beta_{24}x_4, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

не имеет решения $x = (x_k)$, удовлетворяющего условию

$$x_k = O(\chi_k) \quad (\chi = (\chi_k)),$$

если одновременно $c \neq 1$, а $y = (y_i)$ есть сходящаяся последовательность с пределом, не равным нулю.

Нормальную матрицу, образованную коэффициентами при величинах x_k в системе (3), будем обозначать через $\Delta_{AB\chi}$.

Так как для методов A, B, указанных в лемме 3, можно различным образом выбрать соответствующие им методы $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, то можно говорить не об одной матрице $\Delta_{AB\chi}$, а о множестве таких матриц.

ЛЕММА 4. *Если конечнострочные методы Toeplitz'a A, B совместны, причём $A \in L^{\chi}$ $(\chi = (\chi_k))$, то для любой матрицы $\Delta_{AB\chi}$ существует такая подпоследовательность (k_ν) натуральных чисел k, что*

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{\chi_{k_\nu}} \sum_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}| = \infty, \\ \sum_{i\leq k_\nu}{}' |\xi_{k_\nu}^{(i)}| \neq 0, \quad \sum_{i\leq k_\nu}{}'' |\xi_{k_\nu}^{(i)}| \neq 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

($\xi^{(i)} = (\xi_k^{(i)})$ — фундаментальные последовательности, соответствующие матрице $\Delta_{AB\chi}$; $\sum\limits_{i\leq k_\nu}{}'$, $\sum\limits_{i\leq k_\nu}{}''$ означают суммы, взятые, соответственно, по всем нечетным и по всем четным индексам i в интервале между 1 и k_ν).

Доказательство*. Пусть конечнострочные методы Toeplitz'a A, B совместны, причем $A \in L^{\chi}$ $(\chi = (\chi_k))$, и пусть $c, y_1, y_2, \ldots$ — какие-нибудь величины.

Напишем систему уравнений (3), соответствующую какой-нибудь матрице $\Delta_{AB\chi}$. Решая систему (3) относительно величи $x_1, x_2, \ldots$, получаем:

$$x_k = \sum_{i\leq k}{}' \xi_k^{(i)} y_i + c \sum_{i\leq k}{}'' \xi_k^{(i)} y_i \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Так как матрица $\Delta_{AB\chi}$ регулярная, то, взяв за последовательность (x_k) некоторую сходящуюся последовательность (x'_k) с пределом $\neq 0$, получаем, в качестве соответствующего решения системы (5) при $c = 1$, некоторую последовательность (y'_i), сходящуюся к величине $\neq 0$.

Обозначим через Q множество всех значений k, при которых ни одна из величин $\sum\limits_{i\leq k}{}' |\xi_k^{(i)}|$, $\sum\limits_{i\leq k}{}'' |\xi_k^{(i)}|$ не равна нулю. Если допустить, что множество Q пустое, или, что Q не пусто, но

$$\sup_{k\in Q} \frac{1}{\chi_k} \sum_{i=1}^{k} |\xi_k^{(i)}| < \infty, \tag{6}$$

---

* Это доказательство лишь незначительно отличается от доказательства леммы 4 в статье (1).

то при любом фиксированном c будем иметь

$$x'_k(c) = \sum_{i \leq k}{}' \xi_k^{(i)} y'_i + c \sum_{i \leq k}{}'' \xi_k^{(i)} y'_i = O(\chi_k).$$

В самом деле, для всех $k \notin Q$ по крайней мере одна из величин $\sum\limits_{i \leq k_\nu}{}' |\xi_{k_\nu}^{(i)}|$, $\sum\limits_{i \leq k_\nu}{}'' |\xi_{k_\nu}^{(i)}|$ равна нулю и, следовательно, для указанных k $x'_k(c)$ равно либо x'_k, либо cx'_k, а $x'_k = O(\chi_k)$, поскольку (x'_k), являясь сходящейся последовательностью, принадлежит A'; для всех же $k \in Q$ (если Q не пусто) $\frac{|x'_k(c)|}{\chi_k} < \infty$, в силу условия (6).

Таким образом, предполагая, что Q пустое множество, или, что Q не пусто, но имеет место условие (6), приходим к выводу, что при любом c и некоторой сходящейся последовательности (y'_i) с пределом, отличным от нуля, система (3) имеет решение $(x'_k(c))$, причем $x'_k(c) = O(\chi_k)$, а это противоречит, согласно лемме 3, совместности методов A и B.

Итак, Q — не пустое множество и

$$\sup_{k \in Q} \frac{1}{\chi_k} \sum_{i=1}^{k} |\xi_k^{(i)}| = \infty,$$

откуда следует существование такой последовательности (k_ν), для которой выполняются условия (4).

ТЕОРЕМА. *Конечнострочные методы Toeplitz'a $A \in L^\chi$ $(\chi = (\chi_k))$ и B будут совместны, если для какой-нибудь матрицы $\Delta_{AB\chi}$ существует такая подпоследовательность (k_ν) натуральных чисел k, что, кроме условий (4), выполняются еще следующие:*

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{i \leq k_\nu}{}' \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i \leq k_\nu}{}' |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} > 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{i \leq k_\nu}{}'' \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i \leq k_\nu}{}'' |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} > 0,\\
&\lim_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} = 0, \quad \lim_{\nu\to\infty} \frac{\xi_{k_\nu}^{(i)}}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots).
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Доказательство*. Пусть условия теоремы (т. е. условия (4), (7)) выполнены. Как показано в статье ([1]) (см. доказательство тео-

* Приведенное здесь доказательство почти ничем не отличается от доказательства теоремы 5 в статье ([1]).

ремы 5), из выполнения двух последних условий (4) и первых трех условий (7) следует, что *

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \frac{\left|\sum\limits_{i\le k_\nu}' \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} \left|\xi_{k_\nu}^{(i)}\right|} = \gamma > 0. \tag{8}$$

Пусть $y_i \to \eta \neq 0$ и пусть N — некоторое натуральное число. Положим

$$y_i - \eta = \varepsilon_i, \quad \sup_i |\varepsilon_i| = M$$

и перепишем равенства (5) с номерами $k > N$ следующим образом:

$$x_k = \sum_{i\le N}' \xi_k^{(i)}\varepsilon_i + c\sum_{i\le N}'' \xi_k^{(i)}\varepsilon_i + \sum_{N<i\le k}' \xi_k^{(i)}\varepsilon_i +$$
$$+ c\sum_{N<i\le k}'' \xi_k^{(i)}\varepsilon_i + \eta c\sum_{i=1}^{k} \xi_k^{(i)} + \eta(1-c)\sum_{i\le k}' \xi_k^{(i)}$$
$$(k = N+1,\ N+2,\ \ldots).$$

Из этих равенств получаем

$$|x_k| \geqslant |\eta||1-c|\left|\sum_{i\le k}' \xi_k^{(i)}\right| - M\max(1, |c|)\sum_{i=1}^{N} |\xi_k^{(i)}| -$$
$$- \sup_{i>N} |\varepsilon_i| \max(1, |c|)\sum_{i=1}^{k} |\xi_k^{(i)}| - |\eta c|\left|\sum_{i=1}^{k} \xi_k^{(i)}\right|$$
$$(k = N+1,\ N+2,\ \ldots).$$

В частности, будем иметь

$$|x_{k_\nu}| \geqslant \left(|\eta||1-c| \frac{\left|\sum\limits_{i\le k_\nu}' \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} - M\max(1, |c|)\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} - \right.$$
$$\left. - \sup_{i>N} |\varepsilon_i| \cdot \max(1, |c|) - |\eta c| \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} \right) \sum_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}| \quad (k_\nu > N). \tag{9}$$

Считая теперь, что для произвольных, но фиксированных (y_i) $(y_i \to \eta \neq 0)$ и $c \neq 1$ величина N выбрана так, чтобы

$$\sup_{i>N} |\varepsilon_i| \cdot \max(1, |c|) \leqslant \frac{\gamma}{12}|\eta||1-c|,$$

* В статье ([1]) в формуле (15) имеется опечатка: вместо $\varliminf\limits_{\nu\to\infty}$ напечатано $\lim\limits_{\nu\to\infty}$.

выберем такое $K > N$, чтобы для всех $k_\nu > K$ выполнялись, согласно условию (8) и двум последним условиям (7), неравенства:

$$\frac{\left|\sum\limits_{i \leq k_\nu}' \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} > \frac{\gamma}{2},$$

$$M \max(1, |c|) \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} < \frac{\gamma}{12} |\eta| |1-c|,$$

$$|c| \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)}\right|}{\sum\limits_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}|} < \frac{\gamma}{12} |1-c|.$$

Тогда из неравенств (9) получаем

$$|x_{k_\nu}| > \frac{\gamma}{4} |\eta| |1-c| \sum_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}| \quad (k_\nu > K),$$

откуда, принимая во внимание первое из условий (4), вытекает, что

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{|x_{k_\nu}|}{\chi_{k_\nu}} = \infty,$$

а следовательно, $x_k \neq O(\chi_k)$.

Таким образом, мы получили следующий результат: если условия теоремы выполнены, то для любой сходящейся последовательности (y_i) с пределом $\eta \neq 0$ при любом $c \neq 1$ решение (x_k) системы (3) таково, что $x_k \neq O(\chi_k)$, чем, в силу леммы 3, теорема и доказана.

Мы сейчас убедимся на примере, что условия (4), (7) не являются «пустыми», т. е. что они реализуются для некоторых методов Toeplitz'a A, B и притом таких, что $A'B' \neq A'$, $A'B' \neq B'$, $A'B'$ содержит расходящиеся последовательности. Необходимость построения такого примера диктуется также кажущейся громоздкостью условий (4), (7).

Пусть $A = (a_{ik})$ — нормальная матрица, а $B = (b_{ik})$ — такая матрица, что $b_{i,2i} \neq 0$, $b_{ik} = 0$, если $k > 2i$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Обозначим фундаментальные последовательности, соответствующие методу A, через $\xi_k^{(i)}(A)$ и положим

$$\chi_k = \sum_{i=1}^{k} |\xi_k^{(i)}(A)|.$$

Тогда будем иметь: $A \in L^\chi$, где $\chi = (\chi_k)$.

Построим нормальную матрицу $\Delta=(\Delta_{ik})$, выбрав произвольно элемент $\Delta_{11}\neq 0$ и определив элементы Δ_{ik} $(k\leqslant i,\ i>1)$ следующим образом:

$$\Delta_{2m,\,k}=b_{mk}\quad (k\leqslant 2m),$$
$$\Delta_{2m+1,\,k}=a_{mk}\quad (k\leqslant m),$$
$$\Delta_{2m+1,\,k}=0\quad (m<k\leqslant 2m), \tag{10}$$
$$\Delta_{2m+1,\,2m+1}=\frac{\varepsilon_m}{\chi_{2m+1}}\ (m=1,2,\ldots), \tag{11}$$

где $\varepsilon=(\varepsilon_m)$ — какая-нибудь сходящаяся к нулю последовательность, причем $\varepsilon_m\neq 0$ $(m=1,2,\ldots)$. Построенная матрица $\Delta=(\Delta_{ik})$ является матрицей $\Delta_{AB\chi}$, поскольку строчки матрицы Δ с нечетными номерами образуют метод $\mathfrak{A}$, χ-эквивалентный методу A, а строчки матрицы Δ с четными номерами образуют метод B.

Обозначим фундаментальные последовательности, соответствующие матрице Δ, через $\xi_k^{(i)}$. Имеют место известные формулы*:

$$\xi_k^{(i)}=0\quad (k<i),\qquad \xi_i^{(i)}=\frac{1}{\Delta_{ii}},$$

$$\xi_k^{(i)}=(-1)^{k-i}\frac{\begin{vmatrix}\Delta_{i+1,\,i} & \Delta_{i+1,\,i+1} & 0 & 0 & 0\ldots 0\\ \Delta_{i+2,\,i} & \Delta_{i+2,\,i+1} & \Delta_{i+2,\,i+2} & 0 & 0\ldots 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Delta_{k-1,\,i} & \Delta_{k-1,\,i+1} & \cdots & \cdots & \Delta_{k-1,\,k-1}\\ \Delta_{k,\,i} & \Delta_{k,\,i+1} & \cdots & \cdots & \Delta_{k,\,k-1}\end{vmatrix}}{\Delta_{ii}\,\Delta_{i+1,\,i+1}\cdots\Delta_{kk}} \tag{12}$$

$$(k>i)^{**}.$$

Из равенств (10), (12) получаем

$$\xi_{2m+1}^{(i)}=(-1)^{m-i+1}\frac{\begin{vmatrix}\Delta_{i+1,\,i} & \Delta_{i+1,\,i+1} & 0 & 0\ldots 0\\ \Delta_{i+2,\,i} & \Delta_{i+2,\,i+1} & \Delta_{i+2,\,i+2} & 0\ldots 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \Delta_{mi} & \Delta_{m,\,i+1} & \cdots & \Delta_{mm}\\ \Delta_{2m+1,\,i} & \Delta_{2m+1,\,i+1} & \cdots & \Delta_{2m+1,\,m}\end{vmatrix}}{\Delta_{ii}\,\Delta_{i+1,\,i+1}\cdots\Delta_{mm}\Delta_{2m+1,\,2m+1}} \tag{13}$$

$$(i<m,\ m=1,2,\ldots),$$

$$\xi_{2m+1}^{(m)}=-\frac{\Delta_{2m+1,\,m}}{\Delta_{mm}\Delta_{2m+1,\,2m+1}}\quad (m=1.\ 2,\ldots), \tag{14}$$

$$\xi_{2m+1}^{(i)}=0\quad (m<i\leqslant 2m,\ m=1,2,\ldots). \tag{15}$$

---

* См., например, статью ([1]), стр. 23.

** Если $k=i+1$, то детерминант следует принять равным $\Delta_{i+1,\,i}$.

Построим последовательность натуральных чисел (k_ν), положив $k_0=3$, $k_{\nu+1}=2k_\nu+3$ $(\nu=0, 1, \ldots)$.

Элементы матрицы Δ, стоящие в строках с номерами $k_\nu-1$, k_ν, $k_\nu+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, подчиним условиям

$$\left.\begin{aligned} &\Delta_{k_\nu+1, i}=p_\nu \Delta_{k_\nu-1, i}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad (i\leqslant k_\nu,\ \nu=0, 1, \ldots)\ * \\ &\Delta_{k_\nu+1, i}=q_\nu \Delta_{k_\nu, i}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где p_ν, q_ν $(\nu=0, 1, \ldots)$ — некоторые числа, которые мы определим впоследствии. Другими словами, мы связываем некоторыми условиями элементы строк с номерами $k_{\nu-1}+1$, $k_{\nu-1}+2$ $(\nu=0, 1, \ldots)$** матрицы B и элементы строк с номерами $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ матрицы A***. Именно, мы требуем, чтобы

$$\left.\begin{aligned} &b_{k_{\nu-1}+2, i}=p_\nu b_{k_{\nu-1}+1, i} && (i\leqslant k_\nu),\ **** \\ &a_{k_\nu+1, i}=q_\nu a_{k_{\nu-1}+1, i} && (i\leqslant k_{\nu-1}+1), \\ &a_{k_\nu+1, i}=0 && (k_{\nu-1}+1<i<k_\nu), \\ &a_{k_\nu+1, k_\nu}=q_\nu \frac{\varepsilon_{k_{\nu-1}+1}}{\chi_{k_\nu}} && (\nu=0, 1, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Так как

$$\chi_{k_\nu}=\sum_{i=1}^{k_\nu} |\xi_{k_\nu}^{(i)}(A)|$$

и так как для величин $\xi_k^{(i)}(A)$ имеют место равенства, аналогичные равенствам для величин $\xi_k^{(i)}$ (см. стр. 388), то χ_{k_ν} определяется только через элементы матрицы A, стоящие в ее первых k_ν строках. Поэтому последнее из условий (17) безусловно выполнимо, так же как и остальные из этих условий.

---

* Так как матрица Δ — нормальная, то при $i=k_\nu$ первое условие (16) означает, что $\Delta_{k_\nu+1, k_\nu}=p_\nu \Delta_{k_\nu-1, k_\nu}=0$.

** k_{-1} следует всюду считать равным нулю.

*** Из равенств

$$k_\nu=2(k_{\nu-1}+1)+1, \quad k_\nu-1=2(k_{\nu-1}+1), \quad k_\nu+1=2(k_{\nu-1}+2) \ (\nu=0, 1, \ldots)$$

следует, что строчки с номерами $k_\nu+1$, $k_\nu-1$ матрицы Δ являются, соответственно, строчками с номерами $k_{\nu-1}+2$, $k_{\nu-1}+1$ матрицы B, а строчки с номерами k_ν матрицы Δ являются строчками с номерами $k_{\nu-1}+2$ матрицы $\mathfrak{A}$.

**** Так как $b_{k_{\nu-1}+1, k_\nu}=\Delta_{k_\nu-1, k_\nu}=0$, то первое условие (17) при $i=k_\nu$ означает, что $b_{k_{\nu-1}+2, k_\nu}=0$.

Рассмотрим величины $\xi_{k_\nu}^{(i)}$ $(i \leqslant k_\nu,\ \nu = 1, 2, \ldots)$. Прежде всего имеем

$$\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)} = \frac{1}{\Delta_{k_\nu, k_\nu}} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Далее, так как $k_\nu = 2(k_{\nu-1} + 1) + 1$, то, согласно равенствам (14), (15),

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{k_\nu}^{(i)} = 0 \quad (k_{\nu-1} + 1 < i < k_\nu), \\ &\xi_{k_\nu}^{(k_{\nu-1}+1)} = -\frac{\Delta_{k_\nu, k_{\nu-1}+1}}{\Delta_{k_{\nu-1}+1, k_{\nu-1}+1}\Delta_{k_\nu k_\nu}}, \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

а согласно равенствам (13), (16),

$$\left.\begin{aligned} &\xi_{k_\nu}^{(k_{\nu-1})} = -\frac{q_{\nu-1}}{\Delta_{k_\nu k_\nu}}, \\ &\xi_{k}^{(k_{\nu-1}-1)} = \frac{p_{\nu-1}\Delta_{k_\nu, k_{\nu-1}+1}}{\Delta_{k_{\nu-1}+1, k_{\nu-1}+1}\Delta_{k_\nu k_\nu}}, \end{aligned}\right\} \quad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

Что касается величин $\xi_{k_\nu}^{(i)}$ $(i < k_{\nu-1} - 1)$, то, как мы сейчас убедимся, все они равны нулю. Действительно, если разложить детерминант в формуле (13) по элементам последнего столбца, затем заменить индекс m на $k_{\nu-1} + 1$ и воспользоваться условиями (16), то получим

$$\xi_{k_\nu}^{(i)} = (-1)^i \frac{\Delta^{(1)}}{\Delta_{ii}\Delta_{i+1, i+1} \cdots \Delta_{k_{\nu-1}, k_{\nu-1}}\Delta_{k_\nu k_\nu}} +$$
$$+ (-1)^{i+1} \frac{\Delta_{k_\nu k_{\nu-1}+1}\Delta^{(2)}}{\Delta_{ii}\Delta_{i+1, i+1} \cdots \Delta_{k_{\nu-1}+1, k_{\nu-1}+1}\Delta_{k_\nu k_\nu}}$$
$$(i < k_{\nu-1} - 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots),$$

где

$$\Delta^{(1)} = \begin{vmatrix} \Delta_{i+1, i} & \Delta_{i+1, i+1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \Delta_{i+2, i} & \Delta_{i+2, i+1} & \Delta_{i+2, i+2} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \Delta_{k_{\nu-1}, i} & \Delta_{k_{\nu-1}, i+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \Delta_{k_{\nu-1}, k_{\nu-1}} \\ q_{\nu-1}\Delta_{k_{\nu-1}, i} & q_{\nu-1}\Delta_{k_{\nu-1}, i+1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q_{\nu-1}\Delta_{k_{\nu-1}, k_{\nu-1}} \end{vmatrix},$$

$$\Delta^{(2)} =$$
$$= \begin{vmatrix} \Delta_{i+1, i} & \Delta_{i+1, i+1} & 0 & 0 \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \Delta_{i+2, i} & \Delta_{i+2, i+1} & \Delta_{i+2, i+2} & 0 \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \Delta_{k_{\nu-1}-1, i} & \Delta_{k_{\nu-1}-1, i+1} & \cdot & \cdot & & \Delta_{k_{\nu-1}-1, k_{\nu-1}-1} & 0 \\ \Delta_{k_{\nu-1}, i} & \Delta_{k_{\nu-1}, i+1} & \cdot & \cdot & & \Delta_{k_{\nu-1}, k_{\nu-1}-1} & \Delta_{k_{\nu-1}, k_{\nu-1}} \\ p_{\nu-1}\Delta_{k_{\nu-1}-1, i} & p_{\nu-1}\Delta_{k_{\nu-1}-1, i+1} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{\nu-1}\Delta_{k_{\nu-1}-1, k_{\nu-1}-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Так как $\Delta^{(1)} = \Delta^{(2)} = 0$, то

$$\xi_{k_\nu}^{(1)} = 0 \quad (i < k_{\nu-1} - 1, \quad \nu = 1, 2, \ldots). \tag{18}$$

Из сказанного следует, что

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i\leqslant k_\nu}{}' \xi_{k_\nu}^{(i)} &= \frac{1}{\Delta_{k_\nu k_\nu}}(1-q_{\nu-1}),\\ \sum_{i\leqslant k_\nu}{}' |\xi_{k_\nu}^{(i)}| &= \frac{1}{|\Delta_{k_\nu k_\nu}|}(1+|q_{\nu-1}|),\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i\leqslant k_\nu}{}'' \xi_{k_\nu}^{(i)} &= \frac{\Delta_{k_\nu,\, k_{\nu-1}+1}}{\Delta_{k_{\nu-1}+1,\, k_{\nu-1}+1}\Delta_{k_\nu k_\nu}}(p_{\nu-1}-1),\\ \sum_{i\leqslant k_\nu}{}'' |\xi_{k_\nu}^{(i)}| &= \left|\frac{\Delta_{k_\nu,\, k_{\nu-1}+1}}{\Delta_{k_{\nu-1}+1,\, k_{\nu-1}+1}\Delta_{k_\nu k_\nu}}\right|(|p_{\nu-1}|+1),\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$\sum_{i\leqslant k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)} = \frac{1}{\Delta_{k_\nu k_\nu}}\left[\frac{\Delta_{k_\nu,\, k_{\nu-1}+1}}{\Delta_{k_{\nu-1}+1,\, k_{\nu-1}+1}}(p_{\nu-1}-1)-q_{\nu-1}+1\right] \tag{21}$$

$$(\nu=1,\ 2,\ \ldots).$$

Равенства (19), (20) показывают, что для рассматриваемых величин $\xi_k^{(i)}$ выполняются второе и третье условия (4) *. Так как, согласно равенству (11),

$$\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)} = \frac{1}{\Delta_{k_\nu k_\nu}} = \frac{\chi_{k_\nu}}{s_{k_{\nu-1}+1}}$$

и так как все величины $\chi_{k_\nu} > 0$, то

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{|\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}|}{\chi_{k_\nu}} = \infty,$$

а следовательно, первое условие (4) также выполняется.

До сих пор величины p_ν, q_ν были произвольными, а величины $\Delta_{k_{\nu-1}+1,\, k_{\nu-1}+1}$, $\Delta_{k_\nu,\, k_{\nu-1}+1}$, поскольку они не фигурировали в условиях (16), должны были лишь не равняться нулю. Теперь мы положим

$$p_{\nu-1} = q_{\nu-1}, \quad \lim_{\nu\to\infty} p_\nu = p \neq 1, \tag{22}$$

$$\Delta_{k_\nu,\, k_{\nu-1}+1} = \Delta_{k_{\nu-1}+1,\, k_{\nu-1}+1} \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots). \tag{23}$$

Из равенств (19), (20) и условий (22) вытекает, что для рассматриваемых величин $\xi_{k_\nu}^{(i)}$ удовлетворяются первые два условия (7). Далее, из равенства (21), первого условия (22) и условия (23) получаем

$$\sum_{i\leqslant k_\nu} \xi_{k_\nu}^{(i)} = 0 \quad (\nu=1,\ 2,\ \ldots)$$

и, следовательно, третье условие (7) также удовлетворяется.

---

* Следует иметь в виду, что $\Delta_{k_\nu,\, k_{\nu-1}+1} = a_{k_{\nu-1}+1,\, k_{\nu-1}+1} \neq 0$.

Наконец, последнее условие (7) удовлетворяется в силу равенства (18).

Итак, мы построили такие методы $A \in L^{\chi}$ и B, что при некотором выборе (k_ν) фундаментальные последовательности, соответствующие некоторой матрице $\Delta_{AB\chi}$, удовлетворяют всем условиям (4), (7). Легко добиться, чтобы построенные методы A, B были методами Toeplitz'a. Во-первых, не приходится доказывать, что элементы строк матрицы A с номерами, отличными от $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, и элементы строк матрицы B с номерами, отличными от $k_{\nu-1}+1$, $k_{\nu-1}+2$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, поскольку они не были подчинены каким-либо условиям *, могут быть выбраны в соответствии с условиями регулярности матриц A, B. Мы будем предполагать это выполненным.

Для того чтобы элементы, стоящие в строках матрицы A с номерами $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, соответствовали условиям ее регулярности, достаточно положить

$$|\lim_{\nu\to\infty} q_\nu| = |p| < 1, \tag{24}$$

$$a_{11}=1, \quad q_\nu\left(1+\frac{\varepsilon_{k_{\nu-1}+1}}{\chi_{k_\nu}}\right)+a_{k_\nu+1,\,k_\nu+1}=1 \ ^{**} \tag{25}$$

$$(\nu=0, 1, \ldots).$$

В самом деле, каково бы ни было фиксированное i, взяв $k_\nu \geqslant i$ и использовав второе условие (16), будем иметь

$$a_{k_{\nu+n-1}+1,\,i}=\Delta_{k_{\nu+n},\,i}=q_\nu q_{\nu+1}\cdots q_{\nu+n-1}\Delta_{k_\nu,\,i} \quad (n=1, 2, \ldots),$$

откуда, в силу условия (24),

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_{\nu+n-1}+1,\,i}=0 \quad (i=1, 2 \ldots)$$

и, следовательно, элементы, стоящие в строках матрицы A с номерами $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, соответствуют первому условию регулярности этой матрицы (т. е. условию: $\lim_{i\to\infty} a_{ik}=0$ при $k=1, 2, \ldots$).

Далее, из равенств (17) и условий (25) получаем

$$\sum_{i=1}^{k_\nu+1} a_{k_\nu+1,\,i}=q_\nu\left(\sum_{i=1}^{k_{\nu-1}+1} a_{k_{\nu-1}+1,\,i}+\frac{\varepsilon_{k_{\nu-1}+1}}{\chi_{k_\nu}}\right)+a_{k_\nu+1,\,k_\nu+1}=1 \quad (\nu=0, 1, \ldots).$$

---

* Не считая тех предположений, которые были сделаны относительно методов A, B на стр. 388.

** До сих пор относительно элементов $a_{k_{\nu-1}+1,\,k_{\nu-1}+1}$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ предполагалось только, что они не равны нулю. Разумеется, что это условие и условие (25) при соответствующем выборе последовательностей (q_ν), (ε_m) не противоречат друг другу.

Таким образом, элементы строк матрицы A с номерами $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ выбраны в соответствии со вторым условием регулярности A (т. е. с условием: $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{i} a_{ik}=1$). Наконец, можно написать

$$\sum_{i=1}^{k_\nu+1} |a_{k_\nu+1,\,i}| = |q_\nu| \left(\sum_{i=1}^{k_{\nu-1}+1} |a_{k_{\nu-1}+1,\,i}| + \frac{|\varepsilon_{k_{\nu-1}+1}|}{\chi_{k_\nu}} \right) + |a_{k_\nu+1,\,k_\nu+1}|$$

$$(\nu=0, 1, \ldots),$$

откуда

$$\sum_{i=k}^{k_\nu+1} |a_{k_\nu+1\,,i}| =$$

$$= |q_0 q_1 \cdots q_\nu| \left(|a_{11}| + \frac{|\varepsilon_1|}{\chi_{k_0}} \right) + |q_1 q_2 \cdots q_\nu| \left(|a_{k_0+1,\,k_0+1}| + \frac{|\varepsilon_{k_0+1}|}{\chi_{k_1}} \right) + \cdots$$

$$\cdots + |q_\nu| \left(|a_{k_{\nu-1}+1,\,k_{\nu-1}+1}| + \frac{|\varepsilon_{k_{\nu-1}+1}|}{\chi_{k_\nu}} \right) + |a_{k_\nu+1,\,k_\nu+1}|. \tag{26}$$

Так как мы считаем, что элементы строк матрицы A с номерами, не равными $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0,1, \ldots)$, выбраны в соответствии с условиями ее регулярности, то $\sup\limits_{\nu} |a_{k_\nu k_\nu}| < \infty$, и так как $\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}(A) = \frac{1}{a_{k_\nu k_\nu}}$, то $\inf\limits_{\nu} |\xi_{k_\nu}^{(k_\nu)}| > 0$, а потому, и подавно, $\inf\limits_{\nu} \chi_{k_\nu} > 0$.

Но тогда последовательность величин $\frac{\varepsilon_{k_{\nu-1}+1}}{\chi_{k_\nu}}$ стремится к нулю и, согласно условиям (24), (25),

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{k_\nu+1,\,k_\nu+1} = 1-p. \tag{27}$$

Таким образом, последовательности величин $\frac{\varepsilon_{k_{\nu-1}+1}}{\chi_{k_\nu}}$ и $a_{k_\nu+1,k_\nu+1}$ — ограниченные.

Принимая это во внимание, из равенства (26) и условия (24) получаем

$$\sup_{\nu} \sum_{i=1}^{k_\nu+1} |a_{k_\nu+1,\,i}| < \infty$$

и, следовательно, элементы строк матрицы A с номерами $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ соответствуют третьему условию ее регулярности (т. е. условию: $\sup\limits_{i}\sum\limits_{k=1}^{i} |a_{ik}| < \infty$).

Обратимся теперь к элементам строк матрицы B с номерами $k_{\nu-1}+1$, $k_{\nu-1}+2$ $(\nu=0, 1, \ldots)$. Относительно элементов, стоящих

в строках матрицы B с номерами $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, предполагалось только, что они связаны первым условием (17) с элементами матрицы B, стоящими в ее строках с номерами $k_{\nu-1}+2$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, и что $b_{k_{\nu-1}+1, k_{\nu-1}} \neq 0$. Эти предположения не мешают, разумеется, выбрать элементы строк матрицы B с номерами $k_{\nu-1}+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ в соответствии с условиями ее регулярности, т. е. так, чтобы были удовлетворены условия

$$\lim_{\nu\to\infty} b_{k_{\nu-1}+1, i}=0 \quad (i=1, 2, \ldots), \tag{b}$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{k_\nu-1} b_{k_{\nu-1}+1, i}=1, \tag{c}$$

$$\sup_\nu \sum_{i=1}^{k_\nu-1} |b_{k_{\nu-1}+1, i}| < \infty. \tag{d}$$

Но если это сделано, то элементы строк матрицы B с номерами $k_{\nu-1}+2$ $(\nu=0, 1, \ldots)$ будут также соответствовать условиям ее регулярности. Действительно, согласно первому условию (17) и условиям (22), (24), (b),

$$\lim_{\nu\to\infty} b_{k_{\nu-1}+2, i}=\lim_{\nu\to\infty} p_\nu b_{k_{\nu-1}+1, i}=0 \quad (i=1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, указанные элементы соответствуют первому условию регулярности B.

Далее, условие (23) может быть переписано в виде:

$$a_{k_\nu+1, k_\nu+1}=b_{k_{\nu-1}+2, k_\nu+1} \quad (\nu=0, 1, \ldots).$$

Принимая это во внимание и учитывая условия (17), (22), (24), (c), (d) и равенство (27), получаем

$$\lim_{\nu\to\infty} \sum_{i=1}^{k_\nu+1} b_{k_{\nu-1}+2, i}=\lim_{\nu\to\infty}\Big(p_\nu \sum_{i=1}^{k_\nu-1} b_{k_{\nu-1}+1, i}+a_{k_\nu+1, k_\nu+1}\Big)=1,$$

$$\sup_\nu \sum_{i=1}^{k_\nu+1} |b_{k_{\nu-1}+2, i}|=\sup_\nu\Big(|p_\nu| \sum_{i=1}^{k_\nu-1} |b_{k_{\nu-1}+1, i}|+|a_{k_\nu+1, k_\nu+1}|\Big)<\infty,$$

что означает соответствие рассматриваемых элементов матрицы B со вторым и третьим условиями ее регулярности.

Таким образом, построены методы Toeplitz'а $A \in L^\lambda$ и B, для которых реализуются условия (4) и (7). Остается только, воспользовавшись известной свободой выбора некоторых элементов построенных матриц A, B, удовлетворить условиям: $A'B' \neq A'$, $A'B' \neq B'$, $A'B'$ содержит расходящиеся последовательности.

Для этого проще всего, как нам кажется, поступить следующим образом:

Рассмотрим столбцы матрицы Δ с номерами $k_\nu+2$ $(\nu=0, 1, \ldots)$. Последовательность всех этих столбцов разобьем на тройки столбцов с номерами $k_{3m}+2$, $k_{3m+1}+2$, $k_{3m+2}+2$ $(m=0, 1, \ldots)$. Не нарушая условий (10), (16), (23), (25) * и не создавая препятствий для удовлетворения условий регулярности матриц A, B, можно определить элементы первого, второго и третьего столбца в каждой из указанных троек столбцов так, как это будет указано ниже.

Можно положить

$$\Delta_{i, k_{3m}+2}=0 \quad (i \neq k_{3m}+2,\ k_{3m+1}+2;\ m=0, 1, \ldots), \tag{28}$$

Элементы

$$\Delta_{k_{3m+1}+2,\, k_{3m}+2}=a_{k_{3m}+2,\, k_{3m}+2} \quad (m=0, 1, \ldots),$$

стоящие на главной диагонали матрицы A, нельзя положить равными нулю, но мы можем ** выбрать их так, чтобы

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_{k_{3m+1}+2,\, k_{3m}+2}=0. \tag{29}$$

Что же касается элементов

$$\Delta_{k_{3m}+2,\, k_{3m}+2} \quad (m=0, 1, \ldots),$$

то они определены, коль скоро задана матрица A. Именно, согласно равенству (11),

$$\Delta_{k_{3m}+2,\, k_{3m}+2}=\frac{\varepsilon_{k_{3m-1}+2}}{\chi_{k_{3m}+2}} \quad (m=0, 1, \ldots).$$

Эти элементы, принадлежащие матрице $\mathfrak{A}$, но не матрице A, и образующие сходящуюся к нулю последовательность, нас сейчас не интересуют.

Далее, можно положить

$$\Delta_{i, k_{3m+1}+2}=0 \quad (i \neq k_{3m+1}+2,\ k_{3m+2}+2;\ m=0, 1, \ldots) \tag{30}$$

и выбрать элементы

$$\Delta_{k_{2m+2}+2,\, k_{3m+1}+2}=a_{k_{3m+1}+2,\, k_{m+1}+2} \quad (m=0, 1, \ldots)$$

так, чтобы

$$\lim_{m\to\infty} \Delta_{k_{3m+2}+2,\, k_{3m+1}+2}=\delta \neq 0. \tag{31}$$

---

* Условия (23), (25) касаются элементов, не принадлежащих к рассматриваемым сейчас столбцам матрицы Δ.

** Поскольку элементы $\Delta_{k_{3m+1}+2,\, k_{3m}+2}$ не стоят в строчках матрицы Δ с номерами $k_\nu-1$, k_ν, $k_\nu+1$ $(\nu=0, 1, \ldots)$, и, следовательно, должны только соответствовать условиям регулярности Δ.

Наконец, можно положить

$$\Delta_{i,\, k_{3m+2}+2}=0 \quad (i \neq k_{3m+2}+2,\ k_{3m+3}+2,\ k_{3m+3}+3;\ m=0, 1, \ldots) \tag{32}$$

и выбрать элементы

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_{k_{3m+3}+2,\, k_{3m+2}+2}=a_{k_{3m+2}+2,\, k_{3m+2}+2},\\ \Delta_{k_{3m+3}+3,\, k_{3m+2}+2}=b_{k_{3m+2}+3,\, k_{3m+2}+2}\end{array}\right. \quad (m=0, 1, \ldots)$$

так, чтобы

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{m\to\infty}\Delta_{k_{3m+3}+2,\, k_{3m+2}+2}=0,\\ \lim\limits_{m\to\infty}\Delta_{k_{3m+3}+3,\, k_{3m+2}+2}=\delta' \neq 0.\end{array}\right\} \tag{33}$$

Возьмем, теперь, три расходящиеся последовательности $\sigma=(\sigma_k)$, $\sigma'=(\sigma'_k)$, $\sigma''=(\sigma''_k)$, элементы которых определены так:

$$\sigma_k=1,\ \text{если}\ k=k_{3m}+2, \qquad \sigma_k=0,\ \text{если}\ k\neq k_{3m}+2,$$
$$\sigma'_k=1,\ \text{если}\ k=k_{3m+1}+2, \qquad \sigma'_k=0,\ \text{если}\ k\neq k_{3m+1}+2,$$
$$\sigma''_k=1,\ \text{если}\ k=k_{3m+2}+2, \qquad \sigma''_k=0,\ \text{если}\ k\neq k_{3m+2}+2$$
$$(m=0, 1, \ldots).$$

Согласно равенствам (28), (30), (32),

$$A_i(\sigma)=0,\ \text{если}\ i\neq k_{3m}+2 \quad (m=0, 1, \ldots),$$
$$A_{k_{3m}+2}(\sigma)=\Delta_{k_{3m+1}+2,\, k_{3m}+2} \quad (m=0, 1, \ldots), \quad B_i(\sigma)=0 \quad (i=1, 2, \ldots);$$
$$A_i(\sigma')=0,\ \text{если}\ i\neq k_{3m+1}+2 \quad (m=0, 1, \ldots),$$
$$A_{k_{3m+1}+2}(\sigma')=\Delta_{k_{3m+2}+2,\, k_{3m+1}+2} \quad (m=0, 1, \ldots), \quad B_i(\sigma')=0 \quad (i=1, 2, \ldots);$$
$$A_i(\sigma'')=0,\ \text{если}\ i\neq k_{3m+2}+2, \quad A_{k_{3m+2}+2}(\sigma'')=\Delta_{k_{3m+3}+2 k_{3m+2}+2},$$
$$B_i(\sigma')=0,\ \text{если}\ i\neq k_{3m+2}+3,$$
$$B_{k_{3m+2}+3}(\sigma'')=\Delta_{k_{3m+3}+3,\, k_{3m+2}+2} \quad (m=0, 1, \ldots),$$

откуда, принимая во внимание равенства (29), (31), (33), приходим к следующему выводу: последовательность σ суммируется к нулю и методом A и методом B; последовательность σ' суммируется к нулю методом B и не суммируется методом A; последовательность σ'' суммируется к нулю методом A и не суммируется методом B.

Итак, построенные методы A и B удовлетворяют всем вышепоставленным требованиям.

Поступило
20.III 1947

ЛИТЕРАТУРА

1 Даревский В. М., О методах Toeplitz'a, Изв. Ак. Наук СССР, сер. матем., 11 (1947), 3—32.

2 Banach S., Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932.

3 Hill J. D., Some properties of summability, Duke Math. Journal, v. 9, N 2 (1942), 373—381.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 397—410

В. М. ДУБРОВСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ КОМПАКТНОСТИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Работа содержит ряд новых условий компактности для семейств функций точки, выводимых из условий компактности для вполне аддитивных функций множества, найденных ранее автором.

Содержание этой работы состоит в выводе различных следствий из доказанной мною теоремы об условиях компактности семейства функций множества (1).

Условимся обозначать через D область n-мерного эвклидова пространства, определяемую условиями $a_k \leqslant \xi_k \leqslant b_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты переменной точки x, а a_k и b_k $(a_k < b_k)$ — некоторые постоянные.

Существенную роль в дальнейшем будет играть рассмотрение вполне (абсолютно) аддитивных функций множества, определенных для измеримых в смысле Лебега или в смысле Бореля множеств области D. Эти функции предполагаются конечными и, следовательно, имеющими ограниченную полную вариацию (2).

Интегралы в смысле Лебега от функции $f(x)$, распространенные на множество $\mathscr{E}$ области D, мы будем обозначать символом $\int\limits_{\mathscr{E}} f(x)\, dx$.

Определение I. Пусть дана вполне аддитивная функция множества $\Phi_\alpha(\mathscr{E})$, определенная для измеримых множеств $\mathscr{E}$ области D и зависящая от параметра α.

Будем говорить, что функция $\Phi_\alpha(\mathscr{E})$ вполне аддитивна равномерно относительно параметра α, если для любой суммы непересекающихся измеримых множеств $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \ldots$ области D величина $\Phi_\alpha(\mathscr{E}_{n+1} + \mathscr{E}_{n+2} + \ldots)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании n равномерно относительно параметра α (при изменении последнего в некоторой области). Ради краткости будем говорить в этом случае, что функции множества $\Phi_\alpha(\mathscr{E})$ (соответствующие всевозможным α) *равномерно аддитивны*.

Параметр α в дальнейшем часто не будет выписываться, а только подразумеваться.

Определение II. Пусть даны вполне аддитивная функция множества $\Phi_\alpha(\mathscr{E})$, зависящая от параметра α, и неотрицательная вполне

аддитивная функция множества $M(\mathcal{E})$, определенные для измеримых множеств области D.

Будем говорить, что функции $\Phi_\alpha(\mathcal{E})$ равностепенно непрерывны относительно функции $M(\mathcal{E})$, если любому положительному числу ε соответствует такое положительное δ, что неравенство $M(\mathcal{E}) < \delta$ влечет за собой неравенство $|\Phi_\alpha(\mathcal{E})| < \varepsilon$ при всех значениях параметра α.

Равностепенная непрерывность, очевидно, влечет за собой равномерную аддитивность, и наоборот, если функции множества равномерно аддитивны, то они будут равностепенно непрерывны относительно любой неотрицательной функции множества $M(\mathcal{E})$, обладающей тем свойством, что из равенства $M(\mathcal{E}) = 0$ следует равенство $\Phi_\alpha(\mathcal{E}) = 0$ при любом α [1].

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть дано множество $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций $\Phi(\mathcal{E})$, определенных для измеримых B (в смысле Бореля) множеств области D. Для того чтобы любая бесконечная часть множества $\mathfrak{N}$ содержала последовательность, сходящуюся для любого измеримого B множества области D, необходимо и достаточно, чтобы:*

1°. *Функции $\Phi(\mathcal{E})$ были равномерно аддитивны;*

2°. *Их полные вариации в области D были равномерно ограничены* [1].

ТЕОРЕМА I. *Если вполне аддитивные функции множества $\Phi(\mathcal{E})$, определенные на измеримых множествах области D, равномерно аддитивны и непрерывны, т. е. обращаются в нуль для отдельных точек области D, то полные вариации функций $\Phi(\mathcal{E})$ равномерно ограничены.*

Доказательство. Предполагая противное, рассуждением, аналогичным рассуждению в классической теореме Больцано-Вейерштрасса, мы придем к выводу, что существует последовательность измеримых множеств $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots$ области D, каждое из которых содержится в предыдущем, имеющих единственную общую точку x_0, и таких, что полные вариации функций $\Phi(\mathcal{E})$ не будут ограничены в их совокупности ни на одном из них.

Так как $\Phi(x_0) = 0$, то полные вариации функций $\Phi(\mathcal{E})$ на каждом определенном множестве $\mathcal{E}_n - x_0$ образуют неограниченное множество конечных чисел. С другой стороны, все эти конечные числа должны быть сколь угодно малы, если n достаточно велико, так как равномерная аддитивность функций влечет за собой равномерную аддитивность их полных вариаций и так как имеет место равенство [см. [1]]

$$\mathcal{E}_n - x_0 = (\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n+1}) + (\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_{n+2}) + \ldots$$

Полученное противоречие означает, что рассматриваемая теорема действительно верна.

Замечание. Теорема I остается, очевидно, в силе, если предположение о непрерывности функций $\Phi(\mathcal{E})$ заменить предположением о том, что они равномерно ограничены для каждой отдельной точки области D.

ТЕОРЕМА II. *Пусть дана совокупность $\mathfrak{N}$ вполне аддитивных функций $\Phi(\mathcal{E})$, определенных на измеримых B множествах области D и непрерывных. Для того чтобы любая бесконечная часть $\mathfrak{N}$ содержала последовательность, сходящуюся для любого измеримого B множества области D, необходимо и достаточно, чтобы функции, содержащиеся в совокупности $\mathfrak{N}$, были равномерно аддитивны.*

ТЕОРЕМА III. *Пусть дана совокупность функций $f(x)$ точки x, определенных и суммируемых в области D, и пусть $\mathfrak{N}$ есть совокупность соответствующих функций множества*

$$\Phi(\mathcal{E})=\int_{\mathcal{E}} f(x)\,dx.$$

Для того чтобы любая бесконечная часть множества $\mathfrak{N}$ содержала последовательность, сходящуюся для любого измеримого множества $\mathcal{E}\subset D$, необходимо и достаточно, чтобы эти функции были равномерно аддитивны, или, что то же самое, чтобы они были равностепенно непрерывны (относительно меры в смысле Лебега).

Последние две теоремы являются очевидными следствиями предыдущих.

В дальнейшем, основываясь на теореме III, мы установим ряд условий компактности для функций точки области D. Некоторые из этих условий имеют аналогию с классической теоремой Арцеля ([3]); условие равномерной ограниченности данного множества функций $f(x)$ заменяется более общим предположением о равномерной аддитивности соответствующих неопределенных интегралов

$$\Phi(\mathcal{E})=\int_{\mathcal{E}} f(x)\,dx.$$

Равномерная аддитивность функций $\Phi(\mathcal{E})$ имеет место, если соответствующие функции точки $f(x)$ равномерно ограничены, но может, очевидно, иметь место также в случае, когда функции $f(x)$ не будут ограничены в их совокупности. Более того, функции $\Phi(\mathcal{E})$ могут быть равномерно аддитивны и в случае, когда соответствующие функции $f(x)$ не будут равномерно ограничены ни в одной точке области D. Последнее обстоятельство нетрудно усмотреть из простых примеров.

Пусть, например, в случае одного измерения D есть интервал $0\leqslant x\leqslant 1$; $f_{k,n}(x)=\sqrt{n}$ в интервале $\frac{k-1}{n}\leqslant x\leqslant \frac{k}{n}$ и $f_{k,n}(x)=0$ в остальных точках D $(k=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$.

Легко видеть, что функции $f_{k,n}(x)$ не ограничены в их совокупности ни в одной точке D, в то время как функции множества

$$\Phi_{k,n}(\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} f_{k,n}(x)\,dx$$

равномерно аддитивны*.

Заметим, что последующее основано на рассмотрении обобщенных интегральных средних Стеклова. С их помощью вводятся условия, являющиеся, по существу, очень ослабленными условиями равностепенной непрерывности.

ЛЕММА I. *Пусть функция $f(x)$ определена и суммируема в области D. Пусть, далее, эта функция обладает следующим свойством: для любой точки $x \subset D$ и любого положительного числа ε можно указать такое положительное $\delta = \delta(x, \varepsilon)$, что будет выполняться условие*

$$\left| f(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} \int_{\mathscr{E}} f(t)\,dt \right| < \varepsilon,$$

каково бы ни было измеримое множество $\mathscr{E}$ положительной меры, лежащее в сфере радиуса δ с центром в точке x и содержащееся в D. Тогда функция $f(x)$ непрерывна в области D.

Доказательство. Допустим противное, т. е. что функция $f(x)$ разрывна в некоторой точке x_0 области D. Тогда будут существовать положительное число α и последовательность $x_1, x_2, \ldots$ точек D, стремящаяся к x_0 и обладающая тем свойством, что $|f(x_k) - f(x_0)| > \alpha$ для любого k.

Возьмем положительное число ε, меньшее $\frac{1}{2}\alpha$, и рассмотрим сферу S_0 радиуса $\delta(x_0, \varepsilon)$ с центром в точке x_0. Выбрав затем точку x_k, лежащую внутри этой сферы, введем в рассмотрение сферу S_k с центром в точке x_k и с радиусом, меньшим $\delta(x_k, \varepsilon)$, лежащую внутри сферы S_0. Пусть, теперь, $\mathscr{E}$ будет измеримое множество положительной меры, лежащее в сфере S_k. Для него

$$\left| f(x_k) - \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} \int_{\mathscr{E}} f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Из двух последних неравенств следует

$$\left| f(x_0) - \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} \int_{\mathscr{E}} f(t)\,dt \right| > \alpha - \varepsilon > \varepsilon,$$

---

* Без большого труда можно показать, что условие равномерной аддитивности неопределенных интегралов

$$\Phi_{\alpha}(e) = \int_{e} f_{\alpha}(t)\,dt$$

эквивалентно условию равностепенной суммируемости соответствующих функций $f_{\alpha}(t)$, состоящему в следующем:

$$\int_{e(N,\alpha)} [|f_{\alpha}(t)| - N]\,dt \to 0$$

при $N \to \infty$, равномерно относительно α, где $e(N, \alpha)$ означает совокупность точек области D, для которых выполняется условие $|f_{\alpha}(t)| > N$.

что невозможно, так как $\mathscr{E}$ находится внутри сферы S_0. Таким образом, лемма доказана.

ЛЕММА II. *Пусть дана неотрицательная, вполне аддитивная, непрерывная функция множества* $\Psi(\mathscr{E})$, *определенная для измеримых множеств области* D. *Пусть* $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *есть последовательность функций точки* x, *определенных и суммируемых относительно* $\Psi(\mathscr{E})$ *в области* D, *стремящаяся к пределу* $f_0(x)$ *в любой точке* $x \subset D$. *Для того чтобы для каждого измеримого множества* $\mathscr{E}$ *области* D *выполнялось равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{E}} f_n(t)\, d\Psi = \int_{\mathscr{E}} f_0(t)\, d\Psi$$

с конечной правой частью, необходимо и достаточно, чтобы функции множества

$$\Phi_n(\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} f_n(t)\, d\Psi$$

(а следовательно, и их полные вариации $\int_{\mathscr{E}} |f_n(t)|\, d\Psi$*) были равномерно аддитивны. При этом интегралы понимаются в смысле Лебега-Стильтьеса.*

Доказательство. Необходимость условий является частным случаем доказанного мною ([1]) общего свойства вполне аддитивных функций множества, которое состоит в том, что вполне аддитивные функции, определенные на абстрактном семействе $\mathfrak{M}$, удовлетворяющем весьма общим условиям, являются равномерно аддитивными, если они образуют последовательность, стремящуюся к определенному конечному пределу для каждого определенного множества, содержащегося в $\mathfrak{M}$.

Предположим теперь, что условия рассматриваемой леммы выполнены. Тогда, прежде всего, нетрудно убедиться в том, что предельная функция $f_0(x)$ суммируема в области D относительно $\Psi(\mathscr{E})$. Действительно, в противном случае, как легко видеть, последовательность

$$\int_D |f_n(t)|\, d\Psi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

было бы неограничена, что противоречило бы теореме I.

Возьмем положительное число ε и рассмотрим множество $e(n, \varepsilon)$ точек D, для которых $|f_m(x) - f_0(x)|$ будет меньше ε при $m = n, n+1, n+2, \ldots$ Очевидно, каждое из множеств $e(1, \varepsilon)$, $e(2, \varepsilon)$, $e(3, \varepsilon), \ldots$ содержится в последующем, причем сумма

$$D^* = e(1, \varepsilon) + [e(2, \varepsilon) - e(1, \varepsilon)] + [e(3, \varepsilon) - e(2, \varepsilon)] + \cdots$$

представляет собой множество, на котором функция $f_0(x)$ конечна. Так как эта функция суммируема в области D относительно $\Psi(\mathscr{E})$,

то $\Psi(D-D^*)=0$. Взяв теперь произвольное измеримое множество $\mathcal{E}$ области D, будем иметь

$$\left|\int_{\mathcal{E}}(f_m-f_0)\,d\Psi\right|\leqslant\int_{\mathcal{E}e(n,\varepsilon)}|f_m-f_0|\,d\Psi+\int_{\mathcal{E}[D^*-e(n,\varepsilon)]}|f_m-f_0|\,d\Psi,$$

где второе слагаемое правой части сколь угодно мало независимо от m, если n достаточно велико, а первое слагаемое не превосходит $\varepsilon\Psi(\mathcal{E})$ при $m\geqslant n$.

Так как положительное число ε произвольно, то рассматриваемую лемму можно считать доказанной.

Заметим, что лемма перестает быть верной, если отбросить предположение о непрерывности функции множества $\Psi(\mathcal{E})$.

ТЕОРЕМА IV. *Пусть дано множество $\mathfrak{N}$ функций $f(x)$, определенных и суммируемых в области D и обладающих тем свойством, что соответствующие функции множества*

$$\Phi(\mathcal{E})=\int_{\mathcal{E}}f(t)\,dt$$

равномерно аддитивны. Для того чтобы любая бесконечная часть множества $\mathfrak{N}$ содержала последовательность, сходящуюся для любого $x\subset D$ к непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: каждой бесконечной части $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$, любому положительному числу ε и каждой точке x области D можно поставить в соответствие положительное число $\delta=\delta(\mathfrak{N}_1, \varepsilon, x)$, обладающее тем свойством, что, каково бы ни было множество $\mathcal{E}$ положительной меры, содержащееся в области D и лежащее внутри сферы с центром в точке x радиуса δ, найдется бесконечное множество функций $f(x)$ из $\mathfrak{N}_1$, для которых будет выполняться неравенство

$$\left|f(x)-\frac{1}{\operatorname{mes}\mathcal{E}}\int_{\mathcal{E}}f(t)\,dt\right|<\varepsilon. \tag{1}$$

Доказательство необходимости. Возьмем произвольную бесконечную часть $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$ и допустим, что она содержит последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., сходящуюся для любого $x\subset D$ к непрерывной функции $f_0(x)$. Взяв любое положительное ε, определим такое положительное число $\delta=\delta(\mathfrak{N}_1, \varepsilon)$, что неравенство (1) будет выполняться для предельной функции $f_0(x)$ и для каждого множества $\mathcal{E}$ положительной меры, находящегося в области D и лежащего внутри сферы с центром в любой точке x этой области радиуса $\delta=\delta(\mathfrak{N}_1, \varepsilon)$. Это возможно в силу непрерывности функции $f_0(x)$.

Основываясь на лемме II, легко видеть, что будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{\operatorname{mes}\mathcal{E}}\left|\int_{\mathcal{E}}f_n(t)\,dt-\int_{\mathcal{E}}f_0(t)\,dt\right|<\varepsilon$$

при условии $n > N = N(\mathfrak{N}_1, \varepsilon, \mathscr{E})$. Заметив, наконец, что

$$|f_n(x) - f_0(x)| < \varepsilon,$$

если n достаточно велико, будем иметь

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} \int\limits_{\mathscr{E}} f_n(t)\, dt \right| < 3\varepsilon$$

при условии $n > N$, где N зависит от $\mathfrak{N}_1$, ε, $\mathscr{E}$ и x. Этим и завершается доказательство необходимости.

Положительное число $\delta = \delta(\mathfrak{N}_1, \varepsilon, x)$ можно, следовательно, выбрать не зависящим от x. Однако при доказательстве достаточности нет необходимости предполагать, что это обстоятельство имеет место, и оно, таким образом, будет вытекать как следствие.

Доказательство достаточности. Предполагая, что условия доказываемой теоремы выполнены, рассмотрим любую бесконечную часть $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$. Выберем из множества $\mathfrak{N}_1$ последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... так, чтобы соответствующая последовательность функций множества

$$\Phi_n(\mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}} f_n(t)\, dt$$

стремилась к определенному конечному пределу при неограниченном возрастании n для любого измеримого множества $\mathscr{E}$, содержащегося в области D. В силу теоремы III, это возможно.

Отметим, прежде всего, что последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, .. ограничена в каждой определенной точке области D. В самом деле, в противном случае она содержала бы подпоследовательность S, стремящуюся к бесконечности в некоторой определенной точке $x_0 \subset D$, и для бесконечного множества функций, входящих в S, выполнялось бы неравенство

$$\left| f_n(x_0) - \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} \int\limits_{\mathscr{E}} f_n(t)\, dt \right| < \varepsilon,$$

где $\mathscr{E}$ — определенное множество области D, содержащееся в сфере с центром в точке x_0 радиуса $\delta = \delta(S, \varepsilon, x_0)$. Но последнее обстоятельство, очевидно, находится в противоречии с теоремой I.

Докажем теперь, что последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... будет иметь определенный конечный предел $f_0(x)$ для любого $x \subset D$, причем предельная функция $f_0(x)$ будет непрерывна в области D.

Предположим противное, а именно, что для некоторого $x_0 \subset D$ наибольший и наименьший пределы последовательности $f_1(x)$, $f_2(x_0)$, ..., которые мы обозначим, соответственно, через L и l, оказываются различными. Выберем из этой последовательности подпоследовательность S_1, стремящуюся к L, и подпоследовательность S_2, стремящуюся к l.

Взяв положительное число ε, меньшее $\frac{1}{2}(L-l)$, рассмотрим положительные числа $\delta(S_1, \varepsilon, x_0)$ и $\delta(S_2, \varepsilon, x_0)$.

Возьмем теперь измеримое множество e_0 положительной меры, находящееся в области D и принадлежащее сфере с центром в точке x_0 и с радиусом, не превосходящим ни одного из чисел $\delta(S_1, \varepsilon, x_0)$ и $\delta(S_2, \varepsilon, x_0)$. Тогда для бесконечного множества функций из последовательности S_1 и для бесконечного множества функций из последовательности S_2 будет выполняться неравенство

$$\left| f_n(x_0) - \frac{1}{\operatorname{mes} e_0} \int\limits_{e_0} f_n(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ последовательность индексов, соответствующих всем этим функциям, расположенную в порядке их возрастания. Тогда

$$\left| f_{\alpha_\nu}(x_0) - \frac{1}{\operatorname{mes} e_0} \int\limits_{e_0} f_{\alpha_\nu}(t)\, dt \right| < \varepsilon,$$

где $\nu = 1, 2, \ldots$ Так как интеграл, входящий в последнее неравенство, стремится к определенному конечному пределу при неограниченном возрастании ν, то колебание (т. е. разность между наибольшим и наименьшим пределами) $f_{\alpha_\nu}(x_0)$ должно при этом не превосходить $2\varepsilon < L - l$. Между тем, это колебание должно равняться $L-l$. Полученное противоречие показывает, что предел последовательности $f_1(x), f_2(x), \ldots$ существует (и конечен), каково бы ни было $x \subset D$. Обозначив эту последовательность через S, покажем, что предельная функция $f_0(x)$ непрерывна в области D. Взяв определенную точку $x \subset D$ и положительное число ε, рассмотрим соответствующее положительное число $\delta(S, \varepsilon, x)$. Тогда для любого измеримого множества $e \subset D$ положительной меры, лежащего в сфере с центром в точке x радиуса $\delta(S, \varepsilon, x)$, будет существовать бесконечная последовательность значений индекса n, для которых будет выполняться неравенство

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int\limits_{e} f_n(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Предполагая, что n пробегает эту последовательность значений и переходя в последнем неравенстве к пределу, мы получим, приняв во внимание лемму II:

$$\left| f_0(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int\limits_{e} f_0(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon.$$

Так как точка x и положительное число ε произвольны, то, в силу леммы I, последнее неравенство и доказывает непрерывность предельной функции $f_0(x)$ в области D.

ТЕОРЕМА V. *Пусть дано множество* $\mathfrak{N}$ *функций* $f(x)$, *определенных и суммируемых в области* D. *Для того чтобы любая бесконеч-*

ная часть $\mathfrak{R}_1$ множества $\mathfrak{R}$ содержала последовательность, равномерно сходящуюся в области D к непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1°. *Все соответствующие функции множества*

$$\Phi(\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} f(t)\,dt,$$

где $\mathscr{E}$ есть измеримое множество области D, равномерно аддитивны.

2°. *Каждой бесконечной части $\mathfrak{R}_1$ множества $\mathfrak{R}$, любому положительному числу ε и каждой точке x области D можно поставить в соответствие положительное число $\delta = \delta(\mathfrak{R}_1, \varepsilon, x)$ и бесконечную часть $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_2(\mathfrak{R}_1, \varepsilon)$ множества $\mathfrak{R}_1$, обладающие тем свойством, что, каково бы ни было множество $\mathscr{E}$ положительной меры области D, лежащее в сфере с центром в точке x радиуса δ, для любой функции $f(x)$, входящей в $\mathfrak{R}_2$, будет выполняться условие:*

$$\left| f(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} \mathscr{E}} \int_{\mathscr{E}} f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Доказательство необходимости. Пусть первое условие не выполняется. Тогда будут существовать сумма $\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots$ не пересекающихся измеримых множеств области D и положительное число ε такие, что условию

$$|\Phi(\mathscr{E}_{n+1} + \mathscr{E}_{n+2} + \ldots)| < \varepsilon$$

нельзя будет удовлетворить одновременно для всех функций $\Phi(\mathscr{E})$, взяв n достаточно большим; но тогда, очевидно, будет существовать счетная последовательность функций $\Phi(\mathscr{E})$ такая, что ни для нее, ни для любой ее бесконечной подпоследовательности последнему условию нельзя будет удовлетворить одновременно для всех соответствующих функций путем увеличения n.

Если, с другой стороны, мы допустим, что каждая бесконечная часть множества $\mathfrak{R}$ содержит равномерно сходящуюся последовательность, то соответствующая последней последовательность функций $\Phi(\mathscr{E})$, будучи сходящейся для любого измеримого множества области D, должна обладать свойством равномерной аддитивности, что уже было отмечено при доказательстве леммы II. В таком случае, следовательно, не может существовать последовательность функций $\Phi(\mathscr{E})$, ни одна бесконечная часть которой не обладает этим свойством. Мы приходим, таким образом, к противоречию, откуда следует, что первое условие рассматриваемой теоремы, действительно, необходимо.

Перейдем, теперь, к доказательству необходимости второго условия. Возьмем произвольную бесконечную часть $\mathfrak{R}_1$ множества $\mathfrak{R}$ и допустим, что она содержит последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots$, равномерно сходящуюся в области D к непрерывной функции $f_0(x)$. Из непрерывности последней следует, что для любого положительного числа ε можно

найти такое положительное $\delta = \delta(\mathfrak{N}_1, \varepsilon)$, что, какова бы ни была точка x области D, будет иметь место неравенство

$$\left| f_0(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} \mathcal{E}} \int_{\mathcal{E}} f_0(t)\, dt \right| < \varepsilon,$$

где $\mathcal{E}$ — произвольное измеримое множество области D положительной меры, лежащее в сфере с центром в точке x радиуса δ. Но так как $f_n(x)$ стремится равномерно к $f_0(x)$ при неограниченном возрастании n, то, как легко видеть, будет выполняться также неравенство

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} \mathcal{E}} \int_{\mathcal{E}} f_n(t)\, dt \right| < 3\varepsilon,$$

где x — любая точка области D, а n удовлетворяет условию $n > N$, причем N зависит лишь от $\mathfrak{N}_1$ и ε.

Как и в случае теоремы IV, положительное число $\delta = \delta(\mathfrak{N}_1, \varepsilon, x)$ можно, следовательно, выбрать не зависящим от x. Но достаточность условий рассматриваемой теоремы можно доказать, и не предполагая этого заранее.

Доказательство достаточности. Пусть условия рассматриваемой теоремы выполнены. Взяв любую бесконечную часть $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$, выберем из нее последовательность $f_1(x), f_2(x), \ldots$, сходящуюся в области D к непрерывной функции $f_0(x)$. В силу предыдущей теоремы, это возможно. Докажем, что эта последовательность сходится равномерно в области D. Допустим противное. Тогда, как легко видеть, будут существовать положительное число a, подпоследовательность $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots$ последовательности $f_1, f_2, \ldots$ и последовательность $x_1, x_2, \ldots$ отличных друг от друга точек D, сходящаяся к точке x_0, для которых при любом натуральном k будет выполняться условие:

$$| f_{\alpha_k}(x_k) - f_0(x_k) | > a.$$

Обозначим последовательность функций $f_{\alpha_1}, f_{\alpha_2}, \ldots$ через S, выберем положительное число ε, меньшее $\frac{a}{4}$, и определим соответствующие положительное число $\delta(S, \varepsilon, x_0)$ и множество $\mathfrak{N}_2(S, \varepsilon)$.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots$ будет возрастающая последовательность тех значений индекса α_k, для которых соответствующие функции f_{α_k} входят в $\mathfrak{N}_2(S, \varepsilon)$, и пусть $y_1, y_2, \ldots$ будет соответствующая последовательность точек, взятая из последовательности $x_1, x_2, \ldots$, т. е. последовательность, для которой выполняется условие

$$| f_{\beta_k}(y_k) - f_0(y_k) | > a \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Возьмем теперь натуральное число p столь большим, чтобы выполнялись неравенства

$$| f_{\beta_p}(x_0) - f_0(x_0) | < \varepsilon, \quad | f_0(y_p) - f_0(x_0) | < \varepsilon$$

и чтобы точка y_p оказалась внутри сферы радиуса $\delta(S, \varepsilon, x_0)$ с центром в точке x_0.

Заметим, кроме того, что для любого измеримого множества e области D положительной меры, лежащего внутри этой сферы, выполняется условие

$$\left| f_{\beta_k}(x_0) - \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int_e f_{\beta_k}(t)\,dt \right| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Из последних четырех неравенств вытекает

$$| f_{\beta_p}(y_p) - f_{\beta_p}(x_0) | > a - 2\varepsilon,$$

$$\left| f_{\beta_p}(y_p) - \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int_e f_{\beta_p}(t)\,dt \right| > a - 3\varepsilon > \varepsilon.$$

Но мы можем предположить, что множество e лежит также внутри сферы радиуса $\delta(S, \varepsilon, y_p)$ с центром в точке y_p и тогда должно выполняться условие

$$\left| f_{\beta_k}(y_p) - \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int_e f_{\beta_k}(t)\,dt \right| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Мы пришли, таким образом, к противоречию, откуда следует, что последовательность $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ действительно сходится равномерно в области D.

ТЕОРЕМА VI. *Пусть $\mathfrak{N}$ есть множество функций $f(x)$, определенных и суммируемых в области D и обладающих тем свойством, что соответствующие функции множества*

$$\Phi(\mathscr{E}) = \int_{\mathscr{E}} f(t)\,dt$$

равномерно аддитивны. Для того чтобы любая бесконечная часть множества $\mathfrak{N}$ содержала последовательность, сходящуюся почти везде в области D (к суммируемой функции), необходимо, чтобы выполнялось следующее условие: каждой бесконечной части $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$, любому положительному числу ε и почти каждой внутренней точке x области D можно поставить в соответствие положительное число $\delta = \delta(\mathfrak{N}_1, \varepsilon, x)$, обладающее тем свойством, что, какова бы ни была сфера e с центром в точке x и с радиусом, меньшим δ, содержащаяся в D, найдется бесконечное множество функций $f(x)$ из $\mathfrak{N}_1$, для которых будет выполняться неравенство

$$\left| f(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int_e f(t)\,dt \right| < \varepsilon.$$

Это условие является и достаточным, если предположить дополнительно, что исключительное множество меры нуль, которое рассматривается в этом условии, не зависит от $\mathfrak{N}_1$.

Доказательство необходимости. Возьмем произвольную бесконечную часть $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$ и допустим, что она содержит последовательность $f_1(x)$, $_2(x), \ldots$, имеющую предел $f_0(x)$ для

любого $x \subset D - n_1$, где n_1 — некоторое множество меры нуль. В силу леммы II, эта предельная функция суммируема в области D.

Согласно известному свойству неопределенных интегралов Лебега, существует такое нуль множество n_2 (мы предположим, что оно включает границу области D), что для любого $x \subset (D - n_1) - n_2$ функция множества $\int\limits_{\mathscr{E}} f_0(t)\,dt$ дифференцируема и имеет производную, равную $f_0(x)$ [см. ([4])].

Таким образом, для любого положительного числа ε и любого $x \subset D - (n_1 + n_2)$ существует положительное число $\delta = \delta(\mathfrak{N}_1, \varepsilon, x)$, для которого выполняется условие

$$\left| f_0(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} e} \int\limits_e f_0(t)\,dt \right| < \varepsilon,$$

где e — любая сфера с центром в точке x и с радиусом, меньшим δ, принадлежащая области D. Рассуждая далее так же, как в аналогичном месте теоремы IV, мы легко придем к нужному выводу.

Доказательство достаточности. Предполагая, что условия рассматриваемой теоремы выполнены, возьмем произвольную бесконечную часть $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$. Обозначим через n исключительное множество меры нуль. Выберем из множества $\mathfrak{N}_1$ последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... так, чтобы соответствующая последовательность функций множества

$$\Phi_k(\mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}} f_k(t)\,dt$$

стремилась к определенному конечному пределу при неограниченном возрастании k для любого измеримого множества $\mathscr{E}$ области D, что возможно в силу теоремы III.

Тогда последовательность $f_1, (x)$, $f_2(x)$, ... будет иметь определенный конечный предел для любого x, принадлежащего $D - n$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассуждать так же, как и в аналогичном месте теоремы IV.

Предельная функция, в силу леммы II, будет суммируема в области D.

ТЕОРЕМА VII. *Пусть дано множество $\mathfrak{N}$ функций $f(x)$, определенных и суммируемых в области D и обладающих тем свойством, что неопределенные интегралы*

$$\Phi(\mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}} f(t)\,dt,$$

где $\mathscr{E}$ — измеримое множество области D, равномерно аддитивны. Пусть каждому положительному числу ε и любой точке x области D можно поставить в соответствие измеримое множество $e(x, \varepsilon)$ положитель-

ной меры, содержащееся в D, такое, что для всех функций $f(x)$, входящих в $\mathfrak{N}$ (или для всех, за исключением конечного числа, зависящего, может быть, от x) будет выполняться неравенство

$$\left| f(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} e(x, \varepsilon)} \int\limits_{e(x,\varepsilon)} f(t)\, dt \right| < \varepsilon.$$

Тогда любая бесконечная часть $\mathfrak{N}$ содержит последовательность, сходящуюся в любой точке x области D (к суммируемой функции).

Доказательство. Взяв произвольную бесконечную часть $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$, выберем из нее последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... так, чтобы соответствующая последовательность функций множества

$$\Phi_n(\mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}} f_n(t)\, dt$$

сходилась при неограниченном возрастании n для любого измеримого множества области D. Возможность этого следует из теоремы III.

Из условий рассматриваемой теоремы непосредственно вытекает, что колебание переменной $f_n(x)$ при неограниченном возрастании n для любого определенного $x \subset D$ не может превосходить сколь угодно малого положительного числа 2ε, следовательно, это колебание равно нулю.

Еще более очевидно, что переменная $f_n(x)$ не может иметь бесконечного предела при неограниченном возрастании n, ибо в противном случае мы пришли бы к противоречию с теоремами I и III. Наконец, в силу леммы II, предельная функция для последовательности $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... должна быть суммируема в области D.

ТЕОРЕМА VIII. *Пусть дано множество $\mathfrak{N}$ функций $f(x)$, определенных и суммируемых в области D, и пусть соответствующие функции множества*

$$\Phi(\mathscr{E}) = \int\limits_{\mathscr{E}} f(t)\, dt$$

равномерно аддитивны. Пусть, далее, выполняется следующее условие: сколь бы мало ни было положительное число ε, область D можно представить в виде конечной или счетной суммы непересекающихся измеримых множеств e_1 e_2, ... положительной меры так, что для любого натурального k и для всех (или для всех за исключением конечного числа) функций $f(x)$, входящих в $\mathfrak{N}$, будет иметь место неравенство

$$\left| f(x) - \frac{1}{\operatorname{mes} e_k} \int\limits_{e_k} f(t)\, dt + F_k(x, \varepsilon) \right| < \varepsilon,$$

где x — любая точка множества e_k, а $F_k(x, \varepsilon)$ — некоторая определенная функция от x и ε, зависящая, быть может, от разложения

$$D = e_1 + e_2 + \ldots,$$

но не зависящая от выбора функции $f(x)$.

Тогда любая бесконечная часть $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$ содержит последовательность, сходящуюся в любой точке области D. Если при этом разложение $D = e_1 + e_2 + \ldots$ можно всегда выбрать конечным, то сходимость этой последовательности будет равномерной в области D.

Доказательство. Взяв произвольную бесконечную часть $\mathfrak{N}_1$ множества $\mathfrak{N}$, выберем из нее последовательность $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$, обладающую тем свойством, что соответствующая последовательность функций множества

$$\Phi_n(\mathcal{E}) = \int_{\mathcal{E}} f_n(t)\, dt$$

сходится для любого измеримого множества области D, что возможно в силу теоремы III.

Из основного условия рассматриваемой теоремы следует, что колебание функции $f_n(x)$ при неограниченном возрастании n в любой определенной точке области D не будет превосходить сколь угодно малого положительного числа 2ε, так как средний член левой части последнего неравенства при $f = f_n$ и при неограниченном возрастании n стремится к определенному конечному пределу; следовательно, это колебание равно нулю.

Предположим теперь, что разложение $D = e_1 + e_2 + \ldots$ при любом положительном ε можно выбрать конечным. Тогда, если n достаточно велико, то все интегралы $\int_{e_k} f_n(t)\, dt$ будут отличаться сколь угодно мало от своих соответствующих пределов и, значит, $f_n(x)$ в любой точке x области D также будет отличаться сколь угодно мало от своего предела, т. е. сходимость последовательности $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots$ будет равномерной в области D.

Поступило
8. V. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дубровский В. М., О некоторых свойствах вполне аддитивных функций множества и об их применении к обобщению одной теоремы H. Lebesgue'a. Матем. сб., т. 20 (62) : 2 (1947), 317—329.

[2] Radon I., Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen Sitzungsberichte d. Acad. d. Wiss., Wien, Math.-naturw. Kl., 122 (1913) 1295—1438.

[3] Люстерник Л. А., Основные понятия функционального анализа, Успехи матем. наук, вып. 1, 1936.

[4] Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, Л.—М., ГТТИ, 1933

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 411–416

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ

ПУТИ РАЗВИТИЯ СОВЕТСКОЙ МАТЕМАТИКИ*

Советской математике присущи характерные черты, свойственные всей советской науке. Эти черты были отмечены в статье акад. С. И. Вавилова, опубликованной в «Известиях Советов Депутатов трудящихся» от 10 октября 1947 г.

Наука стала народной, вполне доступной для всех, кто имеет способность и охоту к научному исследованию. Наша наука тесно связана с народным хозяйством. Наследница всего хорошего, что осталось от дореволюционной России в области культуры, советская наука растет и крепнет вместе со всей страной.

1. Математика в России к началу революции. К началу Великой Октябрьской социалистической революции русский математический мир состоял из очень немногих крупных имен, продолжавших традиции славных русских математиков.

В области классического анализа работали: в Петербурге—В. А. Стеклов и А. М. Ляпунов, в Харькове—С. Н. Бернштейн. Теория вероятностей была представлена А. А. Марковым (Петербург) и С. Н. Бернштейном (Харьков). В Киеве под активным руководством Д. А. Граве начинали свои алгебраические исследования О. Ю. Шмидт, Н. Г. Чеботарев, Б. Н. Делоне. Не менее крупными именами была представлена прикладная математика—А. Н. Крылов в Петербурге, Н. Е. Жуковский и С. А. Чаплыгин в Москве. Совсем новая тогда область—теория функций действительного переменного только начинала развиваться.

2. Общая характеристика советской математики. За прошедшие 30 лет советская математика проделала огромный путь. Советская математика сейчас охватывает все основные направления современной математики. Во многих разделах Советский Союз занял первое место в мировой математике. Многие разделы математики разрабатываются у нас коллективами, в каждом из которых значительный процент составляет молодежь. Чрезвычайно возросла связь математики с прикладными дисциплинами—немало наших математиков, воспитавшихся на теории функций и топологии, завоевали себе крупные имена в физике (В. А. Фок, Н. Н. Боголюбов), в технике, в механике. Наиболее полной является связь математиков с механикой—все ведущие математики, разрабатывающие проблемы теории функций комплексного переменного и дифференциальных уравнений, прямо или косвенно участвуют в разработке различных актуальных проблем механики. Несколько слабее связь математиков с физикой, но за последние годы этот пробел быстро ликвидируется.

Заканчивая общую характеристику состояния советской математики, мне хочется подчеркнуть резко возросшую роль математической общественности. Если до революции и в течение многих лет после революции высшим арбитром ценности результата, значимости того или иного направления считалось мнение иностранных ученых, то теперь этим арбитром являемся мы сами. В расширении тематики, в связи математики с физикой и механикой, в создании математического общественного мнения исключительную роль сыграл и продолжает играть центральный штаб советских математиков — Математический институт им. В. А. Стеклова.

Ввиду многообразия направлений, разрабатываемых советской математикой, я вынужден в своем докладе ограничиться характеристикой состояния только некоторых из них.

---

*Доклад, прочитанный 28 октября 1947 г. на Юбилейной сессии ОФМН Ак. Наук СССР, посвященной 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции.

3. Теория чисел и алгебра. Начну с проблем теории чисел—арифметики—самой древней из математических наук. Теория чисел изучает законы, действующие в области первоначальных математических понятий. По этой причине как сами проблемы, так и их решения часто могут быть сформулированы в терминах элементарной арифметики. Наряду с этим для решения этих проблем современная теория чисел привлекает аппарат анализа, геометрии и теории функций. Методы, создаваемые для решения арифметических задач, порождают новые области. Чем «выдержаннее» проблема—50, 100, 300, 1000 лет,—тем глубже спрятана закономерность, тем труднее ее установить.

Немного менее 100 лет назад П. Л. Чебышев опубликовал свои первые работы по теории чисел. Именно эти работы положили начало русской школе теории чисел, быстро завоевавшей мировое первенство. Открытие Чебышева относилось к проблеме 2000-летней давности—проблеме плотности распределения простых чисел в ряде всех целых чисел. Речь идет о возможно точной оценке функции $\varphi(x)$, равной числу простых чисел, меньших x. Прямыми наследниками Чебышева были А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной.

Славные традиции этой плеяды ученых полностью закреплены советскими математиками, давшими за истекшие 30 лет ряд блестящих работ. Среди этих работ совершенно особое место занимают классические исследования И. М. Виноградова, в корне изменившие лицо всей аддитивной теории чисел. Постановка проблем и результаты были изложены самим И. М. Виноградовым в его докладе на Общем собрании Академии Наук.

Наиболее родственной теории чисел является алгебра. Серьезное развитие в России алгебра получила только в советский период. Незадолго до революции в Киеве под активным руководством Д. А. Граве была создана первая в России алгебраическая школа. Крупнейшими представителями этой школы следует назвать О. Ю. Шмидта, Б. Н. Делоне и недавно скончавшегося Н. Г. Чеботарева. Каждый из них обогатил науку первоклассными результатами и создал школы: Б. Н. Делоне—в области геометрии чисел, Н.Г. Чеботарев—теория Галуа и алгебраические числа, О.Ю. Шмидт—теория конечных групп. За последние 20 лет под влиянием теории функций и топологии в Москве получила большое развитие совсем молодая ветвь алгебры—абстрактная алгебра. Методы теории функций и топологии привели к постановке новых задач и важным открытиям (Л. С. Понтрягин, А. Г. Курош, И. М. Гельфанд, А. И. Мальцев и др.).

4. Теория функций, топология, функциональный анализ. Начало развития у нас теории функций действительного переменного надо отнести к моменту выхода в свет (1915 г.) замечательной монографии Н. Н. Лузина—«Интеграл и тригонометрический ряд». В этой монографии, наряду с изложением крупных результатов, было высказано много гипотез, поставлен ряд проблем, намечены связи между различными разделами области. Эта монография в течение более 15 лет питала умы многочисленных наших и зарубежных математиков. К началу революции появились первые работы школы Лузина (П. С. Александров, М. Я. Суслин, Д. Е. Меньшов). К моменту расцвета школы (1921—24 гг.) в нее входило более тридцати московских математиков. Москва стала мировым центром как в дескриптивной, так и в метрической теории функций.

К числу лучших достижений школы Лузина надо отнести теорию A-множеств (Лузин, Александров, Суслин), теорию неявных функций (Лузин, Новиков), теорию проэктивных множеств (Лузин, Новиков), а также ряд результатов по теории тригонометрических рядов и рядов по ортогональным функциям (Д. Е. Меньшов, А. Н. Колмогоров, Н. К. Бари). Две проблемы привлекали особое внимание всей школы: проблема мощности CA и проблема сходимости почти всюду ряда Фурье от непрерывной функции. Эти проблемы, в корне различной природы, остались нерешенными до сих пор, несмотря на огромные усилия как наших, так и зарубежных математиков.

Работы в этом и смежных направлениях продолжаются и сейчас значительной группой советских математиков. Особенно интересными и перспективными мне представляются исследования Новикова, который ищет решение проблемы типа проблемы мощности CA в терминах математической логики.

Уже в 1921 г. из школы Лузина начинает формироваться самостоятельная московская топологическая школа во главе с П. С. Александровым и П. С. Урысоном, а в последующие годы теория функций проникает в теорию аналитических функций, в алгебру, в дифференциальные уравнения с их многочисленными приложениями, в теорию чисел (А. Я. Хинчин) и в теорию вероятностей (А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров).

Московская топологическая школа, с ее ленинградским и тбилисским филиалами, во главе с П. С. Александровым и Л. С. Понтрягиным занимает ведущее место в мировой топологии. К центральным достижениям школы надо отнести созданую в основном Александровым и Урысоном теоретико-множественную топологию и замечательные исследования Понтрягина по теории линейных представлений топологических групп.

В сочетании идей и проблем анализа, теоретико-множественной топологии, теории функций действительного переменного и интегральных уравнений родилась новая область—функциональный анализ, основным и активным создателем которого был львовский профессор С. С. Банах. В настоящее время можно сказать, что в этой области Советский Союз занимает ведущее место.

Из работ многочисленных советских математиков, работающих в этой области, отмечу замечательные исследования М. Г. Крейна (Одесса) по теории полуупорядоченных пространств, по проблемам расширения и изучения спектральных свойств эрмитовых операторов.

Больших успехов добились московские и ленинградские функционалисты И. М. Гельфанд, Л. В. Канторович и др.

Независимо от общего развития функционального анализа как самостоятельного раздела, его основные положения и методы нашли богатые приложения в теории дифференциальных уравнений с частными производными (С. Л. Соболев) и в вариационном исчислении (Л. А. Люстерник).

5. Аналитические функции. Теория функций комплексного переменного, как аппарат, оказалась исключительно ценной для решения многих задач механики сплошной среды, электротехники, а также в ряде вопросов аналитической теории чисел. К числу крупнейших приложений ее к механике необходимо в первую очередь отнести работы советских ученых в гидроаэродинамике и плоской задаче теории упругости, занявшие ведущее положение в мире в этих областях.

Тбилисская школа во главе с Н. И. Мусхелишвили, возникшая сразу после Великой Октябрьской социалистической революции, дала исчерпывающие конструктивные решения ряда классических задач теории упругости с возможностью доведения решения до численных значений.

В области гидроаэродинамики, начиная с классических работ Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина, вскрывших природу подъемной силы крыла самолета, советскими учеными решено огромное количество задач первостепенного значения для самых разнообразных проблем техники: проблема вибраций (М. В. Келдыш), проблема больших скоростей (С. А. Христианович), проблема глиссирования (Л. И. Седов), проблема движения грунтовых вод (П. Я. Кочина). Мой список далеко не полон даже в отношении задач, решенных методами теории аналитических функций.

Из приложений аналитических функций к теории чисел особое место занимает блестящая работа А. О. Гельфонда по проблеме трансцендентных чисел.

Независимо от классического направления работ, уже в первые годы после революции начинает формироваться московская школа по теории функций комплексного переменного в направлении идей и методов теории функций действительного переменного. Это направление, начатое во Франции, у нас в основном выросло из школы Лузина. Первые работы принадлежат В. В. Голубеву, Н. Н. Лузину и И. И. Привалову. В дальнейшие годы это направление сильно выросло и сомкнулось с классическими проблемами полиномиальных разложений, проблемой типа римановых поверхностей, проблемами «искания».

Приведу несколько результатов основного значения. И. И. Приваловым были изучены с исчерпывающей полнотой интегралы типа Коши для произвольных обла-

стей со спрямляемыми границами. Н. Н. Лузиным и И. И. Приваловым была установлена замечательная теорема об инвариантности множеств меры нуль при конформном отображении. Разработанный при этом метод нашел дальнейшие многочисленные приложения к смежным проблемам. Д. Е. Меньшов дал исчерпывающее решение вопроса о минимальных условиях, которые нужно наложить на отображение, чтобы это отображение было конформным. М. В. Келдыш дал предельно полное решение проблемы равномерной полиномиальной аппроксимации аналитических функций в замкнутых областях.

Большое развитие у нас (Москва, Ленинград) за последние 20 лет получила также так называемая геометрическая теория функций комплексного переменного и примыкающие сюда методы приближенных конформных отображений (Ленинград), а также по целым функциям и проблеме интерполяции (А. О. Гельфонд, В. Л. Гончаров, Б. Я. Левин).

Остановлюсь подробнее еще на одном направлении, на так называемой конструктивной теории функций Любую функцию $f(x)$ действительного переменного, непрерывную в отрезке (0,1), можно равномерно аппроксимировать полиномом, разложить в равномерно сходящийся ряд полиновов. В силу этого, все свойства непрерывных функций потенциально заложены в их полиномиальных разложениях. Построение и изучение различных классов полиномов восходит к первым исследованиям в области анализа. У нас крупнейший вклад в эту область был внесен П. Л. Чебышевым, связавшим свои исследования с теорией механизмов. Следующий крупный этап начался после появления (незадолго до революции) замечательных работ С. Н. Бернштейна.

С. Н. Бернштейн показал, что быстрота сходимости полиномов, наименее уклоняющихся от данной функции, тесно связана с аналитической природой этой функции. Из этой идеи впоследствии выросла новая область—теория почти аналитических функций.

За истекшие 30 лет эта область обогатилась целым рядом крупных результатов, полученных как самим С. Н. Бернштейном, так и его многочисленными учениками.

6. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Следующим разделом математического анализа, особенно важным для механики и физики, является теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Исследования математиков здесь особенно тесно переплетаются с работами механиков и физиков. Огромный вклад в эту область был внесен непосредственно перед революцией А. М. Ляпуновым, В. А. Стекловым и А. Н. Крыловым. Полного расцвета эта область достигла уже в советский период, когда сформировался целый ряд центров и школ.

В области качественных исследований был получен ряд фундаментальных результатов, относящихся к изучению поведения траекторий в фазовом пространстве (В. В. Степанов, А. А. Марков, А. Я. Хинчин, Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов). В частном случае двухмерного фазового пространства было получено наибольшее количество конкретных результатов, в частности было начато изучение так называемых «грубых систем» (Л. С. Понтрягин, А. А. Андронов)—систем, у которых топологический характер траекторий в фазовой плоскости не меняется при малых возмущениях.

За последние годы был разработан ряд методов, позволяющих фактически находить предельные циклы; сюда в первую очередь надо отнести весьма перспективный асимптотический метод А. Н. Тихонова.

Наряду с развитием общих качественных методов, у нас получили также широкое развитие приближенные методы. Сюда надо в первую очередь отнести новые методы теории возмущений для дифференциальных уравнений с малым параметром (Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов). Метод Крылова—Боголюбова открывает широкие возможности для оценок погрешности, а также для качественных исследований. Именно этим путем им удалось впервые доказать известную теорему существования квази-периодических решений класса уравнений, интересных для приложений. Указанный метод является весьма общим и применяется для очень широкого класса дифференциальных уравнений с малым параметром. Впервые он применялся для

решения различных проблем нелинейных колебаний; в последние годы этот же метод привел Н. Н. Боголюбова к замечательным результатам в статистической физике.

На грани теории функций комплексного переменного и дифференциальных уравнений находятся глубокие исследования рано погибшего ленинградского математика И. А. Лаппо-Данилевского.

7. Дифференциальные уравнения в частных производных. Не менее тесную связь с приложениями и другими разделами математики (геометрия, теория вероятностей и др.) имеет классический раздел анализа—дифференциальные уравнения с частными производными. Наши крупные достижения в сейсмологии, газовой динамике, гидродинамике в значительной мере обусловлены успехами в решении краевых задач соответствующих уравнений. Наряду с этим под влиянием теории функций и функционального анализа в рассматриваемой классической области появились новые направления, новые постановки задач.

Совершенно не касаясь приложений, отмечу четыре направления в рассматриваемом разделе, причем в каждом из этих направлений советским математикам принадлежат первоклассные результаты, выдвигающие советскую математику и в этом разделе на первое место среди всех стран.

В направлении качественного исследования решений уравнений в частных производных первый фундаментальный результат был получн в 1904 г. С. Н. Бернштейном. Он показал, что всякое трижды дифференцируемое решение уравнения аналитического типа с аналитическими коэффициентами будет аналитическим. В этой и в последующих своих работах Бернштейн разработал новый метод для оценок производных решения в зависимости от значений самой функции. Эти результаты нашли богатые приложения и развитие. В советский период теорема С. Н. Бернштейна получила наиболее широкое принципиальное обобщение в работах И. Г. Петровского—им установлена аналитичность решений систем уравнений, называемых «эллиптическими по всем пространственным координатам». К этому же направлению относится серия глубоких исследований С. Л. Соболева по обобщенным решениям волновых уравнений.

При переводе физической или механической задачи на язык краевой задачи соответствующего уравнения в частных производных, как правило, принимается ряд упрощающих гипотез. Одним из полезных критериев правильности сделанных гипотез может служить критерий устойчивости решения полученного дифференциального уравнения относительно краевых условий. Постановка задачи изучения устойчивости решения при варьировании граничных заданий характерна для современной математики. Здесь много интересных задач для простейших уравнений при экзотических краевых условиях и классических краевых задач для возможно более широких классов уравнений. В этом направлении советской математике принадлежит также ряд основных результатов, в первую очередь ряд теорем С. Л. Соболева для специальных нелинейных уравнений гиперболического типа и ряд теорем И. Г. Петровского для наиболее общего класса уравнений гиперболического типа.

В направлении классической проблемы классификации уравнений (гиперболические, параболические, эллиптические) с выявлением характерных особенностей уравнений каждого типа мы также имеем ряд результатов и в первую очередь фундаментальную работу И. Г. Петровского.

Остановлюсь еще на одном направлении, наиболее тесно связанном с приложениями. Речь идет о построении возможно простых и эффективных алгоритмов для решения различных классов краевых задач уравнений математической физики. Здесь наиболее общие результаты были получены С. Л. Соболевым, В. И. Смирновым для волновых уравнений и школой Н. И. Мусхелишвили для бигармонического уравнения, а в дальнейшем (И. Н. Векуа) и для весьма широкого класса уравнений эллиптического типа.

На грани между дифференциальными уравнениями в частных производных и теорией функций находится начавшее развиваться у нас новое направление—теория квази-конформных отображений. Как мне кажется, это направление имеет большие перспективы как для функций комплексного переменного, так и в дифференциальных уравнениях.

8. Геометрия. Из всех разделов геометрии, с успехом разрабатываемых в Советском Союзе (Москва, Ленинград), я коснусь в своем докладе только геометрии в целом, из которой отмечу два результата, представляющих бесспорно крупный вклад в науку о пространстве.

Во-первых, Л. А. Люстерник и Л. Г. Шнирельман доказали, что на каждой выпуклой поверхности можно провести три замкнутые геодезические линии. Попытки доказать эту теорему делали крупнейшие метематики современности (в частности Пуанкаре и Бирхгоф).

Во-вторых, А. Д. Александров решил классическую проблему замкнутого многогранника, восходящую еще к Эйлеру.

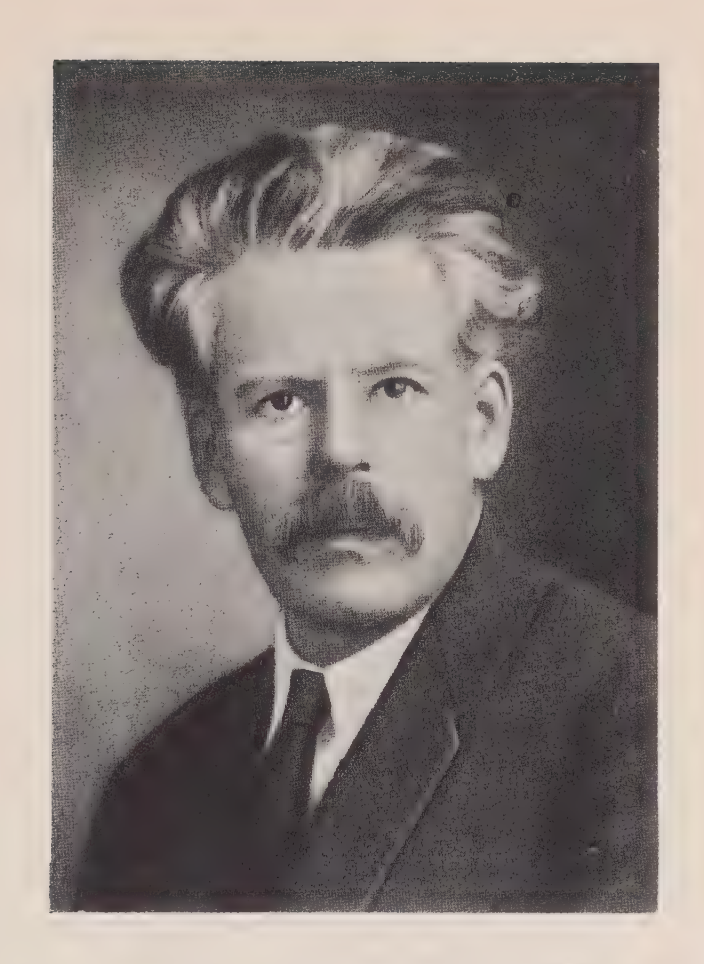
9. Теория вероятностей. Советская теория вероятностей, так же как геометрия и теория чисел, восприняла славное наследие наших крупнейших ученых прошлого П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунова и А. А. Маркова. Советская школа теории вероятностей во главе с С. Н. Бернштейном, А. Н. Колмогоровым и А. Я. Хинчиным бесспорно занимает ведущее место в мировой науке. Остановлюсь совсем кратко на основных достижениях этой школы. Особых успехов школа добилась по предельным теоремам для сумм случайных величин и функций. Эти исследования можно рассматривать как блестящее завершение работ Чебышева, Ляпунова и Маркова. Далее, А. Н. Колмогоровым была впервые построена полная аксиоматика теории вероятностей. Теория Колмогорова имеет большое значение не только как завершение длинного цикла исследований, но и как основа создаваемых более общих концепций.

Еще в самом начале нашего столетия в физике, а позже в технике, возникла потребность в рассмотрении процессов, не укладывающихся в рамки классической теории вероятностей. Речь идет об изучении случайных процессов, претерпевающих случайные изменения в зависимости от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров—времени, координат и т. п. Этими процессами у нас впервые занялся А. Н. Колмогоров, затем А. Я. Хинчин и большая группа советских математиков. Была впервые создана общая теория стохастических процессов, которая продолжает интенсивно развиваться. Все большее влияние начинает у нас оказывать теория вероятностей на математическую статистику. В этом направлении особого внимания заслуживают работы Е. Е. Слуцкого и главы ташкентской школы В. И. Романовского. Следует отметить, что работы нашей школы теории вероятностей тесно связаны с задачами приложений теории в биологии, артиллерии, физике, теории измерений и т. д.

10. Вычислительная математика. Заканчивая свой далеко не полный обзор путей развития и достижений советской математики, я остановлюсь еще на одной области, развитие которой особенно важно для приложений математики. Я имею в виду машинную математику. Если по основным разделам математики к 30-й годовщине Великой Октябрьской социалистической революции мы можем рапортовать: мы догнали, а во многих разделах и перегнали зарубежную математику, то в отношении машинной математики нам нужно еще много усилий, чтобы решить эту задачу.

Вычислительная ячейка, созданная в 1935 г. в Математическом институте им. В. А.Стеклова, начинает выполнять, особенно за последние годы, крупные вычисления. Эта ячейка за 12 лет из двух комнат распространилась на целый этаж и занимает сейчас больше половины всей площади Математического института. Дальше отделу приближенных методов распространяться в Институте уже некуда, кроме того, его задачи таковы, что для их решения нужен совершенно другой размах. Мне хочется высказать пожелание, чтобы решение ОФМН о создании специального Института, вынесенное более двух лет назад, нашло скорейшее и полное разрешение.

В заключение разрешите высказать уверенность в том, что за ближайшее пятилетие советские математики обогатят науку новыми открытиями и что еще более окрепнет творческая связь математики с другими науками и в первую очередь с физикой.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 417—420

ЕВГЕНИЙ ЕВГЕНЬЕВИЧ СЛУЦКИЙ

1880—1948

10 марта 1948 г. в Москве скончался известный советский математик Евгений Евгеньевич Слуцкий, крупнейший представитель нашей отечественной теории вероятностей и математической статистики.

Е. Е. Слуцкий родился в 1880 г. в с. Новом б. Ярославской губернии в семье учителя и воспитателя Новинской учительской семинарии. Среднее образование он получил в классической гимназии г. Житомира. Сюда после почти трехлетних скитаний перебралась его семья, когда отец Е. Е. в 1889 г. получил здесь место заведующего городским училищем. Интерес к математике определился у Е. Е. в гимназические годы, и, окончив гимназию в 1899 г. с золотой медалью, Е. Е. поступает на физико-математический факультет Киевского университета. Но путь его к математике оказался весьма необычным и долгим. Студенческие годы Е. Е., совпавшие с годами революционного брожения среди учащейся молодежи, сильно затянулись. Не раз двери университета закрывались перед «политически неблагонадежным» и «красным» студентом, а в 1901 г. он в числе 184 студентов за участие в запрещенной сходке был сдан в солдаты и только широкая волна студенческих протестов, вспыхнувших вслед за этим в столичных городах, принудила правительство вернуть его в университет в том же году. Уже в начале следующего, 1902 года, Е. Е. был вновь уволен за участие в демонстрации против министра Зенгера, на этот раз уже без права поступления в высшие учебные заведения. Лишь после 1905 г. он смог вернуться в Киевский университет, поступив на этот раз на юридический факультет.

Этот выбор был продиктован стремлением подготовить себя к научной работе в области приложений математики к экономике, интерес к которой сложился у Е. Е. за предшествующие годы в результате тщательного изучения трудов Рикардо, Маркса и Ленина. Юридический факультет был окончен в 1911 г. с золотой медалью, присужденной Е. Е. за представленное им сочинение. Однако репутация неблагонадежности помешала его оставлению при университете.

В последующие за тем годы подготовки к магистерским экзаменам Е. Е. усиленно штудирует теорию вероятностей. Уже в 1912 году выходит в свет его книга «Теория корреляции» — первое на русском языке руководство по изучению новых для того времени статистических мето-

дов, сыгравшая немаловажную роль в повышении математического уровня нашей статистической мысли. Она была хорошо встречена критикой и имя автора стало все чаще попадаться на страницах статистической печати.

В 1913 г. Е. Е. начинает работать в Киевском коммерческом институте (позднее преобразованном в Киевский институт народного хозяйства), читая курсы политической экономии и математической статистики, сначала в качестве преподавателя, потом доцента и с 1920 г.—в должности профессора.

В 1916—17 г. при Московском университете он сдал магистерские экзамены на степень магистра политической экономии. Научный интерес к математическим проблемам в области математической статистики и теории вероятностей полностью оформился у Е. Е. с переездом его в Москву в 1926 году. С этого момента начинается его работа в ряде научно-исследовательских институтов столицы. Центральной задачей, которой Е. Е. отдает все свои силы, является распространение теоретико-вероятностных методов на статистическое изучение случайных процессов и рядов зависимых величин. Хорошо понимая всю непозволительность формального переноса в эту область методов, сложившихся при изучении не связанных между собою наблюдений, Е. Е. ставит грандиозную по замыслу задачу разработки и обоснования новой статистической методологии на более широкой и адэкватной научной базе. Эта задача, отправлявшаяся от вполне конкретных запросов, привела Е. Е. к целому ряду проблем глубоко принципиального и общетеоретического значения. Отправным пунктом его исследований является развитая им в 1925 г. широкая концепция стохастического предела, открывающая наиболее важные случаи сходимости по вероятности и усиленного закона больших чисел.

Дальнейшим этапом в том же направлении являются его работы по теории непрерывного стохастического процесса или случайных функций. Здесь одним из очень важных и эффектных результатов Е. Е. было доказательство предложения, согласно которому всякая случайная стохастически непрерывная функция на сегменте стохастически эквивалентна измеримой функции не выше 2-го класса по Бэру. Им также получены простые достаточные условия для стохастической эквивалентности случайной функции непрерывной функции на сегменте, условия дифференцируемости последней и т. д. Эти работы, несомненно, занимают почетное место в ряду исследований, связанных с разработкой одной из наиболее актуальных проблем современной теории вероятностей, обязаной своим возникновением научной инициативе Е. Е. Слуцкого.

Следующий цикл работ (1926—1927 г.) Е. Е. посвящен исследованию случайных стационарных рядов, и в этой важной области работы Е. Е. послужили отправным пунктом для многочисленных и плодотворных исследований. Отправляясь от простейшей модели ряда, полученного многократным скользящим суммированием бессвязного ряда, он пришел к некоторому классу стационарных рядов, обладающих псевдо-

периодическими свойствами, имитирующими на сколь угодно больших отрезках ряды, получающиеся наложением периодических функций.

Этот результат явился своего рода сенсацией, заставившей критически пересмотреть разнообразные попытки статистических доказательств периодических закономерностей в геофизике, метеорологии и т. д.

Гипотеза наложения конечного числа закономерно периодических колебаний оказывается статистически неотличимой от гипотезы случайной функции с очень большой зоной связности.

Еще более глубокое проникновение в структуру случайных функций представляет его замечательная работа о стационарных процессах с дискретным спектром. Корреляционная функция в этом случае будет почти периодической. Основной результат, полученный Е. Е., заключается в том, что случайная функция в этом случае также будет почти периодической функцией определенного вида, обладающей, впрочем, тем свойством, что она полностью определяется своим рядом Фурье почти всюду.

Эти исследования, поражающие новизной и смелостью замысла, далеко еще не исчерпывая очень трудной и глубокой проблемы, представляются все же одним из выдающихся результатов нашей науки. По своей методике и стилю они тесно примыкают к теоретико-вероятностным концепциям московской школы (Колмогоров, Хинчин), исторически возникшим на иной базе. Этот трудно достижимый синтез остроты и широкого охвата теоретической мысли с совершенно отчетливо сознаваемой конкретной направленностью конечных результатов и конечной цели исследования является характерной особенностью творчества Евгения Евгеньевича.

«Мне казалось, — говорил он сам, — что рядом с теоретическим исследованием я должен вести также изучение тех или иных конкретных проблем, чтобы проверять таким путем методы и получать задания для теоретической работы от соприкосновения с действительностью».

Предшествующие его работы по связным рядам имели своим следствием полную перестройку всех обычных методов оценки статистических характеристик таких рядов, чрезвычайно интересный критический пересмотр приемов, разыскание периодичностей и прогноза. Мимо этих результатов в настоящее время не может пройти ни один исследователь в этой еще далекой от завершения, но плодотворной области исследования.

Наиболее важные статистические исследования Е. Е. возникли в связи с исследованием геофизических рядов и носят частью критический характер, обнаруживая незаконность тех выводов, к которым приходил ряд исследователей различных статистических закономерностей, работая уже сложившимися методами. В других случаях путем остроумно примененных специальных приемов Е. Е. удается обнаруживать и наличие строгой закономерности, лишь искажаемой наложением случайных колебаний.

Этот комплекс работ, выполненных с присущим Е. Е. блеском и почти художественным проникновением в сложную и запутанную картину явления, отображенного в статистической сводке, далеко оставляет

позади аналогичные попытки западно-европейских и американских статистиков.

В последние годы Е. Е. руководил (в Математическом институте им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР) чрезвычайно трудоемкой работой по составлению таблиц неполной гамма-функции, значительно усовершенствовав методику ее табулирования и использования. Эти важные для приложения таблицы—в известном смысле представляющие шедевр вычислительного мастерства — потребовали большой и напряженной работы, которую Е. Е. не бросал даже в самые тяжелые моменты его болезни. Вводная часть к таблицам была почти закончена Е. Е. за несколько дней до смерти.

Утром 10 марта 1948 г. его не стало. Но тот творческий энтузиазм и твердая уверенность в неограниченных возможностях науки, которыми пронизано оставленное им богатое научное наследство, навсегда останутся в памяти его сотрудников и товарищей по работе.

Н. Смирнов

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 421–444

С. Н. БЕРНШТЕЙН

ПЕРЕНЕСЕНИЕ СВОЙСТВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ НА ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

В настоящей статье дается применение общей теории, изложенной в заметках автора (1), (2), (3), (4), к установлению свойств целых функций конечной степени, аналогичных тем, которые были выведены автором для тригонометрических полиномов в статьях (5), (6).

§ 1. ЛЕММА 1. *Если абсолютный максимум ограниченных функций $G_p(x)$ степени $\leqslant p$ достигается на отрезке (x_0, x_1), где $x_1 - x_0 = \beta < \frac{\pi}{p}$, то*

$$\max|G_p(x)| \leqslant M = \frac{1}{\sin p\beta}\sqrt{G_p^2(x_0) + G_p^2(x_1) - 2G_p(x_0)\,G_p(x_1)\cos p\beta} \quad (1)$$

и знак равенства осуществляется, когда $G_p(x)$ есть тригонометрический полином

$$G_p(x) = \frac{G_p(x_1)\sin p(x - x_0) - G_p(x_0)\sin p(x - x_1)}{\sin p\beta} \quad (2)$$

порядка 1 с периодом $2\lambda\pi = \frac{2\pi}{p}$.

Действительно, среди ограниченных функций $G_p(x)$, принимающих заданные значения $G_p(x_0)$ и $G_p(x_1)$ и достигающих абсолютного максимума на (x_0, x_1), есть такая $G_p^*(x)$, для которой этот максимум получает наибольшее значение N. Но мы знаем, что с одной стороны (2), (3),

$$G_p^*(x) = \lim_{n\to\infty} S_{n,\lambda}(x),$$

где $S_{n,\lambda}(x)$ $(|S_{n,\lambda}(x)| \leqslant N)$ — тригонометрические полиномы порядка n с периодом $2\lambda\pi = \frac{2n\pi}{p}$, равномерно в каждом данном промежутке, и с другой стороны (6), утверждение нашей леммы доказано для случая, когда $G_p(x)$ есть любой тригонометрический полином; следовательно, $N = M$.

Следствие 1. *Расстояние от точки x_0, где достигается абсолютный максимум M целой функции $G_p(x)$ степени p, до корня $G_p(x) = 0$ не менее $\frac{\pi}{p}$.*

Доказательство аналогично: среди тригонометрических полиномов $S_{n,\lambda}(x) \to G_p(x)$ имеются, в частности, такие, для которых абсолютный максимум также достигается в точке x_0 и $S_{n,\lambda}(x_1) = G_p(x_1) = 0$ в ближайшем корне $G_p(x) = 0$, но требуемое свойство $|x_1 - x_0| \geqslant \frac{\pi}{p}$ $\left(p = \frac{n}{\lambda}\right)$ установлено для тригонометрических полиномов [см. ([6]), стр. 1159].

Следствие 2. *Если абсолютный максимум M функции $G_p(x)$ достигается на отрезке (x_0, x_1), причем*

$$|G_p(x_1)| \leqslant 1, \quad |G_p(x_0)| \leqslant 1 \quad \left(x_1 - x_0 = \beta = \frac{\pi}{\mu p},\ \mu > 1\right), \tag{3}$$

то

$$|G_p(x)| \leqslant \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2\mu}} \quad (-\infty < x < \infty); \tag{4}$$

при этом знак равенства осуществляется, когда

$$G_p(x) = \frac{\cos p\left[x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right]}{\cos \frac{\pi}{2\mu}}. \tag{5}$$

Для доказательства нужно определить максимум M правой части (1) при условиях (3), который соответствует *

$$G_p(x_0) = G_p(x_1) = 1.$$

Следовательно, максимум

$$M = \frac{1}{\sin p\beta} \sqrt{2 - 2\cos p\beta} = \frac{1}{\cos \frac{p\beta}{2}}$$

и (2) превращается в (5).

ТЕОРЕМА 1. *Если целая функция $G_p(x)$ степени p удовлетворяет условиям:*

1) $|G_p(a_k)| \leqslant 1$ в бесконечной последовательности точек a_k $(\pm k = 0, 1, \ldots)$, где $0 < a_{k+1} - a_k \leqslant \frac{\pi}{p\mu} (\mu > 1)$;

2) существует такое число $m > 0$, что $\lim\limits_{\pm x \to \infty} \frac{G_p(x)}{x^m} = 0$ (т. е. функция $G_p(x)$ алгебраического роста),

то $G_p(x)$ ограничена на всей действительной оси, а именно

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |G_p(x)| = g_\mu \leqslant \frac{1}{\cos \frac{\pi}{2\mu}}.$$

* Так как при $1 \leqslant \mu \leqslant 2$ $(\cos p\beta \leqslant 0)$ коэффициент при $G_p(x_0)\, G_p(x_1)$ в подкоренном количестве $(1) \geqslant 0$, а в случае $\mu > 2$ $(\cos p\beta > 0)$ неравенство $G_p(x_0)\ G_p(x_1) < 0$ недопустимо (следствие 1) и подкоренное количество (1), представляя тогда квадрат стороны, противолежащей острому углу $p\beta$ с прилегающими сторонами $G_p(x_0)$ $G_p(x_1)$, также достигает наибольшего значения при $G_p(x_0) = G_p(x_1) = 1$.

Наше утверждение в случае $m=0$, т. е. при $\lim\limits_{\pm x\to\infty} G_p(x)=0$, непосредственно вытекает из следствия 2, так как тогда абсолютный максимум $|G_p(x)|$ достигается в точке некоторого отрезка (a_k, a_{k+1}). Но при всяком данном $m>0$ (которое можем считать целым) введем функцию

$$G_{p+\varepsilon m}(x)=\left(\frac{\sin \varepsilon x}{\varepsilon x}\right)^m G_p(x)$$

степени $p+\varepsilon m=c_\varepsilon p$, где ε возьмем достаточно малым, чтобы $c_\varepsilon<\mu$. В таком случае

$$\lim_{\pm x\to\infty} G_{p+\varepsilon m}(x)=0, \quad |G_{p+\varepsilon m}(a_k)|\leqslant 1$$

и, согласно (4),

$$|G_{p+\varepsilon m}(x)|\leqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi c_\varepsilon}{2\mu}} \quad (-\infty<x<\infty). \tag{4 bis}$$

Полагая $\varepsilon\to 0$ $(c_\varepsilon\to 1)$, получаем (4), так как $G_{p+\varepsilon m}(x)\to G_p(x)$ при всяком фиксированном x.

§ 2. Желая полностью освободиться от второго условия теоремы и получить возможно простые результаты, уточняющие неравенство (4), мы остановимся теперь на случае, когда узлы a_k расположены равномерно:

$$a_{k+1}-a_k=\frac{\pi}{\mu p} \quad (\mu>1).$$

ЛЕММА 2. *Если целая функция $G_p(x)$ степени p удовлетворяет во всех точках $x_k=\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\mu p}$ $(\mu>1,\ k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ неравенствам $|G_p(x_k)|\leqslant 1$, то* $(p_1=\mu p>p)$

$$G_p(x)=\cos p_1 x\left\{G_p(0)+p_1 x\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}G_p(x_k)}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\left[p_1 x-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi\right]}\right\} \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}}\frac{G_p(x)}{\log|x|}<\infty.$$

Действительно, правая часть (6) есть целая функция $H_{p_1}(x)$ степени не выше p_1, поэтому

$$G_p(x)=H_{p_1}(x)+F(x)\cos p_1 x,$$

где $F(x)$ есть целая функция конечной степени $q\geqslant 0$, но предположение $q>0$ следует отбросить, так как тогда степень $F(x)\cos p_1 x$ была бы $\geqslant\sqrt{p_1^2+q^2}>p_1$.* Принимая же во внимание, что

$$\lim_{y\to\infty}\frac{H_{p_1}(\pm iy)\,e^{-p_1 y}}{y}\to 0,$$

между тем как

$$\overline{\lim_{y\to\infty}}\frac{F(\pm iy)}{y}>0,$$

---

* См. Добавление, следствие 4.

если функция $F(x)$ нулевой степени не приводится к постоянной, заключаем, что $F(x)$ — постоянная (т. е. $F(x)=0$), ибо в противном случае мы имели бы

$$\overline{\lim_{y\to\infty}} \frac{G_p(\pm iy)\, e^{-p_1 y}}{y} > 0,$$

что невозможно $(p < p_1)$.

Из леммы 2 и теоремы 1 следует

ТЕОРЕМА 2. *Какова бы ни была функция $G_p(x)$, удовлетворяющая условиям леммы 2, при всех $x\ (-\infty < x < \infty)$ соблюдается неравенство* (4); *кроме того, если μ — целое число* ($\mu = 2, 3, \ldots$), *то верхняя грань g_μ, данная неравенством* (4), *не может быть снижена** (разумеется точки x_k могут быть сдвигаемы: $(x_k + a)$, где a — любая постоянная).

Последнее утверждение вытекает из того, что верхняя грань (4) достигается функцией

$$G_p(x) = \frac{\cos px}{\cos \frac{\pi}{2\mu}},$$

которая в случае целого $\mu \geqslant 2$ удовлетворяет неравенствам

$$\left| G_p\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{\mu p}\right)\right| \leqslant 1, \tag{3 bis}$$

так как тогда $\left|\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\mu}\right| \leqslant \cos\frac{\pi}{2\mu}$ при всех целых k.

§ 3. Для перенесения результатов § 1 статьи ([6]) построим прежде всего интерполяционные формулы, аналогичные тем, которые были там даны.

Пусть $f(x)$ будет какая-нибудь функция, заданная своими значениями $f(a_k)$ в равноотстоящих точках $a_k = \frac{k\pi}{p_1}$.

Полагая $\frac{p_1}{q} = N > 1$, построим функцию

$$G_{p_1+q}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{f(a_k)\sin p_1(x-a_k)\sin q(x-a_k)}{p_1 q\,(x-a_k)^2} \tag{7}$$

---

* Очевидно, g_μ является невозрастающей функцией; например, $g_2 = \sqrt{2}$, $g_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}$; для нецелого $\mu > 2$, вообще,

$$\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2[\mu]+2}} < g_\mu < \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2[\mu]}}$$

и $g_\mu \to 1$ так, что $\lim\limits_{\mu\to\infty} \mu^2 [g_\mu - 1] = \frac{\pi^2}{8}$. Для $\mu < 2$ далее будут даны более точные оценки g_μ и, в частности, будут указаны точные значения $L_N = g_\mu$ для $\mu = \frac{N}{N-1}$ при любом целом $N > 1$.

степени $\leqslant p_1 + q = p_1\left(1+\frac{1}{N}\right)$ по значениям $f(a_k) = G_{p_1+q}(a_k)$, которая выражается абсолютно и равномерно сходящимся рядом, если значения $|f(a_k)| \leqslant M$ ограничены. Ценные свойства этой интерполяционной формулы связаны с простым тождеством $\left(a_k = \frac{k\pi}{p},\ p_1 = qN,\ N \geqslant 1\right)$:

$$\varphi(N, qx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 q(x-a_k)}{q^2(x-a_k)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(qx - \frac{k\pi}{N}\right)}{\left(qx - \frac{k\pi}{N}\right)^2} = N. \qquad (8)$$

Для доказательства заметим сначала, что, каково бы ни было $N_0 > 1$, ряд (7) при любом фиксированном x равномерно сходится в промежутке $1 \leqslant N \leqslant N_0$ и, следовательно, $\varphi(N, qx)$ непрерывна относительно N.

С другой стороны, функция $\varphi(N, qx)$ не зависит от x, так как она является целой периодической функцией степени 2 переменной $z = qx$ с периодом $\frac{\pi}{N}$ относительно этой переменной z и, следовательно ([1]), в случае $N > 1$ обращается в постоянную $\varphi(N)$. Таким образом, равенство

$$\varphi(N, qx) = \varphi(N) \qquad (8\ \mathrm{bis})$$

имеет место при любом $N > 1$, а также при $N = 1$, полагая $\varphi(1) = \lim_{N\to 1} \varphi(N)$, но подставляя в функцию $\varphi(N, qx)$ $N = 1$, $qx = 0$, находим $\varphi(1, 0) = \varphi(1) = 1$.

Остается вычислить значение постоянной $\varphi(N)$ при любом $N > 1$, Пусть $N = \frac{A}{B}$ — рациональная дробь, где $A \geqslant B \geqslant 1$; тогда

$$\varphi\left(\frac{A}{B}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(z - \frac{kB}{A}\pi\right)}{\left(z - \frac{kB}{A}\pi\right)^2},$$

$$\varphi(A) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(y - \frac{k\pi}{A}\right)}{\left(y - \frac{k\pi}{A}\right)^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(y - \frac{kB}{A}\pi\right)}{\left(y - \frac{kB}{A}\pi\right)^2} +$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(y - \frac{\pi}{A} - \frac{kB}{A}\pi\right)}{\left(y - \frac{\pi}{A} - \frac{kB}{A}\pi\right)^2} + \cdots + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\left(y - \frac{B-1}{A}\pi - \frac{kB}{A}\pi\right)}{\left(y - \frac{B-1}{A}\pi - \frac{kB}{A}\pi\right)^2}.$$

Принимая во внимание, что каждая из B сумм, стоящих в правой части равенства, равна $\varphi\left(\frac{A}{B}\right)$, получаем таким образом $\varphi(A) = B\varphi\left(\frac{A}{B}\right)$ и, в частности, $\varphi(A) = A\varphi(1)$; следовательно,

$$\varphi(N) = \varphi\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{\varphi(A)}{B} = \frac{A}{B}\varphi(1) = N\varphi(1) = N,$$

и, вследствие непрерывности, это равенство, соответствующее (8), справедливо для любого $N \geqslant 1$.

Из (8) легко получить простую верхнюю границу для $|G_{p_1+q}(x)|$, данного формулой (7) при условии $|f(a_k)| \leqslant M$:

$$|G_{p_1+q}(x)| \leqslant M \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 p_1 (x-a_k)}{p_1^2 (x-a_k)^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 q (x-a_k)}{q^2 (x-a_k)^2}} = M \sqrt{N}. \qquad (9)$$

Формула (7), очевидно, сходится абсолютно и равномерно при более общем условии:

$$\frac{|f(a_k)|}{|a_k|^m + 1} \leqslant M \quad (m < 1).$$

Но в случае еще более быстрого роста $f(a_k)$ формулу (7) следует заменить другой аналогичной формулой. Для этого заметим, что при помощи того же рассуждения тождество (8) обобщается следующим образом:

Если целая функция $H(x)$ степени $2m$ такова, что ряд

$$\varphi(x, N) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(x - \frac{k\pi}{N}\right) \qquad (10)$$

абсолютно сходится, равномерно при $m \leqslant N \leqslant N_0 < \infty$, то

$$\varphi(x, N) = CN \quad (-\infty < x < \infty;\ m \leqslant N), \qquad (11)$$

где

$$C = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{k\pi}{N}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(x)\, dx$$

— постоянная. Таким образом, в частности, для всякого целого $s > 0$ формула (7) принимает вид

$$G_{p_1+sq}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin p_1\left(x - \frac{k\pi}{p_1}\right) \sin^s q\left(x - \frac{k\pi}{p_1}\right)}{p_1 q^s \left(x - \frac{k\pi}{p_1}\right)^{s+1}} f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right) \quad \left(\frac{p_1}{q} = N \geqslant s\right), \qquad (12)$$

где $G_{p_1+sq}(x)$ степени $\leqslant p_1 + sq \leqslant 2p_1$ абсолютно сходится при $\dfrac{\left|f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right|}{|k|^m + 1} \leqslant M$, если $m < s$, а в случае $\left|f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right| \leqslant M$

$$|G_{p_1+sq}(x)| \leqslant M \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^{2s} q\left(x - \frac{k\pi}{p_1}\right)}{q^{2s}\left(x - \frac{k\pi}{p_1}\right)^{2s}}} = M \sqrt{c_s N}, \qquad (9\text{bis})$$

где

$$c_s = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{2s} dx.$$

§ 4. ТЕОРЕМА 3.* *Если* $G_p(x)$ *есть функция степени* $p \leqslant p_2 - q$, *принимающая в точках* $a_k = \frac{k\pi}{p_1}$ *ограниченные значения* ($|G_p(a_k)| = |f(a_k)| \leqslant M$, *а также в более общем случае, когда для некоторого* $m < 1$ $\frac{|G_p(a_k)|}{|a_k|^m + 1} \leqslant M$), *то* $G_p(x)$ *выражается формулой*

$$G_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin p_1 (x - a_k) \sin q (x - a_k)}{p_1 q (x - a_k)^2} G_p(a_k) \tag{13}$$

(т. е. интерполяционная формула (7), дающая приближенное выражение произвольной функции $f(x)$ посредством целой функции $G_{p_1+q}(x)$ степени $\leqslant p_1 + q$, которая совпадает с $f(a)$ в узлах a_k и тождественна с $f(x)$, если $f(x)$ — целая функция степени $p \leqslant p_1 - q$; в частности, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin p_1 (x - a_k) \sin q (x - a_k)}{p_1 q (x - a_k)^2} = 1$).

Действительно, рассмотрим функцию двух переменных (x, y)

$$F(x, y) = G_p(x) \frac{\sin q (y - x)}{q (y - x)}$$

степени $p + q \leqslant p_1$ относительно x, которая при всяком фиксированном y, очевидно, удовлетворяет условию

$$\lim_{\pm x = \infty} x^{\alpha} F(x, y) = 0$$

при $0 < \alpha < 1 - m$. Этого достаточно для того, чтобы, согласно формуле (2) моей заметки ([3]),

$$F(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin p_1 (x - a_k) \sin q (y - a_k)}{p_1 q (x - a_k)(y - a_k)} G_p(a_k); \tag{14}$$

вследствие равномерной сходимости (14), во всякой ограниченной области переменной x, не содержащей a_k, переходя к пределу при $y \to x$, получаем

$$G_p(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin p_1 (x - a_k) \sin q (x - a_k)}{p_1 q (x - a_k)^2} G_p(a_k). \tag{13}$$

---

* Эта теорема распространяется аналогичным образом на интерполяционную формулу (12), а также на всякую формулу

$$G_{p_1+q}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin p_1 (x - a_k)}{p_1 (x - a_k)} H_q(x - a_k) f(a_k),$$

где $H_q(x)$ — любая целая функция степени $q \leqslant p_1$, подчиненная условию $H_q(0) = 1$ (в случае ее абсолютной сходимости).

ЛЕММА 3. *Если* $G_{p_1+q}(x)$ *представлена выражением* (7), *где* $\frac{p_1}{q}=N>1$ — *целое число, и* $\left|G_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right|\leqslant 1$, *то*

$$|G_{p_1+q}(x)|\leqslant L_N=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2N}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2N}}+\cdots+\frac{1}{\sin\frac{2N-1}{2N}\pi}\right]\quad(-\infty<x<\infty), \tag{15}$$

причем значение L_N *достигается при* $qx=-\frac{\pi}{2N}$, *когда*

$$G_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=(-1)^{k+\lambda},\qquad \lambda=\left[\frac{k}{N}\right].$$

Действительно, в каждой точке x

$$|G_{p_1+q}(x)|\leqslant|\sin p_1x|\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\left|\sin q\left(x-\frac{k\pi}{p_1}\right)\right|}{Nq^2\left(x-\frac{k\pi}{p_1}\right)^2}. \tag{16}$$

Положим $k=\lambda N+\rho$ (λ, $0\leqslant\rho<N$ — целые числа) и применим (7), полагая

$$G_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=(-1)^{k+\lambda}.$$

Тогда

$$G_{p_1+q}(x)=\frac{1}{N}\sin p_1x\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{(-1)^\lambda\sin\left(qx-\lambda\pi-\frac{\rho}{N}\pi\right)}{\left(qx-\lambda\pi-\frac{\rho}{N}\pi\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{N}\sin p_1x\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{\sin\left(qx-\frac{\rho\pi}{N}\right)}{\left(qx-\frac{\rho\pi}{N}-\lambda\pi\right)^2}=$$

$$=\frac{\sin p_1x}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\sin\left(qx-\frac{\rho\pi}{N}\right)\sum_{\lambda=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(qx-\frac{\rho\pi}{N}-\lambda\pi\right)^2}=$$

$$=\frac{\sin p_1x}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\left(qx-\frac{\rho\pi}{N}\right)}, \tag{17}$$

т. е., полагая $qx=z$,

$$G_{p_1+q}(x)=G_{p_1+q}\left(\frac{z}{q}\right)=\frac{\sin Nz}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\left(z-\frac{\rho\pi}{N}\right)}. \tag{18}$$

Сопоставляя (16) и (17), мы видим, что наибольшие значения $|G_{p_1+q}(x)|$ осуществляются построенной нами функцией (18) в точках x, где $\sin\left(qx-\frac{\rho\pi}{N}\right)$ имеет одинаковые знаки при $\rho=0,1,\ldots,N-1$, т. е. когда $h\pi-\frac{\pi}{N}\leqslant z\leqslant h\pi$ (h — любое целое число); тригонометрический по-

лином $G_{p_1+q}\left(\frac{z}{q}\right)$ порядка $N-1$ имеет период π при N *нечетном* и, принимая значение $1=(-1)^{N-1}$ в точках $\frac{N-1}{N}\pi$ и π, достигает абсолютного максимума L_N (со знаком $+$) в середине $\pi\left(1-\frac{1}{2N}\right)$ этого промежутка*; в случае N *четного* $G_{p_1+q}\left(\frac{z}{q}\right)$ имеет период 2π и достигает абсолютного минимума $-L_N$ в точке $\pi\left(1-\frac{1}{2N}\right)$ и максимума $+L_N$ в точке $-\frac{\pi}{2N}$. Таким образом, функция $G_{p_1+q}(x)$, осуществляющая абсолютный максимум L_N при любом целом N, оказывается функцией степени $p=p_1-q$; отсюда следует

ТЕОРЕМА 4. *Если функция $G_p(x)$ степени $p\leqslant p_1\left(1-\frac{1}{N}\right)=\frac{p_1}{\mu}$ удовлетворяет неравенствам $|G_p(a_k)|\leqslant 1$ во всех точках бесконечной последовательности $a_k\ (-\infty<k<\infty)$, где $a_{k+1}-a_k=\frac{\pi}{\mu}$, то*

$$|G_p(x)|\leqslant L_N=g_\mu \quad (-\infty<x<\infty;\ N>1). \tag{15 bis}$$

Кроме того, имеет место

ТЕОРЕМА 5. *Какова бы ни была функция $G_{p_1+q}(x)$ степени $\leqslant p_1+q=p_1\left(1+\frac{1}{N}\right)$, принимающая в точках $a_k=\frac{k\pi}{p_1}$ значения*

$$G_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=(-1)^\lambda \text{ при } k \text{ четном}$$

и

$$G_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=(-1)^{\lambda+1} \text{ при } k \text{ нечетном},$$

*где $\lambda=\left[\frac{k}{N}\right]$, найдутся точки $x\ (-\infty<x<\infty)$, где***

$$|G_{p_1+q}(x)|\geqslant L_N-\frac{1}{N\sin\frac{\pi}{2N}} \quad (N>1 - \text{целое}).$$

Действительно, если $G_{p_1+q}(x)$ дана интерполяционной формулой (7), т. е. формулой (17), то

$$G_{p_1+q}\left(\frac{2\lambda N-1}{2p_1}\pi\right)=\pm L_N \quad (\lambda - \text{целые}^{***}).$$

Самая общая ограниченная функция степени p_1+q, принимающая те же значения в точках $a_k=\frac{k\pi}{p_1}$, равна

$$G^*_{p_1+q}(x)=G_{p_1+q}(x)+\sin p_1x\cdot A_q(x),$$

где $A_q(x)$ — ограниченная функция степени $\leqslant q$.

---

* При N четном $(-1)^\rho=(-1)^{k-\lambda N}=(-1)^k$; при N нечетном $(-1)^\rho=(-1)^{k-\lambda}$.

** $L_2=\sqrt{2}$, $L_3=\frac{5}{3}$, $L_4=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $L_5=\frac{4\sqrt{5}+1}{5}$,

$$L_6=\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2},\ \ldots,\ L_N\sim\frac{2}{\pi}\log N.$$

*** В случае $N=\frac{p_1}{q}$ нечетного всегда $+$, в случае N четного — со знаком $(-1)^\lambda$.

Но если $|G^*_{p_1+q}(x)| \leqslant M$, то при всяком m

$$\left|\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} G^*_{p_1+q}\left(x+\frac{2k\pi}{q}\right)\right| = G_{p_1+q}(x) + \frac{\sin p_1 x}{m+1}\sum_{k=0}^{m} A_q\left(x+\frac{2k\pi}{q}\right) \leqslant M.$$

Таким образом, полагая $m\to\infty$, мы превращаем $A_q(x)$ в периодическую функцию с периодом $\frac{2\pi}{q}$ (не повышая $\sup|G^*_{p_1+q}(x)|$), т. е.

$$A_q(x) = a_0 + a_1\cos qx + b_1 \sin qx,$$

и наименее уклоняющаяся от нуля функция $G^*_{p_1+q}(x)$ представляется $(qx = z)$ в виде

$$G^*_{p_1+q}(x) = G^*_{p_1+q}\left(\frac{z}{q}\right) = \frac{\sin Nz}{N}\left[\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\left(z-\frac{\rho\pi}{N}\right)} + a_0 + a_1\cos z + b_1 \sin z\right]. \tag{19}$$

Полагая $z = y + \frac{N-1}{2N}\pi$, имеем

$$\frac{\sin Nz}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\left(z-\frac{\rho\pi}{N}\right)} = (-1)^s\frac{\sin Ny}{N}\sum_{k=-s}^{s}\frac{1}{\sin\left(y+\frac{k\pi}{N}\right)} \tag{20}$$

при $N = 2s+1$ нечетном и

$$\frac{\sin Nz}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\left(z-\frac{\rho\pi}{N}\right)} = (-1)^{s+1}\frac{\cos Ny}{N}\sum_{k=-s+1}^{s}\frac{1}{\sin\left(y+\frac{2k-1}{2N}\pi\right)} \tag{21}$$

при $N = 2s$ четном. В обоих случаях функция под знаком $\sum$ нечетная по y, поэтому должна быть нечетной и функция

$$a_0 + a_1\cos\left(y+\frac{N-1}{2N}\pi\right) + b_1\sin\left(y+\frac{N-1}{N}\pi\right) = b\sin y.$$

Следовательно, наименьшее значение $M = \sup|G^*_{p_1+q}(x)|$ получим, выбирая b так, чтобы при $N = 2s+1$ уклонение $\left(x = \frac{\frac{\pi}{2}+y}{q} - \frac{\pi}{2p_1}\right)$

$$G^*_{p_1+q}(x) = (-1)^s\frac{\sin Ny}{N}\left[\sum_{k=-s}^{s}\frac{1}{\sin\left(y+\frac{k\pi}{N}\right)} + b\sin y\right], \tag{22}$$

а при $N = 2s$ уклонение

$$G^*_{p_1+q}(x) = (-1)^{s+1}\frac{\cos Ny}{N}\left[\sum_{k=-s+1}^{s}\frac{1}{\sin\left(y+\frac{2k-1}{2N}\pi\right)} + b\sin y\right] \tag{23}$$

было наименьшим.

Функции (20) и (21) принимают в точках $y = \frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{N}$ абсолютные значения

$$L_N = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\frac{2k+1}{2N}}, \quad M_N = L_N - 2\sin\frac{\pi}{2N} \geqslant 0$$

($M_N > 0$ при $N > 2$) с *противоположными* знаками. Поэтому

$$\left|G^*_{p_1+q}\left(\frac{\pi}{q}\left(1-\frac{1}{2N}\right)\right)\right| = L_N + \frac{b}{N}, \quad \left|G^*_{p_1+q}\left(\frac{\pi}{q}\left(1+\frac{1}{2N}\right)\right)\right| = M_N + \frac{b}{N}\cos\frac{\pi}{N}$$

и для того, чтобы $|G^*(x)|$ в этих двух точках был наименьшим, нужно определить b по условию

$$\frac{b}{N}\left(1-\cos\frac{\pi}{N}\right) = M_N - L_N.$$

Следовательно, $\frac{b}{N} = -\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2N}}$ и, тем более,

$$M = \sup|G^*_{p_1+q}(x)| \geqslant L_N - \frac{1}{N\sin\frac{\pi}{2N}}. \tag{24}$$

Примечание. Неравенство (24) тем точнее, чем больше N. Только при $N > 3$ оно дает нижнюю границу > 1 для M, между тем как, очевидно, $M \geqslant 1$, так как, по условию, $\left|G_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right| = 1$. Таким образом, из неравенства (24) видно, что $M = 1$ невозможно при $N > 3$. Легко проверить непосредственным построением, что $M = 1$ при $N = 2$ и при $N = 3$.

Для упрощения письма мы можем положить $q = 1$, $p_1 = N$. В случае $N = 3$ тригонометрический полином (22) 4-го порядка $G^*_4(x)$ имеет вид $\left(G_4(0) = G_4\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -1,\ G_4\left(\frac{\pi}{3}\right) = G_4(\pi) = 1\right)$

$$G^*_4(x) = G^*_4\left(y+\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sin 3y}{3}\left[\frac{1}{\sin y} + \frac{1}{\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{\sin\left(y-\frac{\pi}{3}\right)} + b\sin y\right];$$

полагая $b = -\frac{8}{3}$ для того, чтобы производные $G^{*\prime}_4\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$, получаем

$$G^*_4\left(y+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{4}{9}(2\cos 2y + \cos 4y), \quad |G^*_4(y)| \leqslant 1. \tag{25}$$

Аналогично, для $N = 2$ (23)

$$G^*_3(x) = G^*_3\left(y+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}[3\sin y + \sin 3y], \quad |G^*_3(y)| \leqslant 1. \tag{26}$$

Таким образом, тригонометрический полином 2-го порядка

$$S_2(x) = \frac{1}{9}[3 - 8\cos x - 4\cos 2x] \tag{25 bis}$$

достигает абсолютного экстремума 1 в точках: $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, (2\pi)$ с последовательными знаками $-, +, -, (-)$ $\left(\text{в точке } \frac{5\pi}{3} \text{ есть относительный максимум } \frac{7}{9}\right)$, а

$$S_3(x) = \frac{1}{4}[3(\sin x - \cos x) - (\sin 3x + \cos 3x)] \tag{26 bis}$$

достигает экстремума 1 в точках: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, (2\pi)$ с последователь-

ными знаками: $-,+,+,-,(-)$ $\Big($в точках $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{7\pi}{4}$ имеются соответственно относительные минимум $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и максимум $-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$.

§ 5. ТЕОРЕМА 6. *Какова бы ни была функция $f(x)$, заданная своими значениями $f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)$ $(k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, погрешность*

$$\rho_{p_1+q}(f(x)) = \sup |f(x) - G_{p_1+q}(x)|$$

при ее приближении интерполяционной функцией $G_{p_1+q}(x)$ степени $\leqslant p_1+q$, определяемой формулой (7), *удовлетворяет* (*в случае сходимости**) *неравенству*

$$\rho_{p_1+q}(f(x)) \leqslant (L_N+1)\, A_{p_1-q} f(x), \tag{27}$$

где $N=\left[\frac{p_1}{q}\right]$ и $A_p f(x)$ означает наилучшее приближение $f(x)$ при помощи функций степени p.

В самом деле, пусть

$$|f(x) - \overline{G}_{p_1-q}(x)| \leqslant A_{p_1-q} f(x),$$

так что, в частности,

$$\left|f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right) - \overline{G}_{p_1-q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right| \leqslant A_{p_1-q} f(x).$$

Тогда, вследствие теоремы 3 и леммы 3,

$$\begin{aligned} |f(x) - G_{p_1+q}(x)| &\leqslant |f(x) - \overline{G}_{p_1-q}(x)| + |\overline{G}_{p_1-q}(x) - G_{p_1+q}(x)| \leqslant \\ &\leqslant A_{p_1-q} f(x) + L_N \sup_{-\infty<k<\infty} \left|\overline{G}_{p_1-q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right) - G_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right| = \\ &= A_{p_1-q} f(x) + L_N \sup_{-\infty<k<\infty} \left|\overline{G}_{p_1-q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right) - f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right| \leqslant \\ &\leqslant [L_N+1]\, A_{p_1-q} f(x). \end{aligned} \tag{27 bis}$$

Следствие 3. *Существуют функции $f(x)$, для которых в* (27) *имеет место равенство.*

Действительно, полагая для определенности N нечетным и $q=1$ $(p_1=N)$, построим периодическую функцию $f(x)$, принимающую значения $f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=0$, для которой наименее уклоняющейся функцией степени $N-1$ является

$$\overline{G}_{N-1}(x) = \frac{\sin Nx}{N} \sum_{\rho=0}^{N-1} \frac{1}{\sin\left(x - \frac{\rho\pi}{N}\right)},$$

---

* Для абсолютной сходимости (7) достаточно, чтобы существовало такое число $\alpha > 1$, что $\left|f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right| < \frac{M[|k|+1]}{[\log|k|+2]^\alpha}$. В случае более быстрого алгебраического возрастания $\left|f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right|$ формулу (7) следует заменить формулой (12). Соответствующая функция $H_q(x)$ в интерполяционной формуле, указанной в сноске на стр. 427, может быть подобрана также и в том случае, когда $f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)$ растет не быстрее функции нулевого рода.

так что $A_{N-1}f(x)=1$; для этого достаточно, чтобы $|f(x)-\overline{G}_{N-1}(x)|\leqslant 1$ и, например, внутри промежутка $\left(\frac{N-1}{N}\pi,\ \pi\right)$ была точка $\xi\geqslant\frac{2N-1}{2N}\pi$, где $f(\xi)=\overline{G}_{N-1}(\xi)-1$, так как тогда в последовательности $2N$ точек $\left(\frac{\pi}{N},\ldots,\frac{N-1}{N}\pi,\xi,\pi,\ldots,2\pi\right)$ периода 2π разность $f(x)-\overline{G}_{N-1}(x)$ достигает ± 1 с последовательно противоположными знаками. Если мы положим еще

$$f\left(\frac{2N-1}{2N}\pi\right)=\overline{G}_{N-1}\left(\frac{2N-1}{2N}\pi\right)+1=L_N+1,$$

то в этой точке все неравенства в (27 bis) превращаются в равенство, так как $G_{N+1}(x)=0$ $\left(\text{вследствие } f(a_k)=0,\ a_k=\frac{k\pi}{p_1}=\frac{k\pi}{N}\right)$.

Следствие 4. *Если рост значений* $f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)$ *при* $\pm k\to\infty$ *произволен (так что формула* (7) *и ее обобщения неприменимы), все же существуют интерполяционные функции* $G^*_{p_1+q}(x)$ *степени* p_1+q, *удовлетворающие условиям*

$$G^*_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right),$$

для которых неравенство (27) *остается в силе (таким образом,* $\rho_{p_1+q}f(x)=\infty$ *лишь тогда, когда* $A_{p_1-q}f(x)=\infty$).

Действительно, определим по формуле (7) функцию $F_{p_1+q}(x)$ степени p_1+q, принимающую в точках $\frac{k\pi}{p_1}$ значения

$$F_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)-\overline{G}_{p_1-q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right),$$

где $\overline{G}_{p_1-q}(x)$ — функция степени p_1-q, наименее уклоняющаяся от $f(x)$. Тогда, полагая

$$G^*_{p_1+q}(x)=F_{p_1+q}(x)+\overline{G}_{p_1-q}(x),$$

имеем

$$G^*_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right),$$

и приведенное выше рассуждение полностью применимо к $f(x)-G^*_{p_1+q}(x)$.

§ 6. Из формулы

$$G_{2p_1}(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 p_1\left(x-\frac{k\pi}{p_1}\right)}{p_1^2\left(x-\frac{k\pi}{p_1}\right)^2}f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right), \tag{28}$$

которая соответствует $N=1$ (т. е. $q=p_1$ в (7)), видно, что *в этом случае из* $\left|f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right|\leqslant 1$ *следует* $|G_{2p_1}(x)|\leqslant 1$ $(-\infty<x<\infty)$. *

---

* Функция $G_{2p_1}(x)$ степени $2p_1$ определяется однозначно дополнительным условием: $G'_{2p_1}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=0$.

Примечание на стр. 431 может навести на предположение о существовании при любых значениях $f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\left(\left|f\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)\right|\leqslant 1\right)$ таких интерполяционных функций $G_{\frac{3p_1}{2}}(x)\,(N=2)$ (и даже $G_{\frac{4p_1}{3}}(x)$ степени $\frac{4p_1}{3}$ $(N=3)$), что $|G_{\frac{3p_1}{2}}(x)|\leqslant 1$ и $|G_{\frac{4p_1}{3}}(x)|\leqslant 1$. Однако нетрудно показать, что это неверно. А именно, имеет место следующая

ЛЕММА 4. *Если* $\frac{p_1}{q}=N>1$, $G_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=\varepsilon_k$ *и* $\varepsilon_k=\varepsilon_i$, $i\equiv k$ $(\operatorname{mod} 2p_1)$, *причем* $|\varepsilon_k|=1$, *то существуют такие чередования знака* ε_k, *для которых все функции* $G_{p_1+q}(x)$ *степени* p_1+q *таковы, что*

$$\sup_{-\infty<x<\infty}|G_{p_1+q}(x)|>1.$$

Действительно, по предположению, можно указать такое целое число n, что $N>\frac{n}{n-1}$. Применяя замечание, сделанное при доказательстве теоремы 5, мы видим, что из существования функции $G_{p_1+q}(x)$ степени p_1+q, для которой $\sup|G_{p_1+q}(x)|\leqslant 1$, вытекало бы, что тем же свойством обладает и периодическая функция $S_{p_1+q}(x)$, принимающая те же значения $S_{p_1+q}\left(\frac{k\pi}{p_1}\right)=\varepsilon_k$ с периодом 2π; достаточно поэтому показать, что существуют $\varepsilon_k=\pm 1$, для которых невозможен тригонометрический полином $S_{n+q}(x)$ $(q<n-1)$ порядка $n+q$, достигающий абсолютного максимума 1 в $2n$ точках $\frac{k\pi}{n}$ $(k=0, 1, \ldots, 2n-1)$. Но из этого требования следует, что производная $S'_{n+q}(x)=0$ при $x=\frac{k\pi}{n}$, так что

$$S'_{n+q}(x)=\sin nx\cdot T_q(x)=$$

$$=a\sin nx+\sum_{k=1}^{q}b_k\left[\sin\left(\overline{n+k}\cdot x+\varphi_k\right)+\sin\left(\overline{n-k}\cdot x-\varphi_k\right)\right],$$

где $T_q(x)$ — тригонометрический полином порядка q и a, b, φ_k — некоторые постоянные.

Интегрируя, находим

$$S_{n+q}(x)=C-\frac{a}{n}\cos nx-\sum_{k=1}^{b}b_k\left[\frac{\cos\left(\overline{n+k}\cdot x+\varphi_k\right)}{n+k}+\frac{\cos\left(\overline{n-k}\cdot x-\varphi_k\right)}{n-k}\right].$$

Требуя, чтобы $S_{n+q}\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\varepsilon_k$, мы получим $2n$ линейных уравнений с $2(q+1)$ неизвестными (a, b_k, c), которые не могут быть совместны при

всевозможных значениях $\varepsilon_k = \pm 1$, если $q < n - 1$ *, что и требовалось доказать.

Значения $L_N = g_\mu = \sup |G_p(x)|$, полученные выше при условии, что $\left|G_p\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right)\right| \leqslant 1$, где $\mu = \frac{N}{N-1} > 1$, были связаны с предположением, что $G_p(x)$ — *вещественная* функция. Предположим теперь, что

$$G_p^*(x) = s_p(x) + i t_p(x)$$

— любая *комплексная* функция степени p, и обозначим

$$g_\mu^* = \sup_{-\infty < x < \infty} |G_p^*(x)|,$$

полагая, что $\left|G_\mu^*\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right)\right| \leqslant 1$. В таком случае имеем также $\left|s_p\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right)\right| \leqslant 1$ и $\left|t_p\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right)\right| \leqslant 1$, откуда $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |s_p(x)| \leqslant g_\mu$ и $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} |t_p(x)| \leqslant g_\mu$. Следовательно, во всяком случае имеем неравенство $\left(g_\mu^* = L_N^*,\ \mu = \frac{N}{N-1}\right)$

$$g_\mu \leqslant g_\mu^* \leqslant g_\mu \sqrt{2}, \tag{29}$$

на уточнении которого мы здесь останавливаться не будем, но обратим лишь внимание на вытекающее отсюда принципиально важное следствие для *вещественных неотрицательных* функций $G_p(x) \geqslant 0$, удовлетворяющих условию

$$|G_p(x)| \leqslant H(x), \tag{$\mathfrak{B}$}$$

где $H(x)$ — целая функция *нулевого* рода.

Как показано в моей заметке ([4]), при соблюдении условия ($\mathfrak{B}$) функция $G_p(x) \geqslant 0$ степени p допускает представление **

---

* В случае $q = n - 1$ соответствующие уравнения всегда совместны и приводят к известной формуле Jackson'а, которая соответствует (28) при замене x на $\frac{p_1 x}{n}$ и $n \to \infty$.

** В упомянутой заметке ([4]) на $H(x)$ было наложено дополнительное ограничение, что $H(x)$ — четная функция с неотрицательными коэффициентами. Однако это ограничение не является существенным, так как если существует какая-нибудь функция нулевого рода $H(x) \geqslant 0$ такая, что $|G_p(x)| \leqslant H(x)$, то всегда найдется такая функция $H_0(x)$ нулевого рода, удовлетворяющая вышеуказанным дополнительным условиям, что $H(x) \leqslant H_0(x)$ при всех x $(-\infty < x < \infty)$. Действительно, во-первых, вместо $H(x)$ можем взять

$$H_1(x) = H(x) + 1 \geqslant 1 \qquad (H_1(x) \geqslant H(x)).$$

В таком случае четная функция нулевого рода

$$H_1(x) \cdot H_1(-x) \geqslant H_1(x) \geqslant H(x).$$

Но $(c \geqslant 1)$

$$H_1(x) \cdot H_1(-x) = c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a_n^2}\right).$$

Поэтому четная функция нулевого рода с неотрицательными коэффициентами

$$H_0(x) = c \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{|a_n|^2}\right) \geqslant H(x).$$

Таким образом, при исследовании свойств функций, удовлетворяющих условию ($\mathfrak{B}$), которому посвящено нижеследующее Добавление, мы могли бы в случае надобности,

$$G_p(x) = s^2_{\frac{p}{2}}(x) + t^2_{\frac{p}{2}}(x) = | s_{\frac{p}{2}}(x) + i t_{\frac{p}{2}}(x) |^2, \tag{30}$$

где $s_{\frac{p}{2}}(x)$ и $t_{\frac{p}{2}}(x)$ — целые функции степени $\frac{p}{2}$.

ТЕОРЕМА 7. *Если* $G_{2p}(x) \geqslant 0$ *степени* $2p$ *удовлетворяет* $(\mathfrak{B})$ *и* $G_{2p}\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right) \leqslant 1$, *то при всех* x

$$G_{2p}(x) \leqslant 2g^2_\mu - 2L^2_N \quad \left(\mu = \frac{N}{N-1} > 1\right). \tag{31}$$

Действительно, из $s^2_p\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right) + t^2_p\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right) \leqslant 1$ следует

$$\left| s_p\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right)\right| \leqslant 1, \quad t_p\left(\frac{k\pi}{\mu p}\right)\Big| \leqslant 1,$$

откуда, в силу (29),

$$| s_p(x) + i t_p(x) | \leqslant g_\mu \sqrt{2}$$

и, следовательно,

$$| G_{2p}(x) | \leqslant 2g^2_\mu \quad (-\infty < x < \infty).$$

Таким образом, рост функции $G_{2p}(x) \in (\mathfrak{B})$ в случае ограниченности ее роста снизу оказывается *ограниченным и сверху* при решетке из тех же равноотстоящих узлов, когда степень ее *вдвое* выше ($2p$ вместо p).

Вопрос о достижимости правой части неравенства (31) в общем случае мы рассматривать не будем, отметим лишь случай, когда $\mu = 2$. В этом случае, как было показано, $L_2 = g_2 = \sqrt{2}$ и, следовательно, согласно теореме 6, при $G_{2p}\left(\frac{k\pi}{2p}\right) \leqslant 1$ $(G_{2p}(x) \geqslant 0)$ неравенство (31) дает $G_{2p}(x) \leqslant 4$ (или, что то же самое, если $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ степени p $(G_p(x) \geqslant 0)$ и $G_p\left(\frac{k\pi}{p}\right) \leqslant 1$, то $G_p(x) \leqslant 4$). Можно показать, что точная верхняя граница в данном случае равна 2, т. е. еще вдвое меньше, и достигается функцией $G_p(x) = 1 + \sin px$, между тем при тех же условиях, но без ограничения $G_p(x) \geqslant 0$, никакой верхней границы не существует.

§ 7. Отмеченное только что свойство функций $G_p(x) \geqslant 0$ тесно связано со свойством «интерференции» любых функций конечной степени, подчиненных условию $\lim\limits_{\pm x = \infty} \frac{G_p(x)}{x} = 0$.

ЛЕММА «ИНТЕРФЕРЕНЦИИ». *Если* $\frac{G_p(x)}{x} \to 0$ *при* $x = \pm\infty$ *и* $\left| G_p\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right| \leqslant 1$ *при всех целых* $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *то при любом* x $(-\infty < x < \infty)$

$$\frac{1}{2}\left| G_p\left(x + \frac{\pi}{2p}\right) + G_p\left(x - \frac{\pi}{2p}\right)\right| \leqslant \frac{4}{\pi}; \tag{32}$$

как это сделано в упомянутой заметке, ввести без ущерба для общности выводов даже более специальное предположение, что в с е к о р н и $H(x)$ л е ж а т н а м н и м о й о с и. Кроме того, нетрудно видеть, что условие $(\mathfrak{B})$ равноценно условию

$$| G_p(x) | \leqslant \sqrt{H(x)} = | s(x) + it(x) |,$$

где $s(x) + it(x)$ — любая четная комплексная целая функция нулевого рода.

при этом знак равенства осуществляется для

$$G_p(x) = S_p(x) = \frac{2\sin px}{px} - \cos px \tag{33}$$

$$\left(S_p\left(\frac{k\pi}{p}\right) = (-1)^{k+1} \quad \textit{при} \quad k \geqslant 0, \quad S_p(0) = 1\right),$$

$$\frac{1}{2}\left[S_p\left(x + \frac{\pi}{2p}\right) + S_p\left(x - \frac{\pi}{2p}\right)\right] = \frac{\pi\cos px}{\frac{\pi^2}{4} - p^2x^2} \tag{34}$$

достигает верхней грани $\frac{4}{\pi}$ *при* $x = 0$.

Действительно, мы знаем (³), что благодаря условию $\lim\limits_{\pm x=\infty} \frac{G_p(x)}{x} = 0$,

$$G_p(x) = G_p(0)\frac{\sin px}{px} + \sin px \sum_{k=\pm 1}^{\infty}{}' (-1)^k \left[\frac{1}{px - k\pi} + \frac{1}{k\pi}\right] G_p\left(\frac{k\pi}{p}\right) + \\ + G_p'(0)\frac{\sin px}{p},$$

где $\sum\limits_{k=\pm 1}^{\infty}{}'$ распространяется на все целые $k \gtrless 0$. В таком случае

$\left(G_p\left(\frac{k\pi}{p}\right) = A_k, \quad \frac{1}{p} G_p'(0) = B\right)$

$$G_p\left(x + \frac{\pi}{2p}\right) = \\ = \frac{A_0 \cos px}{px + \frac{\pi}{2}} + \cos px \sum_{k=\pm 1}^{\infty}{}' (-1)^k A_k \left[\frac{1}{px - k\pi + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k\pi}\right] + B\cos px,$$

$$G_p\left(x - \frac{\pi}{2p}\right) = \\ = -\frac{A_0 \cos px}{px - \frac{\pi}{2}} - \cos px \sum_{k=\pm 1}^{\infty}{}' (-1)^k A_k \left[\frac{1}{px - k\pi - \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{k\pi}\right] - B\cos px,$$

поэтому, складывая почленно и включая первое слагаемое в сумму $\sum$, имеем

$$G_p\left(x + \frac{\pi}{2p}\right) + G_p\left(x - \frac{\pi}{2p}\right) = \\ = \cos px \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k A_k \left[\frac{1}{px - \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{px - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}\right]. \tag{35}$$

Пусть $\left(k_0 - \frac{1}{2}\right)\pi < px_0 < \left(k_0 + \frac{1}{2}\right)\pi$, т. е. $px_0 = k_0\pi + \delta$, $|\delta| < \frac{\pi}{2}$; тогда

$$\left|G_p\left(x + \frac{\pi}{2p}\right) + G_p\left(x - \frac{\pi}{2p}\right)\right| \leqslant \\ \leqslant |\cos px_0| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |A_k| \left|\frac{1}{px_0 - \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{px_0 - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}\right| =$$

$$= |\cos px_0| \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0-1} |A_k| \left[\frac{1}{px_0 - \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{px_0 - \left(k-\frac{1}{2}\right)\pi} \right] + \right.$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} |A_k| \left[\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi - px_0} - \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - px_0} \right] +$$

$$\left. + |A_{k_0}| \left[\frac{1}{px_0 - \left(k_0-\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{\left(k_0+\frac{1}{2}\right)\pi - px_0} \right] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant |\cos px_0| \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0-1} \left[\frac{1}{px_0 - \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi} - \frac{1}{px_0 - \left(k-\frac{1}{2}\right)\pi} \right] + \right.$$

$$+ \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left[\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi - px_0} - \frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi - px_0} \right] +$$

$$\left. + \left[\frac{1}{px_0 - \left(k_0-\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{\left(k_0+\frac{1}{2}\right)\pi - px_0} \right] \right\} = |\cos px_0| \left\{ \frac{1}{px_0 - \left(k_0-\frac{1}{2}\right)\pi} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\left(k_0+\frac{1}{2}\right)\pi - px_0} + \left[\frac{1}{px_0 - \left(k_0-\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{1}{\left(k_0+\frac{1}{2}\right)\pi - px_0} \right] \right\} =$$

$$= |\cos px_0| \frac{2\pi}{\frac{\pi^2}{4} - (px_0 - k\pi)^2} = \frac{2\pi \cos \delta}{\frac{\pi^2}{4} - \delta^2},$$

причем знак равенства осуществим, когда $A_{k_0} = 1$ и $A_k = (-1)^{k-k_0+1}$ $(k \geq k_0)$. Утверждение леммы, таким образом, доказано * , так как максимум функции $\frac{2\pi \cos \delta}{\frac{\pi^2}{4} - \delta^2}$ достигается при $\delta = 0$.

Следствие 5. *При тех же условиях*

$$\left| G_p\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) - G_p(x) \right| < \frac{16}{\pi}.$$

Достаточно заметить, что

$$\left| G_p\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) - G_p(x) \right| = \left| \left(G_p\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + G_p\left(x + \frac{\pi}{p}\right)\right) - \left(G_p\left(x + \frac{\pi}{p}\right) + G_p(x) \right) \right| < \frac{8}{\pi} + \frac{8}{\pi} = \frac{16}{\pi}.$$

Применяя тот же прием, можно было бы получить точную верхнюю грань $\left| G_p\left(x + \frac{2\pi}{p}\right) - G_p(x) \right|$, которая во всяком случае $< \frac{16}{\pi}$.

Нетрудно видеть, что из леммы «интерференции» вытекает $\left(\text{при более узком условии } \frac{G_p(x)}{x} \to 0\right)$ отмеченное выше свойство *нестрица-*

* Для тригонометрических полиномов эта лемма была доказана в статье ([5]).

тельных функций $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$. Действительно, если $G_p(x) \geqslant 0$ и $G_p\left(\frac{k\pi}{p}\right) \leqslant 1$, то, применяя неравенство (32) к $2G_p(x)-1$, получим

$$G_p\left(x+\frac{\pi}{2p}\right)+G_p\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)-1 \leqslant \frac{4}{\pi},$$

откуда

$$G_p(x) \leqslant 1+\frac{4}{\pi} \quad (-\infty < x < \infty),$$

которое лучше неравенства (31), дающего 4 при $\mu=2$, но все же не дает вышеупомянутой точной грани 2.

ТЕОРЕМА 8. *Если значения* $f\left(\frac{k\pi}{p}\right)$ *произвольной функции* $f(x)$ *ограничены и* A_p — *ее наилучшее приближение при помощи функции степени* p, *то*

$$R_p = \sup \frac{1}{2}\left|f\left(x+\frac{\pi}{2p}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)-\left(G_p\left(x+\frac{\pi}{2p}\right)+G_p\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)\right)\right| \leqslant \left[1+\frac{4}{\pi}\right] A_p, \tag{36}$$

где

$$G_p(x) = f(0)\frac{\sin px}{px} + \sin px \sum_{k=\pm 1}^{\infty}{}' (-1)^k f\left(\frac{k\pi}{p}\right)\left[\frac{1}{px-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right]. \tag{37}$$

В самом деле, применяя (32) к $G_p(x)-\overline{G}_p(x)$, где функция $\overline{G}_p(x)$ степени p, наименее уклоняющаяся от $f(x)$, может быть представлена в виде

$$\overline{G}_p(x) = \overline{G}_p(0)\frac{\sin px}{px} + \sin px \sum_{k=\pm 1}^{\infty}{}' (-1)^k \overline{G}_p\left(\frac{k\pi}{p}\right)\left[\frac{1}{px-k\pi}+\frac{1}{k\pi}\right] + \overline{G}_p'(0)\frac{\sin px}{p},$$

получим

$$\frac{1}{2}\left|G_p\left(x+\frac{\pi}{2p}\right)-\overline{G}_p\left(x+\frac{\pi}{2p}\right)+G_p\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)-\overline{G}_p\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)\right| \leqslant \frac{4}{\pi}A_p$$

и, соединяя это неравенство с неравенством

$$\frac{1}{2}\left|f\left(x+\frac{\pi}{2p}\right)-\overline{G}_p\left(x+\frac{\pi}{2p}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)-\overline{G}_p\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)\right| \leqslant A_p,$$

находим требуемое.

Замечая, что

$$H_p(x) = \frac{1}{2}\left[G_p\left(x+\frac{\pi}{2p}\right)+G_p\left(x-\frac{\pi}{2p}\right)\right] = \frac{1}{2}\cos px \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f\left(\frac{k\pi}{p}\right)\left[\frac{1}{px-\left(k-\frac{1}{2}\right)\pi}-\frac{1}{px-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}\right], \tag{38}$$

мы видим, что *замена интерполяционной формулы* (37) *интерполяционной формулой* (38) *дает равномерное приближение на всей оси для*

всякой равномерно непрерывной функции $f(x)$: а именно, полагая

$$\omega_p = \frac{1}{2} \sup \left| f\left(x + \frac{\pi}{2p}\right) + f\left(x - \frac{\pi}{2p}\right) - 2f(x) \right| \quad (-\infty < x < \infty),$$

имеем, вследствие (36),

$$\rho_p = \sup |f(x) - H_p(x)| \leqslant R_p + \omega_p \leqslant \left(1 + \frac{4}{\pi}\right) A_p + \omega_p, \tag{39}$$

причем, в частности, очевидно,

$$\omega_p \leqslant \omega\left(f(x); \frac{\pi}{2p}\right) = \sup_{|h| \leqslant \frac{\pi}{2p}} |f(x+h) - f(x)| .$$

Не останавливаясь подробнее на неравенстве (39), отмечу лишь, что всегда $\rho_p = O(\omega_p)$ и что $\rho_p = O(A_p)$ (при $p \to \infty$), если $\frac{1}{p^m} = O(A_p)$ для некоторого $m < 2$.

Добавление

Приводимые ниже свойства функций $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ вытекают из общих теорем классической теории целых функций, но поскольку некоторые из них, повидимому, не были до сих пор формулированы, я счел полезным вывести нужные для данного исследования предложения.

ЛЕММА 1. *Если* $G_p(x)$ *есть вещественная целая функция степени* p (*т. е.* $\overline{\lim\limits_{|z|=\infty}} |z|^{-1} \log |G_p(z)| = p$), *удовлетворяющая условию*

$$|G_p(x)| \leqslant H(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{$\mathfrak{B}$}$$

где $H(x)$ — *какая-нибудь целая функция нулевого рода, то*

$$\overline{\lim_{r=\infty}}\, r^{-1} \log |G_p(re^{\pm i\varphi})| = p\,|\sin\varphi|. \tag{1}$$

(Иначе говоря, индикаторной диаграммой Полиа функции $G_p(x)$ является двойной отрезок мнимой оси $(-pi, +pi)$.)

Действительно, индикаторная диаграмма $G_p(z)$ приводится к двойному отрезку мнимой оси вследствие условия $(\mathfrak{B})$, из которого следует, что

$$\overline{\lim_{\pm x=\infty}}\, x^{-1} \log |G_p(x)| = 0.$$

И так как $G_p(z)$ — степени p, необходимо, чтобы наиболее удаленный от 0 конец этого отрезка был на расстоянии p. Принимая же во внимание вещественность $G_p(x)$ (при вещественном x), заключаем, что диаграммой служит отрезок $(-pi, pi)$, т. е. при всех φ имеет место (1).

Следствие 1. *Если* $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ — *любая комплексная функция степени* p, *удовлетворяющая* $(\mathfrak{B})$, *то всегда найдется (одно) вещественное число* α, *для которого степень* $G_p(x)\, e^{i\alpha x}$, *равная* $p_0 = p - |\alpha|$, *будет наименьшей.*

Действительно, индикаторной диаграммой $G_p(x)$ служит отрезок мнимой оси, длина которого $2p_0 \leqslant 2p$, причем наиболее удаленный от 0

из его концов находится на расстоянии p от 0; при умножении $G_p(x)$ на $e^{i\alpha x}$ диаграмма смещается на величину $-\alpha$, поэтому наименьшая возможная степень $G_p(x)e^{i\alpha x}$ есть p_0 и достигается она смещением отрезка вниз или вверх на величину $|\alpha| = p - p_0$, при котором середина отрезка окажется в 0.

Функцию $G_p(x)$ называем *канонической*, если отрезок, являющийся ее диаграммой, есть $(-ip, ip)$, в противном случае называем ее неканонической. В дальнейшем мы будем иметь дело с каноническими комплексными функциями, поэтому мы обычно будем опускать этот термин, особо отмечая, если встретятся случаи рассмотрения неканонических функций.

Следствие 2. *Всякая каноническая функция $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ конечной степени $p > 0$ имеет бесконечное множество корней a_n и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} = \infty$, в то время как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|^{1+\varepsilon}}$ сходится при любом $\varepsilon > 0$.*

Следствие 3. *Если $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ — степени p и $G_q(x) \in (\mathfrak{B})$ — степени q, то $G_p(x) \cdot G_q(x) = G_{p+q}(x)$ — степени $p+q$.*

ЛЕММА 2. *Если $G(x) = G_p(x) \cdot G_q(x)$, где $G_p(x)$ и $G_q(x)$ соответственно степени p и q, и угол $a = \varphi_1 - \varphi_0 < \pi$ между направлениями, где*

$$\overline{\lim_{|z|=\infty}} |z|^{-1} \log |G_p(z)| = p$$

и

$$\overline{\lim_{|z|=\infty}} |z|^{-1} \log |G_q(z)| = q,$$

то $G(x)$ есть функция степени h, где

$$p + q \geqslant h \geqslant \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos a}. \tag{2}$$

Действительно, неравенство

$$h = \overline{\lim_{|z|=\infty}} |z|^{-1} [\log |G_p(z)| + \log |G_q(z)|] \geqslant p\cos\psi + q\cos(a - \psi)$$

имеет место при любом ψ; обращая правую часть в максимум, получаем (2).

Следствие 4. *Если $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ — степени p и $G_q(x)$ — любая функция степени q, то $G(x) = G_p(x)\, G_q(x)$ есть функция степени $h \geqslant \sqrt{p^2 + q^2}$.*

Утверждение вытекает из (2), где $a \leqslant \frac{\pi}{2}$, так как

$$\overline{\lim_{y=\infty}} y^{-1} \log |G_p(\pm yi)| = p.$$

ЛЕММА 3. *Если a_n $(|a_n| \leqslant |a_{n+1}|)$ — корни целой функции $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ степени p, то $\overline{\lim_{n=\infty}} \frac{|a_n|}{n} = \overline{A} \geqslant \frac{\pi}{2p}$.*

Для доказательства воспользуемся формулой Иенсена:

$$\log\left|\frac{a_n^n}{a_1a_2\ldots a_n}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|G_p(|a_n|e^{i\theta})|\,d\theta \tag{3}$$

(полагая для определенности $G_p(0)=1$). Благодаря известным неравенствам Н. И. Ахиезера [7], мы можем, вследствие ($\mathfrak{B}$), при любом $\varepsilon>0$ взять $|a_n|>R$ достаточно большим, чтобы

$$|G_p(|a_n|e^{i\theta})| < e^{|a_n|(p\sin|\theta|+\varepsilon)}.$$

Следовательно,

$$\log\left|\frac{a_n^n}{a_1a_2\ldots a_n}\right| < \frac{|a_n|}{\pi}\int_0^{\pi}(p\sin\theta+\varepsilon)\,d\theta = |a_n|\left(\frac{2p}{\pi}+\varepsilon\right). \tag{4}$$

Пусть, кроме того, число n выбрано так, что

$$(\bar{A}+\varepsilon)\,n > |a_n| > (\bar{A}-\varepsilon)\,n$$

и притом достаточно большим, чтобы

$$|a_1a_2\cdots a_n| < n!\ (\bar{A}+\varepsilon)^n.$$

Таким образом, из (4) получаем

$$\frac{1}{n}\log\frac{n^n}{n!}\left(\frac{\bar{A}-\varepsilon}{\bar{A}+\varepsilon}\right)^n < (\bar{A}+\varepsilon)\left(\frac{2p}{\pi}+\varepsilon\right),$$

откуда, по формуле Стирлинга, переходя к пределу при $n\to\infty$ и $\varepsilon\to 0$, получаем* $\bar{A}\geqslant\frac{\pi}{2p}$.

ЛЕММА 4. *Если* a_n $(a_{2k-1}+a_{2k}=0,\ |a_n|\leqslant a_{n+1})$ — *данная последовательность, у которой*

$$\varliminf_{n=\infty}\frac{|a_n|}{n} = \underline{A} > 0,$$

то целая четная (или нечетная) функция

$$G(x) = x^m\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{a_n^2}\right)$$

есть функция степени $p\leqslant\frac{\pi}{2\underline{A}}$.

Действительно, при любом $\lambda>0$

$$\cos i\lambda x = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^2x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{1}{2}(e^{\lambda x}+e^{-\lambda x})$$

есть функция степени λ; поэтому, полагая

$$G(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{a_{2k}^2}\right),$$

---

* При отсутствии условия ($\mathfrak{B}$) мы получили бы более слабое неравенство $\bar{A}\geqslant\frac{1}{p}$.

где для любого $\varepsilon > 0$ $|a_{2k}| > (2\underline{A} - \varepsilon) k$ $(k \geqslant k_0)$, и замечая, что

$$|G(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{|z^2|}{|a_{2k}^2|}\right),$$

имеем

$$|G(z)| < \prod_{k=1}^{k_0} \left(1 + \left|\frac{z}{a_{2k}}\right|^2\right) e^{\frac{\pi |\,|}{2\underline{A} - \varepsilon}} < e^{|z| \left(\frac{\pi}{2\underline{A}} + \alpha\right)},$$

где α сколь угодно мало при $|z|$ достаточно большом.

Следствие 5. *Если корни a_n целой функции $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ степени p таковы, что* $\underline{\lim} \frac{|a_n|}{n} = \underline{A}$, $\overline{\lim} \frac{|a_n|}{n} = \overline{A}$, *то*

$$\frac{\pi}{2\overline{A}} \leqslant p \leqslant \frac{\pi}{2\underline{A}}. \tag{5}$$

Левая часть неравенства (5) представляет повторение леммы 3; для доказательства правой его части строим функцию

$$G_{2p}(x) = G_p(x)\ G_p(-x),$$

степень которой равна $2p$, в силу следствия 3, имеющую корнями $b_{2n-1} = a_n$, $b_{2n} = -a_n$. Но, вследствие леммы 4,

$$2p \leqslant \frac{\pi}{2\underline{B}} = \frac{\pi}{\underline{A}},$$

где

$$\underline{B} = \underline{\lim}_{n=\infty} \frac{|b_{2n}|}{2n} = \underline{\lim}_{n=\infty} \frac{|a_n|}{2n}.$$

Следствие 6. *Если корни a_n действительной (т. е. a_n действительны или попарно сопряжены) целой функции первого порядка $g(x) \in (\mathfrak{B})$ (т. е. $\overline{\lim}_{|z|=\infty} |z|^{-\rho} \log |g(z)| = 0$ при любом $\rho > 1$) удовлетворяют условию*

$$\underline{\lim} \frac{|a_n|}{n} = \underline{A} > 0,$$

то $g(x)$ — конечной степени и степень ее $p \leqslant \frac{\pi}{2\underline{A}}$.

Действительно, согласно лемме 4, $g(x) \cdot g(-x) = G_{2p}(x) \in (\mathfrak{B})$ — конечной степени $2p \leqslant \frac{\pi}{\underline{A}}$, причем

$$\overline{\lim}_{r=\infty} r^{-1} [\log |g(re^{i\varphi})| + \log |g(re^{i(\varphi+\pi)})|] \leqslant 2p;$$

поэтому, если бы для некоторого φ, например, $0 < \varphi < \pi$,

$$\overline{\lim}_{r=\infty} r^{-1} [\log |g(re^{i\varphi})|] = \infty,$$

то

$$\underline{\lim}_{r=\infty} r^{-1} \log |g(re^{-i(\varphi+\pi)})| = -\infty.$$

Благодаря $(\mathfrak{B})$ те же равенства имели бы место при всех $\varphi\ (0 < \varphi < \pi)$. Но это противоречит вещественности функции $g(x)$, вследствие $\log |g(ir)| = \log |g(-ir)|$.

Следствие 7. *Если корни a_n вещественной (или канонической) функции $g(x) \in (\mathfrak{B})$ первого рода таковы, что $\lim\limits_{n=\infty} \frac{|a_n|}{n} = A$, то $g(x)$ есть функция степени $p = \frac{\pi}{2A}$.*

Мы до сих пор не вводили в рассмотрение аргументы корней $a_k = |a_k| e^{i\varphi_k}$. Не останавливаясь здесь на этом вопросе, отметим лишь следующее простое предложение, вытекающее из предыдущего.

Следствие 8. *Если $G(x) \in (\mathfrak{B})$ — функция первого рода, имеющая корни a_n, то четная функция $G^*(x)$, имеющая корнями $\pm |a_n|$, также удовлетворяет условию $(\mathfrak{B})$.*

Действительно,

$$G(x) = e^{bx+c} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) e^{\frac{x}{c_n}},$$

поэтому

$$G(x) \cdot G(-x) = e^{2c} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{a_n^2}\right)$$

также удовлетворяет $(\mathfrak{B})$ и тем более, принимая во внимание, что

$$\left|1 - \frac{x^2}{a_n^2}\right| \geqslant \left|1 - \left|\frac{x^2}{a_n^2}\right|\right|$$

(при действительных x),

$$G^*(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{|a_n^2|}\right)$$

также удовлетворяет $(\mathfrak{B})$.

Поступило
12.VI.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. I, Доклады Ак. Наук СССР, 51, № 5 (1946), 327—330.

[2] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций конечной степени. III, Доклады Ак. Наук СССР, 52, № 7 (1946), 565—568.

[3] Бернштейн С. Н., О наилучшем приближении функций на всей вещественной оси при помощи целых функций конечной степени. IV, Доклады Ак. Наук СССР, 54, № 2 (1946), 103—108.

[4] Бернштейн С. Н., О приближении функции на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. V, Доклады Ак. Наук СССР, 54, № 6 (1946), 479—482.

[5] Бернштейн С. Н., О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов, Доклады Ак. Наук СССР, 4, № 1—2, (1934), 1—5.

[6] Bernstein S., Sur une classe de formules d'interpolation, ИАН, ОМЕН (1931), 1151—1161.

[7] Ахиезер Н. И., О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 10 (1946), 411—428.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 445—480

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком **А. Н. Колмогоровым***)*

В статье рассматриваются (вообще некоммутативные) кольца, в которых аксиоматически введена операция инволюции (*-операция). При помощи положительных функционалов изучаются представления таких колец операторами в гильбертовом пространстве. Полученные результаты применяются к теории представлений локально бикомпактных групп.

Теория коммутативных нормированных колец, изложенная в статьях (1) и (5), оказалась удобным аппаратом при решении различных вопросов анализа. Она также с успехом была применена в теории коммутативных топологических групп.

Для применения аналогичных методов к некоммутативным группам оказалось необходимым разработать теорию некоммутативных нормированных колец.

Так как в групповом кольце можно естественным образом ввести операцию инволюции, то в первую очередь возникла задача рассмотрения колец, в которых задана операция инволюции (*-операция).

Один класс таких колец (так называемых *-колец) был рассмотрен авторами в статье (2). При этом оказалось, что в теории колец с инволюцией важную роль играют положительные функционалы, т. е. функционалы, удовлетворяющие условию $f(x^* x) \geqslant 0$.

Положительные функционалы на групповом кольце и связанные с ними положительно определенные функции на группе были применены И. М. Гельфандом и Д. А. Райковым в (4) при доказательстве существования и полноты системы неприводимых представлений локально бикомпактной группы.

Настоящая статья посвящена общей теории колец с инволюцией и их представлений в связи с теорией положительных функционалов.

Некоторые методы, здесь изложенные, особенно в § 5, являются по существу, перенесением на случай произвольного кольца с инволюцией методов статьи (4)*.

---

* Д. А. Райкову, прочитавшему статью и сделавшему ряд ценных критических замечаний, мы выражаем здесь свою благодарность.

§ 1. Кольца с инволюцией и их представления

Совокупность R элементов $x, y, \ldots$ называется *нормированным кольцом*, если:

1°. R является кольцом, т. е. введены операции сложения и умножения, удовлетворяющие обычным алгебраическим условиям. Мы предположим также, что в R есть единица e.

2°. R есть линейное векторное пространство с умножением на комлексные числа, перестановочным с операцией умножения элементов в кольце R.

3°. В R введена норма, т. е. каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие число $|x|$ так, что при этом

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|, \quad |xy| \leqslant |x| \cdot |y|,$$
$$|x| \geqslant 0$$

и равно нулю лишь при $x=0$,

$$|\lambda x|=|\lambda||x|, \quad |e|=1.$$

4°. Кольцо полно, т. е. из

$$\lim_{m,\, n \to \infty} |x_n - x_m| = 0$$

следуют существование x такого, что

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x| = 0.$$

Определение 1. Нормированное кольцо R называется *кольцом с инволюцией*, если в нем введена операция, ставящая в соответствие каждому элементу x элемент x^* так, что при этом выполнены следующие условия:

a) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$,

b) $x^{**} = x$,

c) $(xy)^* = y^* x^*$,

d) $|x^*| = |x|$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только кольца с инволюцией и не будем это каждый раз оговаривать.

Элемент x называется *эрмитовским*, если $x^* = x$.

Всякий элемент x можно представить в виде $x = x_1 + i x_2$, где x_1, x_2 — эрмитовские элементы. Действительно, достаточно положить

$$x_1 = \frac{x + x^*}{2}, \quad x_2 = \frac{x - x^*}{2i}.$$

Элемент $x^* x$ всегда эрмитовский, ибо

$$(x^* x)^* = x^* x^{**} = x^* x.$$

В частности, так как $e^* = e^* e$, то $e = e^*$, т. е. e — эрмитовский элемент.

Некоторые результаты этой статьи остаются справедливыми, если оставить лишь алгебраические из перечисленных аксиом, т. е. аксиомы 1°, 2° и a), b), c).

Типичным примером колец с инволюцией является кольцо K всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. При этом под $*$-операцией мы будем понимать операцию перехода от оператора к эрмитовски-сопряженному.

В связи с этим естественно рассматривать гомоморфные отображения кольца с инволюцией в кольцо K и притом гомоморфизмы, сохраняющие $*$-операцию. Такое отображение мы будем называть представлением кольца. Иными словами, мы вводим следующее

Определение 2. Будем говорить, что *задано представление кольца* R, если каждому элементу $a \in R$ поставлен в соответствие оператор $A \in K$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (коротко мы это будем обозначать так: $a \rightarrow A$, либо $A(a)$) так, что при этом выполнены следующие условия:

1° если $a \rightarrow A$, $b \rightarrow B$, то $ab \rightarrow AB$ и $\lambda a + \mu b \rightarrow \lambda A + \mu B$;

2° если $a \rightarrow A$, то $a^* \rightarrow A^*$;

3° $e \rightarrow E$.

Определение 3. Представление называется *циклическим*, если в пространстве существует вектор ξ_0 такой, что векторы $A\xi_0$ (A — операторы, отвечающие элементам из R) всюду плотны в $\mathfrak{H}$. Сам вектор ξ_0 называется *циклическим*.

Пусть заданы два представления, одно из которых ставит в соответствие элементам a операторы $A(a)$ в пространстве $\mathfrak{H}$ и другое, ставящее в соответствие элементам a операторы $A'(a)$ в пространстве $\mathfrak{H}'$.

Будем говорить, что эти *представления эквивалентны*, если между $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ можно установить такое унитарное соответствие, при котором оператору $A(a)$ соответствует оператор $A'(a)$.

Подпространство $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ называется *инвариантным*, если каждый вектор из $\mathfrak{H}_1$ переводится всеми операторами $A(a)$ снова в векторы из $\mathfrak{H}_1$.

Рассматривая все операторы представления только как операторы в $\mathfrak{H}_1$, мы получим представление кольца R в пространстве $\mathfrak{H}_1$. Это представление мы будем называть *частью* исходного представления $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H}_1$ инвариантно, то его ортогональное дополнение также инвариантно. Действительно, пусть ξ ортогонально к $\mathfrak{H}_1$, т. е. $(\xi, \eta) = 0$ для всех $\eta \in \mathfrak{H}_1$. Тогда

$$(A(a)\xi, \eta) = (\xi, A^*(a)\eta) = 0,$$

так как $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно операторов, являющихся образами элементов из R, а $A^*(a)$ является образом элемента a^*.

Если нам задано представление кольца R в пространстве $\mathfrak{H}$, то пространство можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств, в каждом из которых представление циклично. Действительно, пусть $\xi_0 \neq 0$ — какой-либо фиксированный вектор из $\mathfrak{H}$. Рас-

смотрим совокупность всех векторов $A(a)\xi_0$, где a пробегает все R. Замыкание этого множества образует инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ пространства $\mathfrak{H}$, в котором представление циклично. Ортогональное дополнение этого подпространства также инвариантно. В нем проделаем то же и т. д. Пользуясь трансфинитной индукцией, мы и произведем требуемое разложение.

Определение 4. Представление называется *неприводимым*, если в $\mathfrak{H}$ не существует подпространства, инвариантного относительно всех операторов $A(a)$.

Если представление неприводимо, то ясно, что всякий вектор $\xi \neq 0$ будет циклическим. Очевидно, что обратное предложение также верно.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы представление было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы всякий ограниченный оператор B, перестановочный с операторами $A(a)$, был кратным единице.*

Доказательство необходимости. Пусть B перестановочен с $A(a)$. Предположим сначала, что B — эрмитов. Тогда любая функция от B также перестановочна с $A(a)$. В частности, $E(\lambda)$ — проекционные операторы, дающие спектральное разложение B, также перестановочны с $A(a)$. Но это означает, что отвечающие им подпространства инвариантны относительно $A(a)$. Ввиду неприводимости представления, это значит, что каждое из этих подпространств либо нулевое, либо все пространство.

Таким образом, $E(\lambda)$ для каждого λ есть либо 0 либо E. Так как $(E(\lambda), \xi, \xi)$ монотонно растет с увеличением λ, то отсюда следует, что существует такое λ_0, что при $\lambda > \lambda_0$, $E(\lambda) = E$ и при $\lambda < \lambda_0$ $E(\lambda) = 0$. Отсюда следует, что

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) = \lambda_0 E.$$

Если B — произвольный ограниченный оператор, то B^* также перестановочен со всеми $A(a)$. Действительно,

$$B^* A(a) = (A^*(a) B)^* = (BA^*(a))^* = A(a) B^*.$$

Поэтому эрмитовы операторы $\frac{B+B^*}{2}$ и $\frac{B-B^*}{2i}$ кратны единице, а следовательно, и B кратен единице.

Доказательство достаточности. Предположим противное, т. е. что представление приводимо. Тогда существует инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$, отличное от 0 и всего пространства. Обозначим отвечающий этому подпространству проекционный оператор через E_1. Тогда E_1 перестановочен со всеми $A(a)$ (так как $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно $A(a)$).

E_1 не кратно E, так как $\mathfrak{H}_1$ отлично от нуля и всего пространства. Мы пришли к противоречию, следовательно, теорема доказана.

§ 2. Положительные функционалы и их связь с представлениями колец

Определение 5. *Положительным линейным функционалом* называется функция $f(x)$, ставящая в соответствие каждому $x \in R$ комплексное число $f(x)$ и такая, что:

1° $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$;

2° $f(x^* x) \geqslant 0$ для любого x.

Функция $f(x)$ называется *вещественным линейным функционалом*, если:

1° $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$;

2° $f(x)$ непрерывна;

3° $f(x^*) = \overline{f(x)}$ для всякого x.

Очевидно, что если $f(x)$ положительный функционал, то $f(e) \geqslant 0$, ибо $e^* e = e$.

Всякий непрерывный линейный функционал $f(x)$ можно представить в виде $f = f_1 + i f_2$, где f_1 и f_2 — вещественные функционалы. Для этого достаточно положить

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + \overline{f(x^*)}] \quad \text{и} \quad f_2(x) = \frac{1}{2i}[f(x) - \overline{f(x^*)}].$$

Легко проверить, что f_1 и f_2 — вещественные линейные функционалы.

Ниже мы покажем, что всякий положительный функционал является вещественным функционалом, а значит, и линейная комбинация положительных функционалов с вещественным коэффициентом есть вещественный линейный функционал. Обратное, вообще говоря, неверно. Позже мы приведем пример этого.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующим неравенством:

Пусть $f(x)$ — положительный функционал. Тогда для любых x и y имеет место

$$|f(y^* x)|^2 \leqslant f(y^* y)\, f(x^* x). \tag{1}$$

Доказательство этого неравенства в точности совпадает с обычным доказательством неравенства Шварца.

ТЕОРЕМА 1. *Всякий положительный функционал f есть вещественный функционал, удовлетворяющий неравенству*

$$|f(x)| \leqslant f(e)\,|x|. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|x| < 1$ и что $x^* = x$. Положим

$$y = (e - x)^{\frac{1}{2}} = e - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}x^2 - \ldots;$$

этот ряд сходится, так как $|x| < 1$. В силу условия d) на стр. 446, инволюция непрерывна; поэтому $y^* = y$; кроме того,

$$yy^* = y^2 = e - x,$$

что легко доказать возведением в квадрат степенного ряда. Поэтому

$$f(e-x)=f(y^* y)\geqslant 0,$$

т. е. $f(x)$ вещественно и, кроме того, $f(x)\leqslant f(e)$.

Аналогично получаем $f(x)\geqslant -f(e)$.

Легко освободиться от требования $|x|<1$. Мы получим тогда: если $x^*=x$, то $f(x)$ вещественно и

$$|f(x)|\leqslant f(e)\,|x|.$$

Отсюда следует, что для любого x $f(x^*)=\overline{f(x)}$. Действительно,

$$f(x)=f\left(\frac{x+x^*}{2}\right)+if\left(\frac{x-x^*}{2i}\right),$$

$$f(x^*)=f\left(\frac{x+x^*}{2}\right)-if\left(\frac{x-x^*}{2i}\right),$$

$f\left(\frac{x+x^*}{2}\right)$ и $f\left(\frac{x-x^*}{2i}\right)$, в силу доказанного выше, вещественны. Поэтому $f(x^*)=\overline{f(x)}$. Нам осталось показать, что $f(x)$ — непрерывная функция от x. Для этого достаточно доказать неравенство (2) для любого $x\in R$. Это неравенство уже нами доказано для эрмитовских элементов x, в частности, для элементов вида $x^* x$. Таким образом,

$$f(x^* x)\leqslant f(e)\,|x^* x|,$$

следовательно,

$$f(x^* x)\leqslant f(e)\,|x|^2. \qquad (3)$$

С другой стороны, полагая в неравенстве (1) $y=e$, получаем

$$|f(x)|^2\leqslant f(e)\,f(x^* x),$$

следовательно, в силу (3),

$$|f(x)|^2\leqslant f(e)^2\,|x|^2.$$

Тем самым неравенство (2) доказано для всех элементов $x\in R$.

Приведем теперь пример кольца и вещественного функционала в нем, не представимого как линейная комбинация положительных функционалов.

Пусть кольцом R является совокупность комплексных функций $x(z)$, аналитических при $|z|<1$ и непрерывных в круге $|z|\leqslant 1$.

Мы положим $|x|=\max\limits_{|z|\leqslant 1}|x(z)|$. Сумму и произведение определим как сумму и произведение функций; x^* определим равенством: $x^*(z)=\overline{x(\bar{z})}$. В § 6 будет показано, что всякий положительный функционал в этом кольце имеет вид

$$f(x)=\int_{-1}^{+1} x(t)\,d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — монотонная функция, заданная на отрезке $(-1, +1)$ вещественной оси t.

Рассмотрим теперь следующий вещественный функционал:

$$f_1(x)=\frac{x(z_0)+x(\bar{z}_0)}{2},$$

где z_0 — фиксированное невещественное число такое, что $|z_0| \leqslant 1$. Тогда, как нетрудно убедиться, не существует комплексной функции ограниченной вариации $\sigma_1(t)$ такой, что

$$\frac{x(z_0)+x(\bar{z}_0)}{2}=\int_{-1}^{+1} x(t)\,d\sigma_1(t).$$

В самом деле, предположим, что существует $\sigma_1(t)$ такая, что

$$\int_{-1}^{+1} x(t)\,d\sigma_1(t)=\frac{x(z_0)+x(\bar{z}_0)}{2}$$

для любой функции, аналитической в единичном круге.

Положим $x_n(z)=\frac{e^{inz}}{n}$ и подставим вместо $x(z)$. Тогда при $n \to \infty$ левая часть равенства будет стремиться к нулю, а правая по модулю — к ∞, т. е. мы пришли к противоречию. Это значит, что $f_1(x)$ не представим как линейная комбинация положительных функционалов.

Каждое представление кольца R доставляет нам множество положительных функционалов. В самом деле, пусть ξ_0 — некоторый вектор из пространства $\mathfrak{H}$. Положим

$$f(a)=(A(a)\,\xi_0,\ \xi_0). \tag{4}$$

Тогда $f(a)$ — положительный функционал. Действительно,

$$f(a^*a)=(A(a^*a)\,\xi_0,\ \xi_0)=(A^*(a)\,A(a)\,\xi_0,\ \xi_0)=(A(a)\,\xi_0,\ A(a)\,\xi_0)\geqslant 0.$$

В частности, $f(e)=|\xi_0|^2$.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое представление кольца R с инволюцией непрерывно. Более того, при этом $|A| \leqslant |a|$.*

Доказательство. Применяя неравенство (3) к положительному функционалу $f(a)=(A(a)\,\xi_0,\ \xi_0)$, получаем:

$$(A(a^*a)\,\xi_0,\ \xi_0) \leqslant (\xi_0,\ \xi_0)\,|a|^2,$$

т. е.

$$|A(a)\,\xi_0|^2 \leqslant |a|^2\,|\xi_0|^2.$$

Так как ξ_0 — произвольный вектор, то это неравенство означает, что $|A| \leqslant |a|$.

Наша ближайшая цель — дать описание представления с помощью положительных функционалов. Это лучше всего делать для циклических представлений.

Пусть заданы два циклических представления кольца R: в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$.

Обозначим операторы, отвечающие элементу a, соответственно через $A(a)$ и $A'(a)$.

Пусть ξ_0 и ξ_0' — циклические векторы соответствующих представлений.

Положим

$$f(a)=(A(a)\,\xi_0,\ \xi_0) \ \text{ и } \ f'(a)=(A'(a)\,\xi_0',\ \xi_0').$$

Покажем, что если $f(a) \equiv f'(a)$ *для любого* a, то представления эквивалентны.

Соответствие между векторами в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ мы установим следующим образом. Пусть $\xi = A\xi_0$. Поставим ему в соответствие вектор $\xi' = A'\xi'_0$. Мы докажем, что это соответствие изометрично. Отсюда будет следовать его взаимная однозначность. Линейность очевидна. Для того чтобы доказать изометричность, покажем, что скалярные произведения соответствующих векторов совпадают между собой. Пусть

$$\xi_1 = A_1\xi_0, \quad \xi'_1 = A'_1\xi'_0,$$
$$\xi_2 = A_2\xi_0, \quad \xi'_2 = A'_2\xi'_0.$$

Тогда

$$(\xi_1, \xi_2) = (A_1\xi_0, A_2\xi_0) = (A_2^*A_1\xi_0, \xi_0) = f(a_2^*a_1),$$
$$(\xi'_1, \xi'_2) = (A'_1\xi'_0, A'_2\xi'_0) = (A_2'^*A'_1\xi'_0, \xi'_0) = f'(a_2^*a_1).$$

Так как $f(x) \equiv f'(x)$, то мы видим, что $(\xi_1, \xi_2) = (\xi'_1, \xi'_2)$, т. е. для элементов вида $A\xi_0$ (соответственно $A'\xi'_0$) изометричность доказана.

Так как оба представления цикличны, то множество таких элементов плотно в $\mathfrak{H}$ (соответственно $\mathfrak{H}'$). Мы можем поэтому по непрерывности продолжить это соответствие на все $\mathfrak{H}$ (соответственно $\mathfrak{H}'$).

Мы видим, что циклическое представление с точностью до эквивалентности однозначно определяется положительным функционалом (4). Возникает вопрос, для всякого ли положительного функционала существует представление, при котором этот функционал может быть записан в виде (4)? Мы покажем, что на этот вопрос можно ответить утвердительно.

Пусть нам задан положительный функционал $f(x)$ в R. Введем с его помощью в R скалярное произведение следующим образом. Положим

$$(x, y) = f(y^*x).$$

Будем считать x эквивалентным нулю, если

$$(x, x) = f(x^*x) = 0.$$

Два элемента мы будем называть э к в и в а л е н т н ы м и, если их разность эквивалентна нулю.

Совокупность элементов, эквивалентных нулю, образует левый идеал в R. В самом деле, пусть $x \sim 0$ и y — произвольный элемент. Тогда

$$f((yx)^*yx) = f(x^*y^*yx) = f(zx),$$

где $z = x^*y^*y$. В силу неравенства (1), имеем

$$|f(zx)| \leqslant \sqrt{f(x^*x)}\sqrt{f(zz^*)}$$

и, следовательно, $f(zx) = 0$, т. е. $yx \sim 0$. Если $x_1 \sim 0$ и $x_2 \sim 0$, то $x_1 + x_2 \sim 0$, так как

$$f((x_1 + x_2)^*(x_1 + x_2)) = f(x_1^*x) + f(x_2^*x_1) + f(x_1^*x_2) + f(x_2^*x_2).$$

Первое и четвертое слагаемое правой части равны нулю по определению, равенство нулю второго и третьего можно вывести опять-таки из неравенства (1). Проверим, что выполнены аксиомы скалярного произведения.

1°. $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Действительно, в силу того, что положительный функционал вещественен, имеем

$$f(y^*x) = \overline{f((y^*x)^*)} = \overline{f(x^*y)}.$$

2°. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$. Очевидно.

3°. $(x, x) \geqslant 0$. Очевидно. То, что $(x, x) = 0$ лишь при $x \sim 0$, следует из определения эквивалентных нулю элементов.

Полученное пространство обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}$. Оно, вообще говоря, не полно. Его пополнение обозначим через $\mathfrak{H}$. Представление будем строить в этом пространстве следующим образом: элементу a поставим в соответствие оператор A в $\mathfrak{H}$ по формуле $Ax = ax$. При этом нужно лишь проверить, что если $x_1 \sim x_2$, то $Ax_1 \sim Ax_2$. Это ясно, так как если $x_1 - x_2 \sim 0$, то $a(x_1 - x_2) \sim 0$ в силу того, что множество эквивалентных нулю элементов образует идеал.

Покажем, что оператор A ограничен и, более того, что

$$|A| \leqslant |a|. \tag{5}$$

По определению, $(Ax, Ax) = f(x^*a^*ax)$. Положим

$$f_1(y) = f(x^*yx),$$

считая x фиксированным; $f_1(y)$ — также положительный функционал. В самом деле,

$$f_1(y^*y) = f(x^*y^*yx) = f((yx)^*yx) \geqslant 0.$$

Поэтому, в силу неравенства (2),

$$f_1(a^*a) \leqslant f_1(e)\,|a^*a| \leqslant |f_1(e)|\,|a|^2,$$

т. е.

$$f(x^*a^*ax) \leqslant f(x^*x)\,|a|^2$$

или

$$(Ax, Ax) \leqslant (x, x)\,|a|^2;$$

таким образом,

$$|A|^2 = \sup_{(x,x)=1} (Ax, Ax) \leqslant |a|^2,$$

т. е. неравенство (5) доказано. Мы доказали, что оператор A, определенный на $\tilde{\mathfrak{H}}$, ограничен, поэтому можно доопределить его на замыкании $\mathfrak{H}$ множества $\tilde{\mathfrak{H}}$. Норма оператора A после его продолжения попрежнему не будет превосходить $|a|$.

Покажем, что отображение $a \to A$ есть представление кольца R. Во-первых, очевидно, что если $a \to A$, $b \to B$, то $\lambda a + \mu b \to \lambda A + \mu B$ и $ab \to AB$.

Покажем, что если $a \to A$, то a^* переходит в A^*, иными словами, что $(ax, y) = (x, a^*y)$. Но это действительно так, ибо $(ax, y) = f(y^*ax)$, а

$$(x, a^*y) = f((a^*y)^*x) = f(y^*ax) = (ax, y).$$

Покажем, что полученное представление циклическое. В качестве вектора ξ_0 возьмем элемент $x = e$. Тогда множество векторов $A\xi_0$ есть

в данном случае множество всех a, т. е. все $\tilde{\mathfrak{H}}$ и, следовательно, плотно в $\mathfrak{H}$. Цикличность доказана.

Далее, очевидно, что при таком выборе ξ_0 мы имеем, по определению скалярного произведения,

$$(A\xi_0, \xi_0) = (a, e) = f(e^* a) = f(a).$$

Таким образом, мы построили представление кольца по наперед заданному положительному линейному функционалу $f(x)$.

Полученные нами результаты соединим в виде теоремы:

ТЕОРЕМА 3. *Каждому циклическому представлению кольца R с циклическим вектором ξ_0 отвечает положительный функционал*

$$f(a) = (A(a)\xi_0, \xi_0), \tag{6}$$

где $A(a)$ — оператор, отвечающий элементу a. Функционалом $f(x)$ представление определяется однозначно с точностью до эквивалентности.

Обратно, всякому положительному функционалу $f(a)$ отвечает циклическое представление такое, что $f(a)$ определяется формулой (6).

Если нам задано представление $a \to A$ в пространстве $\mathfrak{H}$, то каждому элементу $\xi \in \mathfrak{H}$ отвечает положительный функционал $f(a) = (A(a)\xi, \xi)$.

Если мы заменим вектор ξ вектором $\lambda\xi$, $|\lambda| = 1$, то $f(a)$ от этого не изменится.

Вообще говоря, непропорциональные векторы могут давать один и тот же функционал $f(a)$. Однако, если представление неприводимо, то имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Пусть нам задано неприводимое представление кольца R. Положим $(A\xi_1, \xi_1) = f_1(a)$ и $(A\xi_2, \xi_2) = f_2(a)$.*

Если $f_1(a) \equiv f_2(a)$, то $\xi_2 = \lambda\xi_1$, где $|\lambda| = 1$.

Доказательство. Так как представление неприводимо и $\xi_1 \neq 0$, то множество векторов $A\xi_1$ всюду плотно в $\mathfrak{H}$.

Зададим оператор U следующим образом: если $\xi = A\xi_1$, то положим $U\xi = A\xi_2$. Докажем, что так построенный оператор сохраняет длины векторов. В самом деле,

$$(U\xi, U\xi) = (A\xi_2, A\xi_2) = (A^* A\xi_2, \xi_2) = (A^* A\xi_1, \xi_1) = (A\xi_1, A\xi_1) = (\xi, \xi),$$

откуда следует, что оператор U определен однозначно. Действительно, если $A'\xi_1 = A''\xi_1$, то $\xi = (A' - A'')\xi_1 = 0$ и поэтому $U\xi = 0$, т. е. $A'\xi_2 = A''\xi_2$. Ограниченный оператор U доопределим, по непрерывности, на всем $\mathfrak{H}$.

Покажем, что оператор U перестановочен со всеми операторами A представления. В самом деле, пусть A_0 — оператор представления и пусть вектор ξ имеет вид $\xi = A\xi_1$. Тогда $A_0\xi = A_0 A\xi_1$, т. е., по определению U, имеем $UA_0\xi = A_0 A\xi_2$. Но

$$A_0 U\xi = A_0 U A\xi_1 = A_0 A\xi_2.$$

Таким образом, для векторов вида $\xi = A\xi_1$ имеем $A_0 U\xi = UA_0\xi$. Ввиду того, что эти элементы всюду плотны, получаем $A_0 U = UA$. Таким

образом, U перестановочен со всеми операторами неприводимого представления и, следовательно, в силу теоремы 1 § 1, $U=\lambda E$. Но это означает, что

$$\xi_2 = U\xi_1 = \lambda\xi_1.$$

§ 3. Обобщенная лемма Шура

В теории представлений колец приходится пользоваться некоторыми теоремами, которые являются обобщениями известной леммы Шура о конечномерных представлениях. В дальнейшем всюду в этом параграфе речь будет итти о представлениях одного и того же кольца R.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $a \to X_a$ и $a \to Y_a$ — представления в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ соответственно и пусть существует замкнутый линейный оператор T из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$ с областями определения и изменения, плотными в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ соответственно, такой, что* *

$$Y_a T \subset T X_a \text{ для всех } a \in R. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, из $T\xi = 0$ следует $\xi = 0$. Тогда оба эти представления эквивалентны.

Доказательство. Взяв * от обеих частей (1), получим:

$$T^* Y_{a^*} \supset X_{a^*} T^*$$

или, подставляя a вместо a^*,

$$T^* Y_a \supset X_a T^*.$$

Отсюда, умножая обе части (1) слева на T^*, получаем

$$T^* T X_a \supset T^* Y_a T \supset X_a T^* T,$$

так что

$$T^* T X_a \supset X_a T^* T. \tag{2}$$

По известной теореме Неймана [8],

$$T = WH,$$

где $H = \sqrt{T^*T}$ — гипермаксимальный оператор; кроме того, из условий, наложенных на T, следует, что W изометрически отображает $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$. Соотношение (2) означает, что T^*T перестановочен с X_a, откуда следует, что и $H = \sqrt{T^*T}$ перестановочен с X_a. Подставляя в (1) выражение для T, получим

$$Y_a W H \subset W H X_a. \tag{3}$$

Пусть ξ — элемент из области определения H. Так как H и X_a перестановочны, то $X_a\xi$ также принадлежат области определения H и $HX_a\xi = X_a H\xi$. Поэтому, применяя обе части (3) к ξ, получим

$$Y_a W H\xi = W X_a H\xi,$$

т. е.

$$Y_a W = W X_a \tag{4}$$

---

* $A \subset B$ для неограниченных операторов означает, что B есть расширение A, т. е. область определения B содержит область определения A и в этой последней A и B совпадают.

на области изменения H. Но, согласно уже цитированной теореме Неймана, замыкание области изменения H совпадает с ортогональным дополнением совокупности всех тех векторов ξ, которые удовлетворяют условию: $T\xi=0$. В силу условия теоремы, эта совокупность состоит только из $\xi=0$, следовательно, замыкание области изменения H есть все $\mathfrak{H}$.

В силу непрерывности обеих частей (4), отсюда следует, что это равенство имеет место во всем $\mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть $a\longrightarrow X_a$ и $a\longrightarrow Y_a$ — неприводимые представления кольца R в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_1$ соответствено, и пусть замкнутый линейный оператор T из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_1$ удовлетворяет условию* (1). *Тогда либо $T\equiv 0$, либо X_a и Y_a эквивалентны и T имеет вид: $T=\rho W$, где ρ — скаляр >0.*

Доказательство. Пусть $T\not\equiv 0$, следовательно, в области определения T существует элемент $\xi_0\neq 0$ такой, что $T\xi_0\neq 0$. Из (1) следует, что $X_a\xi_0$ при любом $a\in R$ есть также элемет области определения T. Так как представление X_a неприводимо, то ξ_0 есть циклический элемент, следовательно, совокупность всех $X_a\xi_0$, $a\in R$, плотна в $\mathfrak{H}$. Таким образом, T имеет область определения, плотную в $\mathfrak{H}$.

Так как $TX_a\xi_0=Y_aT\xi_0$ и представление Y_a неприводимо, то область изменения T также плотна в $\mathfrak{H}_1$. Отсюда следует, что существует T^* и что равенство $T^*\xi=0$ возможно только при $\xi=0$.

Применяя эти рассуждения к T^*, приходим к выводу, что область изменения T^* плотна в $\mathfrak{H}$. Поэтому условие $T\xi=0$ возможно лишь при $\xi=0$.

Таким образом, оператор T удовлетворяет всем условиям теоремы 1; следовательно, X_a и Y_a эквивалентны.

Оператор H перестановочен со всеми операторами X_a неприводимого представления, следовательно, есть оператор умножения на некоторый неотрицательный скаляр ρ. Отсюда $T=\rho W$.

Определение 1. Пусть дана система представлений $a\longrightarrow X_a^{(\alpha)}$ в $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ кольца R, зависящих от индекса α. *Прямой суммой* этих представлений назовем представление $a\longrightarrow X_a$ в $\mathfrak{H}$, которое строится следующим образом: $\mathfrak{H}$ есть совокупность последовательностей $\xi=\{\xi^{(\alpha)}\}$ таких, что

$$\sum_{\alpha}|\xi^{(\alpha)}|^2<+\infty$$

(следовательно, каждая такая последовательность имеет не более счетного числа членов $\neq 0$) и $X\xi=\{X^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть представление $a\longrightarrow X_a$ в $\mathfrak{H}$ есть прямая сумма неприводимых и попарно неэквивалентных представлений $a\longrightarrow X_a^{(\alpha)}$ в $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. Тогда всякий ограниченный оператор A в $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми X_a, имеет вид*

$$A\xi=\{\lambda^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}\}, \tag{5}$$

где $\lambda^{(\alpha)}$ — скаляр.

Доказательство. Оператор A задается матрицей $\|A_{\alpha,\alpha_1}\|$, где A_{α,α_1} — ограниченный оператор из пространства $\mathfrak{H}^{(\alpha_1)}$ в пространство $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. Условие перестановочности A с X_a дает

$$X_a^{(\alpha)}A_{\alpha,\alpha_1}=A_{\alpha,\alpha_1}X_a^{(\alpha_1)}. \qquad (6)$$

Согласно следствию 1, отсюда следует, что $A_{\alpha,\alpha_1}=0$ при $\alpha\neq\alpha_1$. При $\alpha=\alpha_i$ из (6) следует, что $A_{\alpha,\alpha}$ перестановочен со всеми операторами $X_a^{(\alpha)}$ неприводимого представления, следовательно, есть оператор умножения на скаляр, который обозначим через $\lambda^{(\alpha)}$ (см. теорему 1, § 1). Отсюда следует, что A имеет вид (5) и теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $X_a^{(\alpha)}$, $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$, X_a, $\mathfrak{H}$ — те же, что и в теореме 2. Тогда всякое инвариантное по отношению ко всем X_a подпространство $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}$ есть совокупность всех ξ, удовлетворяющих условию*

$$\xi^{(\alpha)}=0 \quad \textit{для всех} \quad \alpha\in\mathfrak{A},$$

где $\mathfrak{A}$ — некоторое подмножество множества всех индексов α.

Действительно, пусть P — оператор проектирования $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство по отношению ко всем X_a, то P перестановочен со всеми X_a, следовательно, $P\xi=\{\lambda^{(\alpha)}\xi^{\alpha}\}$. Далее, $P^2=P$, следовательно, $\lambda^{(\alpha)2}=\lambda^{(\alpha)}$; отсюда либо $\lambda^{(\alpha)}=0$, либо $\lambda^{(\alpha)}=1$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность тех α, для которых $\lambda^{(\alpha)}=0$. $\mathfrak{M}$ есть совокупность тех и только тех ξ, для которых $P\xi=\xi$, т. е. тех и только тех $\{\xi^{(\alpha)}\}$, для которых $\lambda^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}=\xi^{(\alpha)}$, следовательно, тех $\xi^{(\alpha)}$, для которых $\xi^{(\alpha)}=0$ при $\alpha\in\mathfrak{A}$.

Следствие 3. *Пусть $X_a^{(\alpha)}$, $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$, X_a, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ — те же, что и в следствии 2. Пусть, каково бы ни было α_0, подпространство $\mathfrak{M}$ содержит вектор $\xi=\{\xi^{(\alpha)}\}$ такой, что $\xi^{(\alpha_0)}\neq 0$; тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{H}$.*

Действительно, в этом случае множество $\mathfrak{A}$ будет, очевидно, пустым.

Следствие 4. *Пусть $X_a^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$, X_a, $\mathfrak{H}$ — те же, что и в теореме 2, и пусть множество всех индексов α счетно. Тогда всякий вектор $\xi=\{\xi^{(\alpha)}\}$ такой, что $\xi^{(\alpha)}\neq 0$ при любом α, есть циклический вектор представления X_a.*

Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутая оболочка всех $X_a\xi$. Тогда $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство $\mathfrak{H}$. Согласно следствию 3, оно совпадает с $\mathfrak{H}$.

До сих пор мы рассматривали прямые суммы попарно неэквивалентных представлений. Рассмотрим теперь другой крайний случай.

Определение 2. Представление $a\to X_a$ будем называть *кратным неприводимому представлению* $a\to X_a^{(l)}$, если $a\to X_a$ есть прямая сумма представлений $a\to X_a^{(\alpha)}$, эквивалентных одному и тому же представлению $a\to X_a^{(l)}$.

ТЕОРЕМА 3. *Всякая неприводимая часть представления $a \longrightarrow X_a$, являющегося кратным неприводимому представлению $a \longrightarrow X_a^{(0)}$, эквивалентна представлению $a \longrightarrow X_a^{(0)}$.*

Доказательство. Пусть $a \longrightarrow X'_a$ — неприводимая часть представления $a \longrightarrow X_a$ и пусть $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство, в котором рассматривается $a \longrightarrow X'_a$. Рассмотрим элементы $\xi = \{\xi^{(\alpha)}\} \in \mathfrak{M}$. Пусть α_0 — такое значение α, для которого существует элемент $\xi = \{\xi^{(\alpha)}\} \in \mathfrak{M}$ такой, что $\xi^{(\alpha_0)} \neq 0$. Положим $\xi^{(\alpha_0)} = \eta$ и $\{\xi^{(\alpha)}\}_{\alpha \neq \alpha_0} = \zeta$. Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ совокупность всех ζ и введем норму, положив

$$|\zeta|^2 = \sum_{\alpha \neq \alpha_0} |\xi_\alpha|^2.$$

Тогда всякий элемент $\xi \in \mathfrak{H}$ можно рассматривать как пару $\xi = \{\eta, \zeta\}$ и $|\xi|^2 = |\eta|^2 + |\zeta|^2$.

Положим, далее,

$$Y_a \eta = Y_a \xi^{(\alpha_0)} = X_a^{(\alpha_0)} \xi^{(\alpha_0)}$$

и

$$Z_a \zeta = \{X_a^{(\alpha)} \xi^{(\alpha)}\}_{\alpha \neq \alpha_0}.$$

Тогда

$$X_a \xi = \{Y_a \eta, Z_a \zeta\},$$

т. е. X_a есть прямая сумма представлений $Y_a = X_a^{(\alpha_0)}$ и Z_a.

Рассмотрим элементы ζ такие, что при некотором η будет $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$. Обозначим замкнутую оболочку всех таких ζ через $\mathfrak{H}'_1$. Она является инвариантным подпространством относительно Z_a в $\mathfrak{H}_1$. Действительно, из $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ следует, что также $\{Y_a \eta, Z_a \zeta\} \in \mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{H}'_1 = (0)$, то $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех $\xi = \{\xi^{(\alpha)}\}$ таких, что $\xi^{(\alpha)} = 0$ при $\alpha \neq \alpha_0$, следовательно, X'_a эквивалентно $X_a^{(0)}$. Поэтому нужно рассмотреть тот случай, когда $\mathfrak{H}'_1 \neq (0)$.

Рассмотрим элементы $\mathfrak{M}$ вида $\{\eta, 0\}$. Они образуют в $\mathfrak{M}$ инвариантное подпространство по отношению к $a \longrightarrow X'_a$. Так как представление $a \longrightarrow X'_a$ неприводимо, то это подпространство есть либо $\mathfrak{M}$, либо (0). Первая возможность исключается, ибо $\mathfrak{H}'_1 \neq (0)$. Поэтому должно быть $\eta = 0$. Таким образом,

$$\text{из } \{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}, \quad \zeta = 0, \quad \text{следует, что } \eta = 0. \tag{7_1}$$

Аналогично докажем, что

$$\text{из } \{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}, \quad \eta = 0, \quad \text{следует, что } \zeta = 0. \tag{7_2}$$

Согласно выбору α_0, среди элементов $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ есть хотя бы один $\{\eta_0, \zeta_0\} \in \mathfrak{M}$ такой, что $\eta_0 \neq 0$. Так как также $\{Y_a \eta_0, Z_a \zeta_0\} \in \mathfrak{M}$ и Y_a неприводимо, то совокупность всех η таких, что $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$, образует множество, всюду плотное в $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$.

Условие (7_2) означает, что $\mathfrak{M}$ можно рассматривать, как график линейного оператора T из $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$ в $\mathfrak{H}_1'$. Именно, для $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ мы полагаем

$$\zeta = T\eta.$$

Так как $\mathfrak{M}$ замкнуто, то T замкнут. Далее, из предыдущего следует, что его области определения и изменения плотны в $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$ и $\mathfrak{H}_1'$ соответственно. Наконец, (7_1) означает, что из $T\eta = 0$ следует $\eta = 0$.

Итак, элементы $\mathfrak{M}$ имеют вид $\{\eta, T\eta\}$. Так как $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство по отношению к X_a, то и $\{Y_a\eta, Z_aT\eta\} \in \mathfrak{M}$, следовательно, имеет вид $\{Y_a\eta, TY_a\eta\}$, так что

$$TY_a\eta = Z_aT\eta. \tag{8}$$

Другими словами, если η принадлежит области определения T, то и $Y_a\eta$ ей принадлежит и имеет место (8). Это означает, что $Z_aT \subset TY_a$. Итак, оператор T удовлетворяет всем условиям теоремы 1, следовательно, Y_a и Z_a эквивалентны. Более того, $H = \sqrt{T^*T}$ перестановочен со всеми операторами неприводимого представления Y_a, следовательно, есть оператор умножения на скаляр $\rho > 0$. Отсюда $T = \rho W$.

Таким образом, каждый элемент из $\mathfrak{M}$ имеет вид $\xi = \{\eta, \rho W\eta\}$, где η пробегает все $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$, причем

$$X_a\xi = \{Y_a\eta, \rho WY_a\eta\}.$$

Каждому такому $\xi = \{\eta, \rho W\eta\}$ поставим в соответствие элемент $\eta' = \sqrt{1+\rho^2}\,\eta$. Это соответствие будет, очевидно, изометрическим отображением $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$. При этом отображении вектор

$$X_a'\xi = \{Y_a\eta, \rho WY_a\eta\}$$

переходит в

$$\sqrt{1+\rho^2}\,Y_a\eta = Y_a\eta'.$$

Следовательно, оператор X_a переходит в $Y_a = X_a^{(\alpha_0)}$. Другими словами, представления X_a' в $\mathfrak{M}$ и $X_a^{(\alpha_0)}$ эквивалентны. Теорема доказана.

Следствие 5. *Пусть представления $a \to X_a$ в $\mathfrak{H}$ и $a \to Y_a$ в $\mathfrak{H}_1$ являются кратными неприводимым представлениям $a \to X_a^{(0)}$ и $a \to Y_a^{(0)}$ соответственно. Если при этом $a \to X_a$ и $a \to Y_a$ эквивалентны, то $a \to X_a^{(0)}$ и $a \to Y_a^{(0)}$ также эквивалентны.*

Доказательство. Из определения кратного представления следует, что $a \to X_a^{(0)}$ можно рассматривать как часть представления $a \to X_a$ в некотором инвариантном подпространстве $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}$.

По условию, представления $a \to X_a$ и $a \to Y_a$ эквивалентны, т. е. существует изометрическое отображение $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$, при котором X_a переходит в Y_a. При этом отображении $\mathfrak{M}$ перейдет в некоторое подпространство $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{H}_1$, инвариантное по отношению ко всем Y_a, а представление $a \to X_a^{(0)}$ — в некоторую часть $a \to Y_a'$ представления $a \to Y_a$. Эта часть, будучи эквивалентной неприводимому представлению

$a \to X_a^{(0)}$, неприводима, следовательно, по теореме 3, эквивалентна представлению $a \to Y_a^{(0)}$.

Другими словами, представления $a \to X_a^{(0)}$ и $a \to Y_a^{(0)}$ эквивалентны, что и требовалось доказать.

§ 4. Включение кольца с инволюцией в кольцо операторов

Пусть нам задано кольцо R с инволюцией. Может оказаться, что кольцо можно упростить, оставив тот же запас положительных функционалов, или, что то же самое, тот же запас представлений.

Например, в § 2 мы упоминали о кольце аналитических функций, заданных в круге. Всякий положительный функционал в этом кольце задается формулой

$$f(x) = \int_{-1}^{+1} x(t)\, d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — монотонная функция. Но тот же запас положительных функционалов имеется и в кольце всех непрерывных на сегменте $(-1, +1)$ функций.

Более точно мы поставим вопрос следующим образом.

Заменить норму $|x|$ в кольце R возможно меньшей нормой $|x|_1$, при которой остался бы тот же запас положительных функционалов в R (т. е. то же множество циклических представлений). При этом новая норма должна быть такова, что

$$\left.\begin{array}{l} |e|_1 = 1, \quad |x+y|_1 \leqslant |x|_1 + |y|_1, \quad |\lambda x|_1 = |\lambda|\,|x|_1, \\ |xy|_1 \leqslant |x|_1\,|y|_1, \quad |x^*|_1 = |x|_1, \quad |x|_1 \geqslant 0. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

В новой норме могут оказаться элементы $x \neq 0$, для которых $|x|_1 = 0$. В этом случае мы объявим их эквивалентными нулю и перейдем таким образом к новому кольцу.

Далее, может оказаться, что в новой норме кольцо R не полно. Мы можем его тогда пополнить. Мы увидим также, что после введения новой нормы кольцо R станет изоморфным кольцу операторов в гильбертовом пространстве, а норма перейдет в норму операторов в гильбертовом пространстве.

ЛЕММА 1. *Пусть в R введено множество норм $|x|_\alpha$, каждая из которых удовлетворяет условиям* (1). *Пусть в каждой из этих норм R может быть изоморфно, с сохранением инволюции и нормы, отображено в кольцо операторов в гильбертовом пространстве. Пусть, далее, для каждого x $\sup\limits_\alpha |x|_\alpha < +\infty$. Тогда в норме $|x|_1 = \sup\limits_\alpha |x|_\alpha$ кольцо R может быть изоморфно, с сохранением нормы и инволюции, отображено в кольцо операторов в гильбертовом пространстве.*

Доказательство. Пусть при норме $|x|_\alpha$ кольцо реализуется как кольцо операторов в пространстве $\mathfrak{H}_\alpha$.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{H}$, являющееся ортогональной прямой суммой пространств $\mathfrak{H}_\alpha$. Если через ξ^α обозначать векторы в $\mathfrak{H}_\alpha$, то векторами в $\mathfrak{H}$ будут $\xi = \{\xi^\alpha\}$, где $\{\xi^\alpha\}$ отлично от нуля не более чем для счетного множества значений α и

$$\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2 = |\xi|^2 < +\infty.$$

Скалярное произведение определяется формулой

$$(\xi, \eta) = \sum_\alpha (\xi_\alpha, \eta_\alpha).$$

Каждому a отвечает, по условию, в $\mathfrak{H}_\alpha$ оператор $X_a^{(\alpha)}$, причем $|X_a^{(\alpha)}| = |a|_\alpha$.

В пространстве $\mathfrak{H}$ элементу a отвечает оператор X_a, определяемый следующим образом:

$$X_a \{\xi_\alpha\} = \{X_a^{(\alpha)} \xi_\alpha\}.$$

Оператор X_a ограничен. Действительно,

$$|X_a \xi|^2 = \sum_\alpha |X_a^{(\alpha)} \xi_\alpha|^2 \leqslant \sum_\alpha |X_a^{(\alpha)}|^2 |\xi_\alpha|^2 \leqslant \sup_\alpha |X_a^{(\alpha)}|^2 \cdot \sum |\xi_\alpha|^2.$$

Легко видеть, что $\sup\limits_\alpha |X_a^{(\alpha)}| = |X_a| = |a|_1$. Мы реализовали, таким образом, кольцо R с нормой $|a|_1$ в виде кольца операторов в гильбертовом пространстве.

ЛЕММА 2. *Пусть в кольце R введена норма $|x|_0$, удовлетворяющая условиям (1), и пусть дано представление $a \to X_a$ кольца R, непрерывное в этой норме *. Тогда $|X_a| \leqslant |a|_0$.*

Доказательство. Так как это представление непрерывно, то мы можем продолжить его на пополнение R_0 кольца R. Мы получим тогда представление полного кольца R_0. Для него, согласно теореме 2 § 2, имеет место неравенство $|X_a| \leqslant |a|_0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *В кольце R можно ввести норму $|x|_1$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1°. *$|x|_1$ удовлетворяет условиям (1).*

2°. *Всякое представление кольца R есть представление, непрерывное в норме $|x|_1$.*

3°. *Если какая-либо другая норма $|x|_2$ также удовлетворяет условиям 1° и 2°, то $|x|_1 \leqslant |x|_2$ для всякого x.*

4°. *Кольцо R с нормой $|x|_1$ можно изоморфно, с сохранением инволюции и нормы, отобразить на кольцо операторов в гильбертовом пространстве.*

---

* Когда мы говорим, что представление $a \to X_a$ непрерывно в норме $|x|_0$, удовлетворяющей условиям (1), то мы требуем также, чтобы из $|a|_0 = 0$ следовало $X_a = 0$, т. е. элементы, эквивалентные нулю в этой норме, переходили бы в 0.

Ясно, что условиями 1°, 2°, 3° норма $|x|_1$ определяется однозначно.

Доказательство. Рассмотрим множество всех циклических представлений данного кольца * и обозначим каждое циклическое представление значком α. Пусть элементу a при этом представлении отвечает оператор $X_a^{(\alpha)}$. В силу теоремы 2 § 2, $|X_a^{(\alpha)}| \leqslant |a|$. Положим

$$|a|_\alpha = |X_a^{(\alpha)}|;$$

$|a|_\alpha$ будет нормой, удовлетворяющей условиям (1) этого параграфа. Положим, теперь, $|a|_1 = \sup\limits_\alpha |a|$. При этом мы будем иметь $|a|_1 \leqslant |a|$, так как $|a|_1 \leqslant |a|$.

Согласно лемме 1, кольцо R с нормой $|a|_1$ удовлетворяет условиям (1) и может быть реализовано как кольцо операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Всякое циклическое представление кольца R непрерывно в норме $|a|_1$. Действительно, пусть дано циклическое представление $a \longrightarrow X_a^{(\alpha)}$. Тогда

$$|X_a^{(\alpha)}| = |a|_\alpha \leqslant \sup_\alpha |a|_\alpha = |a|_1.$$

Всякое представление разлагается в прямую сумму циклических и поэтому также непрерывно в этой норме.

Таким образом, показано, что $|a|_1$ удовлетворяет условиям 1°, 2° и 4°. Покажем, что выполнено также и условие 3°. Пусть дана норма $|x|_2$, удовлетворяющая условиям (1) и в которой все представления R непрерывны. Тогда, в силу леммы 2, имеем

$$|X_a^{(\alpha)}| \leqslant |a|_2,$$

т. е. $|a|_\alpha \leqslant |a|_2$. Следовательно, и

$$|a|_1 = \sup_\alpha |a|_\alpha \leqslant |a|_2.$$

Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место равенство*

$$|x|_1 = \sup \sqrt{f(x^*x)}, \tag{2}$$

где sup *распространяется по всем положительным функционалам f, для которых $f(e) = 1$.*

Доказательство. Каждое циклическое представление описывается (§ 2) некоторым положительным функционалом f. Найдем норму оператора X_a, отвечающего элементу a в этом представлении. Мы имеем

$$(X_a x, X_a x) = f((ax)^* ax) = f(x^* a^* ax), \quad (x, x) = f(x^* x).$$

Введем функционал $f_x(y) = f(x^* yx)$, считая x фиксированным. $f_x(y)$ — положительный функционал, причем

$$f_x(e) = f(x^* x), \quad |X_a|^2 = \sup (X_a x, X_a x),$$

* Мы берем лишь циклические представления, так как каждое разлагается на циклические.

где sup распространяется по всем x, для которых $(x, x)=1$; таким образом,

$$|X_a|^2 = \sup f_x(a^*a),$$

где sup распространяется по всем x при условии $f_x(e)=1$.

Следовательно, $|X_a|^2 \leqslant \sup f(a^*a)$, где sup распространяется по всем положительным функционалам f при условии $f(e)=1$.

Если обозначить это представление индексом α, то

$$|a|_\alpha^2 \leqslant \sup f(a^*a)$$

при условии: $f(e)=1$ и f — положительный функционал. Следовательно,

$$|a|_1^2 \leqslant \sup_\alpha |a|_\alpha^2 \leqslant \sup_{f(e)=1} f(a^*a).$$

С другой стороны,

$$f(a^*a) = (X_a e, X_a e).$$

Поэтому, если $f(e)=1$, то

$$f(a^*a) \leqslant |X_a|^2 = |a|_\alpha^2 \leqslant \sup_\alpha |a|_\alpha^2 = |a|_1^2.$$

Следовательно,

$$\sup_{f(e)=1} f(a^*a) \leqslant |a|_1^2.$$

Теорема доказана.

Замечание I. Все рассуждения этого параграфа остаются в силе, если в исходном кольце вовсе не было нормы, т. е. если оно определялось лишь аксиомами 1°, 2° и a), b), c), d). При этом нужно лишь дополнительно требовать следующего: для всякого x

$$\sup f(x^*x) < +\infty,$$

где sup распространяется по всем положительным f, для которых $f(e)=1$.

Замечание II. Совокупность I элементов, для которых $|x|_1=0$ (мы называем их эквивалентными нулю), образует двусторонний идеал. Эти элементы x характеризуются тем, что при любом представлении они переходят в 0 или иначе, что любой положительный функционал обращается на них в 0.

Докажем, что I действительно идеал.

Пусть $|x|_1=0$, y — произвольный элемент. Тогда

$$|xy|_1 \leqslant |x|_1 |y|_1 = 0,$$

аналогично $|yx|_1=0$. Далее, если $|x|_1=0$ и $|y|_1=0$, то

$$|\lambda x+\mu y|_1 \leqslant |\lambda||x|_1+|\mu||y|_1=0.$$

Мы доказали, что I — идеал. При изучении представлений либо положительных функционалов мы можем заменить R кольцом вычетов по этому идеалу. Обозначим это кольцо вычетов через R'. Мы будем называть его *приведенным кольцом.*

Замечание III. Всякое представление кольца R непрерывно в норме $|x|_1$ и поэтому является непрерывным представлением кольца R'. Но непрерывное представление R' может быть расширено до представления пополнения R'. Пополнение R' мы обозначим через R.

Итак, *всякое представление кольца R есть также представление кольца $\bar{R}$ и обратно.*

Аналогично, *всякий положительный функционал на R может быть перенесен на $\bar{R}$ и обратно.*

§ 5. Неразложимые функционалы и неприводимые представления

В конечномерном случае всякое представление разлагается на неприводимые. В общем случае a priori неясно существование таких представлений. Мы, не касаясь вопроса о разложении представлений на неприводимые, докажем в этом параграфе существование неприводимых представлений. Очень удобно это сделать в терминах положительных функционалов.

Определение 1. Будем говорить, что положительный функционал f_1 *подчинен функционалу* f $(f_1 \ll f)$, если существует такое λ, что $\lambda f - f_1$ — положительный функционал.

Построим циклическое представление $a \to X_a$ (X_a — операторы в пространстве $\mathfrak{H}$), отвечающее функционалу f:

$$f(a) = (X_a \xi_0, \xi_0),$$

где ξ_0 — циклический вектор. Пусть B — ограниченный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами представления. Положим

$$f_1(a) = (X_a B \xi_0, \xi_0).$$

В частности, оператору $B = E$ отвечает сам функционал f. Мы утверждаем, что $f_1(a)$ — *положительный функционал и подчинен функционалу* $f(a)$.

В самом деле, $f_1(a)$ положителен. Действительно,

$$f_1(a^* a) = (X_a^* X_a B \xi_0, \xi_0) = (X_a B \xi_0, X_a \xi_0) = (B X_a \xi_0, X_a \xi_0) \geqslant 0,$$

так как B — положительно определенный оператор. Далее, f_1 подчинен f. Действительно, B ограничен. Следовательно, существует λ такое, что $(B\xi, \xi) \leqslant \lambda (\xi, \xi)$, т. е.

$$\lambda (\xi, \xi) - (B\xi, \xi) \geqslant 0.$$

Полагая $\xi = X_a \xi_0$, получаем

$$\lambda (X_a^* X_a \xi_0, \xi_0) - (X_a^* X_a B \xi_0, \xi_0) \geqslant 0,$$

т. е. $\lambda f - f_1$ — положительный функционал. Это же означает, что f_1 подчинен f.

Обратно, пусть f_1 — положительный функционал, подчиненный функционалу f. По функционалу f построим циклическое представление (§ 2). *Тогда функционалу f_1 отвечает положительно определенный оператор B, перестановочный со всеми операторами представления.*

Докажем это. Мы знаем, что пространство $\mathfrak{H}$ получается пополнением пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, составленного из элементов R, причем скалярное произведение в $\tilde{\mathfrak{H}}$ задается формулой

$$(x, y) = f(y^* x).$$

Элементы же x, для которых $(x, x)=0$, т. е. $f(x^*x)=0$, мы будем считать эквивалентными нулю.

Рассмотрим в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$ эрмитовскую форму $f_1(y^*x)$. Мы докажем, что f_1 есть однозначно определенная, непрерывная в $\tilde{\mathfrak{H}}$ эрмитовская билинейная форма. f_1 подчинено f. Это значит, что существует такое λ, что $\lambda f - f_1$ — положительный функционал. Таким образом, имеем

$$\lambda f(x^*x) - f_1(x^*x) \geqslant 0,$$

следовательно,

$$0 \leqslant f_1(x^*x) \leqslant \lambda f(x^*x).$$

Это доказывает, что равенство $f(x^*x)=0$ влечет $f_1(x^*x)=0$, а значит, например, в силу неравенства

$$|f_1(y^*x)|^2 \leqslant f_1(x^*x) f_1(y^*y),$$

и равенство нулю выражения $f_1(y^*x)$.

Мы показали, что $f_1(y^*x)$ однозначно определена, т. е. для $x \sim 0$ $f_1(y^*x)=0$. f_1 — ограниченная билинейная форма. Действительно,

$$0 \leqslant f_1(x^*x) \leqslant \lambda f(x^*x).$$

Следовательно,

$$|f_1(y^*x)|^2 \leqslant f_1(x^*x) f_1(y^*y) \leqslant \lambda^2 f(x^*x) f(y^*y) = \lambda^2 (x, x)(y, y).$$

В силу ее ограниченности, мы можем продолжить эту билинейную форму на пополнение $\tilde{\mathfrak{H}}$, т. е. на пространство $\mathfrak{H}$. Но ограниченной билинейной форме в $\mathfrak{H}$ отвечает ограниченный оператор B. Следовательно, существует оператор B такой, что

$$f_1(y^*x) = (Bx, y).$$

Докажем, что оператор B перестановочен со всеми операторами X_a представления. Для этого достаточно доказать, что

$$(BX_a x, y) = (Bx, X_a^* y).$$

Но это действительно так, ибо

$$(BX_a x, y) = (Bax, y) = f_1(y^*ax),$$

а

$$(Bx, X_a^* y) = (Bx, a^*y) = f_1((a^*y)^* x) = f_1(y^*ax).$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ — положительный функционал, $a \to X_a$ — отвечающее ему циклическое представление, ξ_0 — соответствующий циклический вектор, т. е.*

$$f(a) = (X_a \xi_0, \xi_0).$$

Тогда каждому положительному функционалу f_1, подчиненному функционалу f, отвечает положительно определенный оператор B, перестановочный со всеми X_a, причем

$$f_1(a) = (X_a B \xi_0, \xi_0).$$

Обратно, каждому ограниченному положительно определенному оператору B, перестановочному со всеми операторами X_a, отвечает положительный функционал, подчиненный функционалу f.

В частности, самому $f(x)$ отвечает единичный оператор. Рассмотрим теперь линейные комбинации положительных функционалов, подчиненных функционалу $f(x)$. Мы назовем их функционалами, подчиненными положительному функционалу $f(x)$. Им отвечают произвольные ограниченные операторы, перестановочные с операторами X_a представления.

Действительно, любой оператор, перестановочный с операторами X_a, можно представить как линейную комбинацию положительных. Таким образом,

В совокупность функционалов, подчиненных положительному функционалу f, мы можем ввести операцию умножения так, что она станет изоморфной кольцу операторов, перестановочных с операторами X_a представления, порожденного функционалом $f(x)$. Сам f играет при этом роль единицы кольца.

Мы превратили совокупность C_f функционалов, подчиненных функционалу f, в кольцо с инволюцией. При этом:

1°. Функционалу f отвечает единица кольца.

2°. Операция $*$ определена так: $f^* = \bar{f}$, причем под функционалом $\bar{f}(x)$ понимается функционал $\overline{f(x^*)}$.

3°. Умножение связано с $*$ обычным требованием:

$$(f_1 f_2)^* = f_2^* f_1^*.$$

Определение 2. Положительный функционал f называется *неразложимым*, если всякий подчиненный ему функционал f_1 кратен ему, т. е. $f_1(x) = \lambda f(x)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть f — положительный функционал. Для того чтобы отвечающее ему представление было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы f был неразложимым.*

Доказательство. Всякому функционалу f_1, подчиненному функционалу f, отвечает оператор, перестановочный со всеми операторами X_a представления. При этом самому функционалу f отвечает единичный оператор. Неприводимость представления эквивалентна тому, что всякий оператор B, перестановочный с операторами представления, кратен единице (теорема 1, § 1), т. е. тому, что всякий функционал f_1, подчиненный функционалу f, является кратным f.

Перейдем теперь к доказательству существования неприводимых представлений. В силу только что доказанной теоремы, для этого достаточно показать существование неразложимых положительных функционалов.

Совокупность положительных функционалов $f(x)$ таких, что $f(e) \leqslant 1$, образует выпуклое множество. В самом деле, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ положительны и $f_1(e) \leqslant 1$, $f_2(e) \leqslant 1$, то

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \quad (\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1)$$

удовлетворяет тем же условиям. Поэтому существование неразложимых положительных функционалов непосредственно следует из теоремы

М. Крейна и Д. Мильмана ([6]). Более того, пусть x — элемент кольца такой, что $|x|_1 \neq 0$. Тогда существует положительный функционал f такой, что

$$f(x^*x) \neq 0, \quad f(e) = 1.$$

С другой стороны, по той же теореме М. Крейна и Д. Мильмана, совокупность всех положительных функционалов f, удовлетворяющих условию $f(e) \leqslant 1$, есть наименьшее регулярно замкнутое выпуклое множество, содержащее все неразложимые положительные функционалы, удовлетворяющие условию $f(e) \leqslant 1$. Поэтому существует также неразложимый функционал f_0, удовлетворяющий условиям

$$f_0(e) \leqslant 1, \quad f_0(x^*x) \neq 0.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Пусть x — элемент кольца $\overline{R}$ такой, что $|x^*|_1 \neq 0$. Тогда существует неразложимый положительный функционал f_0, удовлетворяющий условиям*

$$f_0(e) \leqslant 1, \quad f_0(x^*x) \neq 0. \tag{1}$$

Согласно теореме 2 этого параграфа и теореме 3 § 2, эту теорему можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть x_0 — элемент кольца $\overline{R}$ такой, что $|x_0|_1 \neq 0$. Тогда существует неприводимое представление $a \longrightarrow X_a$ кольца $\overline{R}$ такое, что оператор X_{x_0} в этом представлении, соответствующий элементу x_0, отличен от нуля.*

Действительно, условия (1) можно переписать в виде

$$|\xi_0|^2 \leqslant 1, \quad |X_{x_0}\xi_0|^2 \neq 0.$$

Последнее неравенство означает, что $X_{x_0} \neq 0$.

§ 6. Случай коммутативных колец

Вся картина становится особенно простой в том случае, когда R — коммутативное кольцо.

ЛЕММА 1. *Если R коммутативно, то кольцо $\overline{R}$ изоморфно кольцу всех непрерывных функций $x(M)$ на некотором бикомпактном пространстве; при этом $x^*(M) = \overline{x(M)}$.*

Доказательство. Кольцо $\overline{R}$ есть $*$-кольцо, т. е.

$$|x^*x|_1 = |x|_1 |x^*|_1. \tag{1}$$

В самом деле, $|x|_1 = \sup\limits_f \sqrt{f(x^*x)}$, где f — положительный функционал и $f(e) = 1$.

Согласно неравенству (2) § 2, мы имеем

$$\sup_f \sqrt{f(x^*x)} \leqslant \sqrt{|xx^*|_1};$$

итак, $|x|_1^2 \leqslant |xx^*|_1$. С другой стороны, всегда

$$|xx^*|_1 \leqslant |x|_1 |x^*|_1 = |x|_1^2, \quad \text{т. е.} \quad |xx^*| = |x|^2 = |x||x^*|.$$

Согласно лемме 1 в ([2]), коммутативное кольцо, в которое введена инволюция и норма, удовлетворяющая (1), изоморфно кольцу всех непрерывных функций на бикомпактном множестве $\mathfrak{M}_1$. Это множество $\mathfrak{M}_1$ есть множество максимальных идеалов кольца $\overline{R}$.

Определение. Максимальный идеал M кольца R называется *симметричным*, если для любого $x \in R$ имеет место $x^*(M) = \overline{x(M)}$. Если M — максимальный идеал, то через M^* мы обозначим максимальный идеал такой, что $x^*(M^*) = \overline{x(M)}$. Легко показать, что для всякого M существует M^*. Симметричный максимальный идеал — такой, для которого $M^* = M$.

Можно доказать, что множество симметричных максимальных идеалов кольца R образует замкнутое подмножество в множестве всех максимальных идеалов кольца R.

ТЕОРЕМА 1. *$\overline{R}$ изоморфно кольцу всех непрерывных функций на множестве $\mathfrak{M}_1$ симметричных максимальных идеалов кольца R.*

Доказательство. Для того чтобы доказать теорему, достаточно доказать, в силу леммы 1, что множество максимальных идеалов кольца $\overline{R}$ гомеоморфно множеству симметричных максимальных идеалов кольца R.

Каждому максимальному идеалу кольца $\overline{R}$ отвечает симметричный максимальный идеал кольца R.

Действительно, пусть нам задан гомоморфизм кольца $\overline{R}$ в тело комплексных чисел. Этот гомоморфизм есть одновременно гомоморфизм кольца R', являющегося частью $\overline{R}$. Но R' есть кольцо вычетов кольца R. Поэтому этот гомоморфизм есть одновременно гомоморфизм самого R в тело комплексных чисел.

Таким образом, этим определен максимальный идеал кольца R. Этот максимальный идеал симметричен, так как все максимальные идеалы кольца $\overline{R}$ симметричны. Непрерывность соответствия между идеалами вытекает непосредственно из определения топологии в множество максимальных идеалов [см. ([1]) § 7].

Обратно, пусть M — симметричный максимальный идеал кольца R. Рассмотрим функционал

$$f(x) = x(M).$$

Этот функционал положителен. Действительно,

$$f(x^*x) = x^*(M)\,x(M) = |\,x(M)\,|^2 \geqslant 0, \quad f(e) = e(M) = 1.$$

Поэтому этот функционал равен нулю для элементов, для которых $|\,x\,|_1 = 0$. Кроме того, этот функционал непрерывен по норме $|\,x\,|_1$ и может быть перенесен поэтому на $\overline{R}$.

Таким образом, между симметричными максимальными идеалами M кольца R и максимальными идеалами M кольца $\overline{R}$ можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие. При этом, если обозна-

чать одной и той же буквой x элемент из R и отвечающий ему элемент из $\overline{R}$, то имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Всякий положительный линейный функционал $f(x)$ на коммутативном кольце R может быть представлен, и притом единственным образом, в виде*

$$f(x) = \int x(M)\, d\sigma(\Delta), \tag{2}$$

где $\sigma(\Delta)$ — положительная вполне аддитивная функция множеств на множестве $\mathfrak{M}_1$ симметричных максимальных идеалов кольца R.

Доказательство. Всякий положительный функционал на R можно распространить на $\overline{R}$ (замечание III в § 4). Он превращается тогда в положительный функционал на совокупности непрерывных функций на бикомпактном множестве $\mathfrak{M}_1$. Такой функционал записывается формулой (2), гда $\sigma(\Delta)$ — неотрицательная, вполне аддитивная функция множеств. Функция множеств $\sigma(\Delta)$ при этом определяется однозначно.

Обратно, если $\sigma(\Delta)$ — неотрицательная функция множеств на множестве симметричных максимальных идеалов, то $f(x)$, задаваемый формулой (1), будет положительный функционал. Действительно,

$$f(x^*x) = \int x^*(M)\, x(M)\, d\sigma(\Delta) = \int |x(M)|^2\, d\sigma(\Delta) \geqslant 0.$$

Теорема доказана.

Из формул (1) следует, что всякий неразложимый положительный функционал имеет вид $f(x) = x(M_0)$, где M_0 — фиксированный симметричный максимальный идеал.

Доказанная нами теорема означает, собственно говоря, что каждый функционал разлагается, и притом однозначно, на положительные, неразложимые далее функционалы. При этом от R мы потребовали коммутативности. Это условие является существенным, как это видно из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть всякий положительный функционал, заданный на кольце R, разлагается единственным образом по неразложимым далее положительным функционалам. Тогда приведенное кольцо $\overline{R}$ коммутативно (т. е. $xy - yx$ есть элемент, эквивалентный нулю в R).*

Доказательство. Рассмотрим какое-либо неприводимое представление $a \to X_a$, где X_a — оператор в пространстве $\mathfrak{H}$. Докажем, что $\mathfrak{H}$ одномерно. Предположим противное. Тогда в $\mathfrak{H}$ существуют по крайней мере два линейно независимых вектора ξ_1 и ξ_2. Положим

$$f_1(a) = (X_a\xi_1, \xi_1), \qquad f_2(a) = (X_a\xi_2, \xi_2),$$
$$f_1'(a) = \frac{1}{2}(X_a(\xi_1+\xi_2), \xi_1+\xi_2), \quad f_2'(a) = \frac{1}{2}(X_a(\xi_1-\xi_2), \xi_1-\xi_2)$$

и пусть

$$\varphi(a) = f_1(a) + f_2(a) = f_1'(a) + f_2'(a).$$

$\varphi(a)$ — положительный функционал.

По теореме 2 § 5 функционалы $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_1'(a)$, $f_2'(a)$ неразложимы. Поэтому $f(a)$ разлагается двумя способами на неразложимые функционалы. Эти способы различны. Действительно, векторы ξ_1, ξ_2, $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1-\xi_2$ непропорциональны.

С другой стороны, согласно теореме 4 § 2, в случае неприводимого представления функционалом вида $(X_a\xi, \xi)$ вектор ξ определяется с точностью до множителя однозначно.

Итак, всякое неприводимое представление R одномерно, т. е. коммутативно. Так как всякий элемент, переходящий при всех неприводимых представлениях в нуль, эквивалентен нулю, то $xy-yx$ эквивалентен нулю, т. е. приведенное кольцо коммутативно.

Пример. Обозначим через R_0' совокупность функций, заданных на полупрямой $0 \leqslant u < \infty$, таких, что

$$\| f \| = \int_0^\infty |f(u)| \operatorname{sh} 2u\, du < +\infty.$$

Определим в R_0' умножение $f = f_1 \times f_2$, где $f(u)$ определяется формулой

$$f(u) = \int_0^\infty \int_{|u-t|}^{u+t} f_1(s) f_2(t)\, ds\, dt.$$

Обозначим, далее, через R_0 совокупность всех элементов вида $\lambda e + f$, где e — формально присоединенная единица, а $f \in R_0'$.

Можно проверить, что R_0 превращается при этом в нормированное кольцо.

Определим операцию $*$, положив

$$f^*(u) = \overline{f(u)}, \quad (\lambda e + f)^* = \bar{\lambda} e + f^*.$$

Легко проверить, что мы получили при этом коммутативное кольцо с инволюцией. Найдем максимальные идеалы этого кольца. Рассуждения при этом совершенно аналогичны тем, которые проводятся в ([5]).

Так же, как и там, мы приходим к тому, что максимальные идеалы определяются гомоморфизмом

$$f \to \int_0^\infty f(s) \psi(s)\, ds,$$

где $\psi(s)$ определяется из соотношения

$$\psi(s)\psi(t) = \int_{|t-s|}^{t+s} \psi(u)\, du.$$

Решениями этого уравнения служат функции

$$\psi(s) = \frac{2 \sin \rho s}{\rho},$$

где ρ — произвольное комплексное число. Для того чтобы гомоморфизм был определен для всех элементов из R_0, необходимо и достаточно, чтобы $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, где $|\rho_2| \leqslant 2$.

Итак, каждый максимальный идеал кольца определяется числом $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, где $|\rho_2| \leqslant 2$. При этом ρ и $-\rho$ определяют один и тот же максимальный идеал.

Пусть M — максимальный идеал, определяемый числом ρ. Тогда максимальный идеал M^* определяется числом $\bar{\rho}$. Следовально, симметричные максимальные идеалы определяются из условия $\rho = \bar{\rho}$, либо $\rho = -\bar{\rho}$; таким образом, симметричные максимальные идеалы будут либо при ρ вещественном, либо при чисто мнимом. Соответствующие гомоморфизмы задаются формулами:

$$f \to \int_0^\infty f(s) \frac{2 \sin \rho s}{\rho} d\rho,$$

где ρ вещественно, и

$$f \to \int_0^\infty f(s) \frac{2 \operatorname{sh} \rho s}{\rho} d\rho,$$

где $0 \leqslant \rho \leqslant 2$.

§ 7. Групповые кольца

Как частный случай изучавшихся ранее колец, мы рассмотрим так называемые групповые кольца. Это дает нам возможность получить некоторые результаты, относящиеся к представлениям групп.

Пусть G — локально бикомпактная группа. Для простоты изложения мы будем предполагать, что правая и левая инвариантные меры на G совпадают между собой.

Рассмотрим кольцо R', элементами которого служат суммируемые функции $x(g)$ на группе.

Умножение задается формулой

$$x_1 \times x_2 = \int x_1(gg_1^{-1})\, x_2(g_1)\, dg_1.$$

$*$ определим равенством:

$$x^*(g) = \overline{x(g^{-1})}.$$

Норма $|x|$ элемента x полагается равной

$$|x| = \int |x(g)|\, dg.$$

К этому кольцу добавим формально единицу (если группа не дискретна) так, что окончательно элементы кольца изображаются символом $\lambda e + x$, где e — формально присоединенная единица. При этом умножение, естественно, задается формулой

$$(\lambda_1 e_1 + x_1)(\lambda_2 e_2 + x_2) = \lambda_1 \lambda_2 e + (\lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_1 \lambda_2 x_1 x_2),$$

а $*$ и норма распространяются так: мы полагаем

$$|\lambda e + x| = |\lambda| + |x|, \quad (\lambda e + x)^* = \bar{\lambda} e + x^*.$$

Полученное кольцо обозначим через R и назовем *групповым кольцом группы* G.

ТЕОРЕМА. 1. *Каждому представлению $a+\lambda e \longrightarrow X_a+\lambda E$ группового кольца отвечает непрерывное унитарное представление $g \longrightarrow T_g$ группы. Обратно, каждому измеримому представлению группы отвечает представлвние $a \longrightarrow X_a$ группового кольца. Эти представления связаны между собой формулами*

$$X_a = \int a(g)\, T_g\, dg.$$

Докажем теорему для циклического представления. Такое представление, как мы знаем (§ 2), может быть реализовано следующим образом: пространство $\mathfrak{H}$ получается пополнением пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, векторами в котором служат элементы $x, y, \ldots$ из R. Скалярное произведение задается формулой

$$f(y^* x) = (x, y),$$

где f — некоторый положительный функционал. Элементу a отвечает оператор X_a: $X_a x = ax$. Мы доказали, что при этом $|X_a| \leqslant |a|$. Элементу g_0 мы ставим в соответствие оператор $T_{g_0} x = y$, где функция $y(g) = x(g_0^{-1} g)$.

Докажем, что этот оператор унитарный. Заметим, что имеет место следующее равенство для элементов из R:

$$(T_{g_0} y)^* T_{g_0} x = y^* x.$$

Действительно,

$$y^* x = \int \overline{y(g_1 g^{-1})}\, x(g_1)\, dg.$$

Поэтому скалярные произведения при применении T_{g_0} не меняются. Так как, сверх того, оператор T_g отображает наше множество функций на себя, то ясно, что продолженный на все $\mathfrak{H}$ оператор T_{g_0} будет унитарным. Покажем, что представление непрерывно. Заметим для этого, что функционал f непрерывен (как и всякий положительный функционал); с другой стороны,

$$|T_{g_0} x - x| = \int |T_{g_0} x - x|\, dg \longrightarrow 0 \text{ при } g_0 \longrightarrow e,$$

следовательно,

$$f[(T_{g_0} x - x)^* (T_g x - x)] \longrightarrow 0 \quad \text{при } g_0 \longrightarrow e.$$

Это означает, что

$$(T_{g_0} x - x,\ T_{g_0} x - x) \longrightarrow 0 \text{ при } g_0 \longrightarrow e.$$

Этим доказана непрерывность в единице группы, а следовательно, и в любой другой точке.

Нам осталось показать, что порожденное представлением $g \longrightarrow T_g$ представление кольца будет тем, из которого мы исходили.

Пусть $a(g)$ — суммируемая функция. При представлении кольца R ей отвечает оператор $Ax = a \times x$. Наша цель — доказать, что

$$Ax = \int a(g)\, T_g\, x\, dg,$$

или, в скалярных произведениях:

$$(Ax, y) = \int a(g)(T_g x, y)\, dg,$$

т. е.

$$f(y^* a x) = \int a(g) f(y^* T_g x)\, dg.$$

Ввиду непрерывности функционала и операции T_g, мы можем правую часть равенства переписать так:

$$f\left(y^* \int a(g) T_g x\, dg\right) = f(y^* a x).$$

Наше утверждение доказано.

Мы доказали, что всякому представлению группового кольца отвечает представление группы. Легко показать обратное. В самом деле, пусть дано унитарное представление группы: $g \to T_g$.

Предположим, что функция T_g слабо непрерывна, т. е. для всяких ξ и η (T_g, ξ, η) — непрерывная функция. Положим

$$A = \int a(g) T_g\, dg.$$

Этот оператор существует, если только функция $a(g)$ суммируема. Мы получаем представление группового кольца. Легко видеть, что ему обратно отвечает представление T_g, если только представление циклично *.

Сделаем еще одно замечание по поводу доказательства теоремы. При построении T_g мы не использовали представления расширенного кольца R, а лишь представление исходного кольца R' без присоединенной единицы. Поэтому, так как пространство $\mathfrak{H}$ строилось пополнением пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, составленного из элементов кольца R, то нужно показать, что кольцо R' нерасширенное приведет нас к тому же самому пространству $\mathfrak{H}$. Для этого докажем, что элемент e есть предел, в смысле введенного скалярного произведения, элементов x кольца R'

Отнесем каждой окрестности V единицы группы G функцию $e_v(g)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$e_v(g) \geqslant 0, \quad e_v(g) = 0, \text{ если } g \in V,$$
$$e_v(g^{-1}) = e_v(g), \quad \int e_v(g)\, dg = 1.$$

Такую систему функций назовем *единичной системой*. Легко показать, что единичная система обладает следующим свойством:

$$|x \times e_v - x| \to 0 \text{ при } v \to e$$

(предел понимается по частично упорядоченной системе окрестностей, заданных в смысле их естественного упорядочивания). Имеем

---

* В случае сепарабельного пространства $\mathfrak{H}$ этот результат можно усилить. Именно, из предыдущих рассуждений следует, что если функция $(T_g \xi, \eta)$ измерима для всех $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$, то почти всюду на G представление $g \to T_g$ совпадает с некоторым непрерывным представлением.

$$f(e_v x) \to f(x) \text{ для любого } x \in R,$$

т. е. $(e_v, x) \to (e, x)$ для любого x.
Так как, кроме того,

$$(e_v, e_v) = f(e_v^* e_v) \leqslant f(e) \, | e_v^* e_v | = f(e),$$

т. е. длины векторов e_v ограничены, то e_v слабо сходятся. Обозначим этот слабый предел через ξ_0. Мы будем иметь

$$(\xi_0, x) = (e, x) \text{ для любого } x.$$

В частности,

$$(e_v, \xi_0) = (e_v, e) = f(e_v)$$

и поэтому $f(e_v)$ имеет предел. Таким образом, отщепляется вектор $\xi_0 - e$, ортогональный ко всем элементам x. Он для представления не существенен, т. е. в этом одномерном пространстве каждый элемент x дает нам нулевой оператор. Отбрасывая это одномерное пространство, мы получаем требуемый результат. Для того чтобы не было этого «паразитического» одномерного подпространства, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{v \to e} f(e_v) = f(e).$$

Применяя теорему 4 § 5 к групповому кольцу R и пользуясь только что доказанной теоремой 1, мы получим основной результат И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова в ([4]) о полноте системы неприводимых представлений локально бикомпактной группы.

Пользуясь выражением (6) § 2 для положительного функционала и теоремой 1 этого параграфа, получаем, что всякий положительный функционал в групповом кольце R определяется формулой

$$f(\lambda e + a) = \lambda C + \int a(g) (T_g \xi, \xi) \, dg,$$

где $g \to T_g$ — непрерывное унитарное представление группы G, а функция $\varphi(g) = (T_g \xi, \xi)$ является непрерывной положительно определенной функцией на группе G [см. ([4])].

Обратно, всякой ограниченной измеримой положительно определенной функции $\varphi(g)$ отвечает положительный функционал в групповом кольце, определенный формулой

$$f(a) = \int a(g) \varphi(g) \, dg.$$

Отсюда, в частности, следует, что всякая ограниченная измеримая положительно определенная функция почти всюду на G совпадает с некоторой непрерывной положительно определенной функцией [см. ([4])].

Положительно определенные функции послужили отправным пунктом в ([4]) при построении унитарных представлений локально бикомпактной группы.

§ 8. Пример несимметричного группового кольца

Как известно, групповое кольцо компактной или коммутативной группы симметрично [см. ([7])]. Оказывается, однако, что для локально компактной группы это, вообще говоря, уже неверно.

Приведем пример локально компактной группы, групповое кольцо которой несимметрично.

Пусть G — группа комплексных матриц второго порядка с детерминантом единица. Обозначим через $\mathfrak{H}$ ее подгруппу, состоящую из унитарных матриц.

Двусторонним классом смежности G по $\mathfrak{H}$ называется, как известно, совокупность элементов вида $h_1 g h_2$, где g фиксирован, а h_1 и h_2 пробегают все $\mathfrak{H}$. Так как подгруппа $\mathfrak{H}$ компактна, то множество элементов вида $h_1 g h_2$ имеет конечную меру, если только множество элементов g имеет конечную меру.

Рассмотрим совокупность R_0' функций $f(g)$, суммируемых и постоянных на двусторонних классах смежности G по $\mathfrak{H}$. Совокупность R_0 элементов вида $\lambda e + f$, $f \in R_0'$, образует подкольцо группового кольца R. Действительно, пусть $f_1(g)$ и $f_2(g)$ принадлежат R_0'. Надо доказать, что функция $f = f_1 \times f_2$ также принадлежит R, т. е. постоянна на двусторонних классах смежности G по $\mathfrak{H}$. Но

$$f(gh) = \int f_1(ghg_1^{-1}) f_2(g_1)\, dg_1 =$$
$$= \int f_1(gg_2^{-1}) f_2(g_2 h)\, dg_2 = \int f_1(gg_2^{-1}) f_2(g_2)\, dg_2 = f(g)$$

и аналогично $f(hg) = f(g)$.

Кольцо R_0 коммутативно.

Для того чтобы доказать, что групповое кольцо несимметрично, докажем сначала, что R_0 несимметрично.

Займемся поэтому более детально кольцом R_0. Каждая матрица g может быть представлена в виде $g = ha$, где h — унитарная, а a — положительно определенная эрмитова матрица. Всякая эрмитова матрица может быть записана в виде $a = h_1 \delta h_1^{-1}$, где h_1 — унитарная, а δ — диагональная матрица. Ввиду унимодулярности группы, δ имеет вид:

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

Таким образом, в каждом классе G по $\mathfrak{H}$ имеется диагональная матрица $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, причем легко видеть, что в каждом классе вместе с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ имеется также матрица $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и сверх этого никаких других диагональных матриц нет.

Итак, каждый двусторонний класс характеризуется числом λ, причем λ и λ^{-1} определяют один и тот же класс. Нам удобнее вместо λ рассматривать $t = \ln \lambda$. Тогда t и $-t$ определяют один и тот же класс.

Таким образом, функции из R_0, т. е. постоянные на двусторонних классах, мы можем рассматривать как четные функции от t.

Найдем теперь закон умножения и норму в R_0. Для этого заметим, что пространство левых классов смежности G по $\mathfrak{H}$ есть совокупность положительно определенных матриц с детерминантом единица. Преобразования левых классов сводятся при этом к преобразованию соответствующих квадратичных форм.

Можно показать, далее, что эта группа преобразования есть группа преобразований трехмерного пространства Лобачевского; при этом точкам пространства Лобачевского взаимно однозначно соответствуют левые классы смежности. Двусторонний класс смежности есть совокупность левых классов; поэтому ему отвечает множество точек в пространстве Лобачевского. Для того чтобы найти это множество, заметим следующее: элементы нашей группы мы можем рассматривать как преобразования левых классов смежности, состоящие в умножении каждого из классов справа на данный элемент g группы. При этом элементы из $\mathfrak{H}$, и только они, оставляют единичный класс инвариантным.

Таким образом, подгруппа $\mathfrak{H}$ состоит из движений пространства Лобачевского, оставляющих на месте фиксированную точку пространства.

Так как двусторонний класс смежности получается из левого умножения справа на все элементы из $\mathfrak{H}$, то в пространстве Лобачевского ему соответствует сфера с центром в фиксированной точке.

Таким образом, функции на группе, постоянной на двусторонних классах, отвечает функция в пространстве Лобачевского, постоянная на сферах с фиксированным центром. При этом интеграл функции по группе лишь постоянным множителем отличается от интеграла функции, ей соответствующей в пространстве Лобачевского. Следовательно, норма такой функции равна $\int |f(\bar{g})|\, d\bar{g}$, где $d\bar{g}$ — элемент объема в пространстве Лобачевского. Если обозначить через t радиус сферы, то норма такой функции равна $\int\limits_0^\infty |f(t)|\, \varphi(t)\, dt$, где $\varphi(t)$ — площадь поверхности сферы.

Перейдем теперь к вычислению закона умножения функций $f(t)$, отвечающего свертке функции на группе. Для того чтобы не вычислять произведения непосредственно, воспользуемся следующими соображениями.

Максимальные идеалы коммутативного кольца R_0 задаются гомоморфизмами

$$f \to \int\limits_0^\infty f(t)\, \alpha_\rho(t)\, \varphi(t)\, dt,$$

где $\alpha_\rho(t)$ — так называемые сферические функции данной группы. В работе ([3]) эти функции вычислены. Они равны $\frac{2 \sin \rho t}{\rho \operatorname{sh} 2t}$. При этом каждому ρ отвечает свой гомоморфизм, т. е. свой максимальный идеал.

При гомоморфизме произведение функций переходит в произведение чисел. Поэтому, если $f = f_1 \times f_2$, то

$$\int f(u)\,\alpha_\rho(u)\,\varphi(u)\,du = \int f_1(u)\,\alpha_\rho(u)\,\varphi(u)\,du \cdot \int f_2(u)\,\alpha_\rho(u)\,\varphi(u)\,du.$$

Для того чтобы выразить f через f_1 и f_2, положим

$$\tilde{f}_1(u) = f_1(u)\frac{\varphi(u)}{\operatorname{sh} 2u}, \quad \tilde{f}_2(u) = f_2(u)\frac{\varphi(u)}{\operatorname{sh} 2u}, \quad \tilde{f}(u) = f(u)\frac{\varphi(u)}{\operatorname{sh} 2u}. \tag{1}$$

Тогда гомоморфизм задается формулой

$$f \to \int_0^\infty \tilde{f}(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du.$$

Мы сумеем удовлетворить условию (1), если положим

$$\tilde{f}(u) = \int_0^\infty \int_{|t-u|}^{t+u} \tilde{f}_1(s)\,\tilde{f}_2(t)\,ds\,dt.$$

Действительно,

$$\int_0^\infty \tilde{f}(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{|t-u|}^{t+u} \tilde{f}_1(s)\,f_2(t)\,ds\,dt\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{f}_1(s)\,\tilde{f}_2(t) \int_{|s-t|}^{s+t} \frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du\,ds\,dt = \int_0^\infty \int_0^\infty \tilde{f}_1(s)\,\tilde{f}_2(t)\,\frac{4\sin\rho s\,\sin\rho t}{\rho^2}\,ds\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \tilde{f}_1(s)\,\frac{2\sin\rho s}{\rho}\,ds \int_0^\infty \tilde{f}_2(t)\,\frac{2\sin\rho t}{\rho}\,dt.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde{f}(u) = \int_0^\infty \int_{|t-u|}^{t+u} \tilde{f}_1(s)\,\tilde{f}_2(t)\,ds\,dt.$$

Действительно, обозначим

$$\int_0^\infty \int_{|t-u|}^{t+u} \tilde{f}_1(s)\,\tilde{f}_2(f)\,ds\,dt$$

через $g(u)$. Надо доказать, что $g(u) = \tilde{f}(u)$. Но

$$\int_0^\infty g(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du = \int_0^\infty \tilde{f}(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du.$$

В силу полноты системы функций $\sin\rho u$, отсюда следует, что $\tilde{f}(u) = g(u)$. Найдем теперь все максимальные идеалы нашего кольца. Будем для этого в дальнейшем элементы кольца отмечать функциями $\tilde{f}(u)$. Через функцию $\tilde{f}$ норма выражается формулой

$$\int_0^\infty |\tilde{f}(u)|\operatorname{sh} 2u\,du,$$

так как

$$\int_0^\infty |f(u)|\,\varphi(u)\,du = \int_0^\infty \frac{|f(u)|}{\operatorname{sh} 2u}\,\varphi(u)\cdot \operatorname{sh} 2u\,du = \int_0^\infty |\tilde{f}(u)|\operatorname{sh} 2u\,du.$$

Поэтому введенное здесь кольцо изоморфно кольцу, рассмотренному в § 6. В этом же параграфе были рассмотрены максимальные идеалы кольца R_0. Они задавались формулой

$$\int_0^\infty \tilde{f}(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du,$$

где ρ — комплексное, число $\rho=\rho_1+i\rho_2$, причем $|\rho_2|\leqslant 2$.

Примечание. Отсюда следует, между прочим, что остальные сферические функции, отвечающие данной группе, задаются формулой $\frac{2\operatorname{sh}\rho u}{\rho\operatorname{sh} 2u}$, $0\leqslant\rho\leqslant 2$.

Так как переходу от элемента f к f^* отвечает замена $\tilde{f}(u)$ на $\overline{\tilde{f}}(u)$, то ясно, что в кольце есть несимметричные максимальные идеалы и, следовательно, кольцо несимметрично.

Покажем теперь, что и групповое кольцо R_0 несимметрично.

Для этого заметим, что если элемент $f+\lambda e$ принадлежит подкольцу R_0 и имеет обратный, то этот обратный также принадлежит R_0.

Действительно, пусть элемент $\varphi+e$ кольца R есть обратный элемента $f+e\in R_0$. Докажем, что $\varphi+e\in R_0$, т. е. что функция $\varphi(g)$ постоянна на двусторонних классах смежности по $\mathfrak{H}$. Мы имеем

$$(f+e)\times(\varphi+e)=e.$$

Отсюда

$$\varphi=-f-f\times\varphi,$$

т. е.

$$\varphi(g)=-f(g)-\int f(gg_1^{-1})\,\varphi(g_1)\,dg_1.$$

Но тогда при $h\in\mathfrak{H}$

$$\varphi(hg)=-f(hg)-\int f(hgg_1^{-1})\,\varphi(g_1)\,dg_1=$$
$$=-f(g)-\int f(gg_1^{-1})\,\varphi(g_1)\,dg_1=\varphi(g),$$

ибо $f\in R_0'$. Таким образом, функция $\varphi(g)$ инвариантна при левом сдвиге на $h\in\mathfrak{H}$. Аналогично, пользуясь равенством

$$(\varphi+e)\times(f+e)=e,$$

докажем ее инвариантность при правом сдвиге. Следовательно,

$$\varphi\in R_0',\quad \varphi+e\in R_0.$$

Пусть теперь $x\in R_0$ и $(e+x^*x)^{-1}$ не существует в R_0'. Такой элемент x найдется, так как R_0 несимметрично. Но тогда $(e+x^*x)^{-1}$ не существует также и в R. Несимметричность группового кольца R доказана.

В работе ([9]) показано, что в коммутативных локально бикомпактных группах имеет место теорема Бёрлинга. Приведенный выше пример показывает, что в некоммутативных локально бикомпактных группах эта теорема, вообще говоря, не имеет места.

Пусть R — нормированное кольцо с инволюцией. Будем говорить, что в R имеет место обобщенная теорема Бёрлинга, если для всякого линейного функционала $f(x)$ в кольце R существует неразложимый положительный функционал, который является слабой предельной точкой функционалов $f(xa)$, $a \in R$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы в кольце R имела место обобщенная теорема Бёрлинга, необходимо и достаточно, чтобы R было симметричным кольцом.*

Доказательство необходимости. Пусть R — несимметричное кольцо. Тогда существует элемент x_0 такой, что $(e+x_0^*x_0)^{-1}$ не существует. Следовательно, $e+x_0^*x_0$ принадлежит хотя бы одному максимальному правому идеалу I_r кольца R. Так как $e \bar{\in} I_r$, то существует линейный функционал $f(x)$ такой, что $f(e)=1$, $f(x)=0$ для всех $x \in I_r$. Так как при $x \in I_r$, $a \in R$ также $xa \in I_r$, то $f(xa)=0$ для всех $x \in I_r$. Поэтому и всякая слабая предельная точка $f_0(x)$ функционалов $f_a(x)=f(xa)$ обращается в нуль на I_r.

По предположению, теорема Бёрлинга имеет место, т. е. среди этих предельных точек есть положительный нормированный неразложимый функционал $f_0(x)$. Следовательно, и этот функционал обращается в нуль на I_r. В частности,

$$f_0(e+x_0^*x_0)=0$$

т. е.

$$1+f(x_0^*x_0)=0,$$

что невозможно, ибо $f(x_0^*x_0) \geqslant 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $f(x)$ — некоторый линейный функционал. Обозначим через I_r совокупность всех элементов $x \in R$ таких, что $f(xa)=0$ для всех $a \in R$. Очевидно, I_r — правый идеал в кольце R; согласно ([7]) (см. также ([2])), существует положительный функционал $f_1(x)$ такой, что

$$f_1(e)=1, \quad f_1(xx^*)=0 \quad \text{для} \quad x \in I_r. \tag{2}$$

Совокупность всех функционалов, удовлетворяющих этому условию, есть слабо замкнутое ограниченное выпуклое множество в сопряженном к R пространстве. Согласно теореме Крейна-Мильмана ([6]), это выпуклое множество содержит хотя бы одну крайнюю точку f_0; f_0 есть неразложимый положительный функционал, удовлетворяющий условиям (2). Отсюда следует, что $f_0(x)=0$ для всех $x \in I_r$, т. е. $f_0(x)$ есть слабая предельная точка функционалов $f_0(xa)$.

Нетрудно показать, что если теорема Бёрлинга в формулировке ([9]) имеет место в группе, то в групповом кольце имеет место обобщенная теорема Бёрлинга. Интересно выяснить, имеет ли место обратное.

Из сказанного выше следует, что *в унимодулярной группе второго порядка теорема Бёрлинга не имеет места.* Рассуждения, аналогичные рассуждениям этого параграфа, показывают, что в *любой комплексной полупростой группе Ли теорема Бёрлинга также не имеет места.* Это связано с наличием так называемой дополнительной серии представлений этих групп. (Ср. примечание на стр. 478.)

Примечание при корректуре. После того, как эта работа была сдана в печать, появилась статья J. E. Segal'а в Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 73—88, в которой содержатся некоторые из результатов этой работы.

Поступило
7. VI. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gelfand I., Normierte Ringe, Матем. сб., 9 (51):1 (1941), 3—66.

[2] Gelfand I. and Neumark M., On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, Матем. сб., 12 (54):2 (1943), 197—217.

[3] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 11 (1947), 411—504.

[4] Гельфанд И. М. и Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сб., 13 (55): 2—3 (1943), 301—316.

[5] Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Успехи матем. наук, т. 1, вып. 2 (12) (1946), 48—146.

[6] Krein M. and Milman D., On extreme points of regular convex sets, Studia mathematica, IX (I) (1940), 133—138.

[7] Райков Д. А., К теории нормированных колец с инволюцией, Доклады Ак. Наук СССР, 54, 5 (1946), 391—394.

[8] Neumann J., Über abjungierte Funktionaloperatoren, Annals of Math., 33 (1932), 294—310.

[9] Godement, Extension à un groupe abélien quelconque des théorèmes taubériens N. Wiener et d'un théorème de A. Beurling, C. R. Acad. Sc. Paris (1946), 16—18.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

12 (1948), 481–512

С. С. БЮШГЕНС

ГЕОМЕТРИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПОТОКА ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

Дифференциально-геометрическими средствами изучается стационарный поток идеальной несжимаемой жидкости под действием консервативных внешних сил.

Для стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости как линии тока, так и линии вихря представляют собой неизменные конгруенции линий; существует, как известно, однопараметрическое семейство поверхностей, на каждой из которых располагается одно семейство линий тока и одно семейство вихревых линий, если те и другие

не совпадают; эти поверхности условимся для краткости называть *поверхностями полной энергии.*

В области непрерывности потока указанные конгруенции и поверхности могут быть исследованы обычными в дифференциальной геометрии методами; в результате мы получим, так сказать, *геометрию стационарного потока*, представляющую значительный интерес для выяснения геометрической картины потока (в области его непрерывности),

Я ограничиваюсь пока рассмотрением стационарного потока несжимаемой жидкости, так как в этом случае проще всего отделить кинематические и геометрические элементы потока от динамических; это обстоятельство позволяет поставить ряд кинематических и геометрических задач относительно потока. Разумеется, полученные здесь результаты могут служить руководящей нитью в более общем геометрическом исследовании потока любой изменяемой непрерывной среды.

Имея в виду указанную цель, я считаю наиболее удобным воспользоваться методом Картана, т. е. отнести пространство потока к подвижному триедру, определяя перемещения последнего соотвествующими формами Пфаффа. Установив для этого случая выражения градиента, дивергенции и ротора, легко затем получить гидродинамические уравнения, отнесенные к подвижному произвольному реперу. В дальнейшем для геометрического исследования потока и решения ряда задач мы можем выбирать репер, связывая его с теми или иными инвариантными конгруенциями или инвариантными семействами поверхностей потока.

Несомненно, что некоторые из рассмотренных здесь задач могли бы быть решены довольно просто с помощью обычных гидродинамических уравнений, однако однообразие метода представляет интерес и, кроме того, выбранный геометрический метод референции уже сам по себе наводит на постановку целого ряда разнообразных проблем.

§ 1. Подвижной репер и дифференциальные операторы

1. Свяжем с каждой точкой пространства (трехмерного), определяемой относительно некоторого начала 0 вектором $\overline{M}$, триедр единичных векторов I_1, I_2, I_3; тогда для произвольного элементарного перемещения мы имеем

$$d\overline{M} = \omega_0^\alpha I_\alpha, \quad dI_k = \omega_k^\alpha I_\alpha, \tag{1}$$

где ω_p^q — формы Пфаффа. Между последними всегда можно выбрать три линейно независимых формы; таковыми будут, например, формы ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3, так что

$$\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 \neq 0;$$

здесь в левой части у нас имеется *внешнее* произведение указанных форм.

Так как в дальнейшем мы почти исключительно будем иметь дело с внешними произведениями форм Пфаффа, то для краткости будем опускать обычный знак внешнего произведения — квадратные скобки.

Введенные выше формы Пфаффа должны удовлетворять известным условиям интегрируемости системы (1), именно «условиям структуры»:

$$(\omega_k^i)' = \omega_k^\alpha \omega_\alpha^i, \tag{2}$$

где в левой части имеется внешняя производная соответствующей формы.

Будем считать выбираемый триедр ортогональным, тогда

$$\omega_i^i = 0, \quad \omega_j^i + \omega_i^j = 0,$$

и для краткости примем обозначения:

$$\omega_2^3 = -\omega_3^2 = p = p_\alpha \omega_0^\alpha,$$
$$\omega_3^1 = -\omega_1^3 = q = q_\alpha \omega_0^\alpha,$$
$$\omega_1^2 = -\omega_2^1 = r = r_\alpha \omega_0^\alpha;$$

вектор

$$\Omega = pI_1 + qI_2 + rI_3 \tag{3}$$

будет, как известно, вектором мгновенного вращения репера для выбранного перемещения $d\overline{M}$ его вершины. Отметим, что для ортогонального репера вторая группа уравнений (1) и уравнения структуры будут:

$$\left.\begin{aligned} dI_1 &= rI_2 - qI_3, & (\omega_0^1)' &= r\omega_0^2 - q\omega_0^3, & p' &= rq, \\ dI_2 &= pI_3 - rI_1, & (\omega_0^2)' &= p\omega_0^3 - r\omega_0^1, & q' &= pr, \\ dI_3 &= qI_1 - pI_2, & (\omega_0^3)' &= q\omega_0^1 - p\omega_0^2, & r' &= qp. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

2. Пусть градиент какой-либо функции φ изображается по взаимным векторам I^1, I^2, I^3 выбранной основной тройки I_1, I_2, I_3 в виде

$$\operatorname{grad} \varphi = A_\alpha I^\alpha; \tag{5}$$

тогда он должен удовлетворять условию

$$A_\alpha I^\alpha d\overline{M} \equiv d\varphi \tag{6}$$

или

$$A_\alpha \omega_0^\alpha \equiv d\varphi.$$

Умножая последнее соотношение внешним образом поочередно на внешние произведения $\omega_0^2\omega_0^3$, $\omega_0^3\omega_0^1$, $\omega_0^1\omega_0^2$, мы определим коэффициенты A_1, A_2, A_3 и тогда выражение градиента функции через основные формы Пфаффа и $d\varphi$ получится в виде

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{I^1\omega_0^2\omega_0^3\, d\varphi + I^2\omega_0^3\omega_0^1\, d\varphi + I^3\omega_0^1\omega_0^2\, d\varphi}{\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3}. \tag{7}$$

3. Обозначим через $d\tau$ элемент объема, а через $\overline{d\sigma}$ — вектор элемента поверхности; дивергенцию какого-либо вектора $\overline{V}$ мы можем получить с помощью теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\iiint \operatorname{div} \overline{V}\, d\tau = \oiint \overline{V}\, \overline{d\sigma}, \tag{8}$$

применив ее к объему параллелепипеда, образованного в какой-либо точке пространства векторами трех произвольных элементарных перемещений $d_1\overline{M}$, $d_2\overline{M}$, $d_3\overline{M}$.

Нетрудно видеть, что элемент объема будет

$$d\tau = d_1\overline{M}\, d_2\overline{M}\, d_3\overline{M} = \omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 I_1 I_2 I_3; \tag{9}$$

элемент поверхности в точке $\overline{M}$, образованный векторами $d_2\overline{M}$ и $d_3\overline{M}$, будет

$$\overline{d\sigma}_{23} = d_2\overline{M} \times d_3\overline{M};$$

противолежащий же ему элемент поверхности в точке $\overline{M} + d_1\overline{M}$ будет

$$\overline{d\sigma}_{23} + d_1(\overline{d\sigma}_{23}).$$

Для замкнутой поверхности, ограничивающей элемент объема $d\tau$, мы должны иметь

$$\overline{d\sigma}_{23} + d_1(\overline{d\sigma}_{23}) + \overline{d\sigma}_{32} + \overline{d\sigma}_{31} + d_2(\overline{d\sigma}_{31}) + \overline{d\sigma}_{13} + \overline{d\sigma}_{12} + d_3(\overline{d\sigma}_{12}) + \overline{d\sigma}_{21} = 0,$$

откуда

$$d_1(\overline{d\sigma}_{23}) + d_2(\overline{d\sigma}_{31}) + d_3(\overline{d\sigma}_{12}) = 0. \tag{10}$$

Развертывая соотношение (8) для указанного объема $d\tau$, мы получим

$$\operatorname{div}\overline{V}\,d\tau = (\overline{V} + d_1\overline{V})(\overline{d\sigma}_{23} + d_1\,\overline{d\sigma}_{23}) + \overline{V}\,\overline{d\sigma}_{32} + (\overline{V} + d_2\overline{V})(\overline{d\sigma}_{31} + d_2\overline{d\sigma}_{31}) +$$
$$+ \overline{V}\,\overline{d\sigma}_{13} + (\overline{V} + d_3\overline{V})(\overline{d\sigma}_{12} + d_3\,\overline{d\sigma}_{12}) + \overline{V}\,\overline{d\sigma}_{21}$$

или после упрощений

$$\operatorname{div}\overline{V}\,d\tau = d_1\overline{V}\,d_2\overline{M}\,d_3\overline{M} + d_2\overline{V}\,d_3\overline{M}\,d_1\overline{M} + d_3\overline{V}\,d_1\overline{M}\,d_2\overline{M}. \tag{11}$$

Положим теперь

$$\overline{V} = V^\alpha I_\alpha; \tag{12}$$

тогда

$$d\overline{V} = (dV^\alpha + V^\beta\omega_\beta^\alpha)\,I_\alpha \tag{13}$$

и формула (11) примет вид:

$$\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3\operatorname{div}\overline{V} = \begin{vmatrix} d_1V^1 + V^\beta\overset{1}{\omega}{}_\beta^1 & \overset{2}{\omega}{}_0^1 & \overset{3}{\omega}{}_0^1 \\ d_1V^2 + V^\beta\overset{1}{\omega}{}_\beta^2 & \overset{2}{\omega}{}_0^2 & \overset{3}{\omega}{}_0^2 \\ d_1V^3 + V^\beta\overset{1}{\omega}{}_\beta^3 & \overset{2}{\omega}{}_0 & \overset{3}{\omega}{}_0^3 \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} d_2V^1 + V^\beta\overset{2}{\omega}{}_\beta^1 & \overset{3}{\omega}{}_0^1 & \overset{1}{\omega}{}_0^1 \\ d_2V^2 + V^\beta\overset{2}{\omega}{}_\beta^2 & \overset{3}{\omega}{}_0^2 & \overset{1}{\omega}{}_0^2 \\ d_2V^3 + V^\beta\overset{2}{\omega}{}_\beta^3 & \overset{3}{\omega}{}_0^3 & \overset{1}{\omega}{}_0^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_3V^1 + V^\beta\overset{3}{\omega}{}_\beta^1 & \overset{1}{\omega}{}_0^1 & \overset{2}{\omega}{}_0^1 \\ d_3V^2 + V^\beta\overset{3}{\omega}{}_\beta^2 & \overset{1}{\omega}{}_0^2 & \overset{2}{\omega}{}_0^2 \\ d_3V^3 + V^\beta\overset{3}{\omega}{}_\beta^3 & \overset{1}{\omega}{}_0^3 & \overset{2}{\omega}{}_0^3 \end{vmatrix};$$

здесь через $\overset{i}{\omega}{}_p^q$ мы временно обозначим ω_p^q, взятую для перемещения d_i. Производя перегруппировку членов в правой части полученного соотношения, мы окончательно найдем:

$$\omega^1\omega_0^2\omega_0^3\operatorname{div}V = (dV^1 + V^\beta\omega_\beta^1)\,\omega_0^2\omega_0^3 +$$
$$+ (dV^2 + V^\beta\omega_\beta^2)\,\omega_0^3\omega^1 + (dV^3 + V^\beta\omega_\beta^3)\,\omega_0^1\omega_0^2, \tag{14}$$

где в правой части теперь мы имеем внешние произведения указанных форм Пфаффа.

Для ортогонального репера соответствующая формула примет вид

$$\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3\operatorname{div}\overline{V} = (dV^1 - V^2r + V^3q)\,\omega_0^2\omega_0^3 +$$
$$+ (dV^2 - V^3p + V^1r)\,\omega_0^3\omega_0^1 + (dV^3 - V^1q + V^2p)\,\omega_0^1\omega_0^2. \tag{14*}$$

4. Аналогичным образом мы можем найти выражение ротора какого-либо вектора $\overline{V}$ с помощью формулы

$$\iiint \operatorname{rot} \overline{V}\, d\tau = -\oiint \overline{V} \times \overline{d\sigma}. \qquad (15)$$

Применяя ее к вышеуказанному объему (9), получим

$$-\operatorname{rot} \overline{V}\, d\tau = (\overline{V} + d_1\overline{V}) \times (\overline{d\sigma}_{23} + d_1\overline{d\sigma}_{23}) + \overline{V} \times \overline{d\sigma}_{32} + \\ + (\overline{V} + d_2\overline{V}) \times (\overline{d\sigma}_{31} + d_2\overline{d\sigma}_{31}) + \overline{V} \times \overline{d\sigma}_{13} + \\ + (\overline{V} + d_3\overline{V}) \times (\overline{d\sigma}_{12} + d_3\overline{d\sigma}_{12}) + \overline{V} \times \overline{d\sigma}_{21}$$

или, на основании соотношения (10),

$$-\operatorname{rot} \overline{V}\, d\tau = d_1\overline{V} \times (d_2\overline{M} \times d_3\overline{M}) + d_2\overline{V} \times (d_3\overline{M} \times d_1\overline{M}) + \\ + d_3\overline{V} \times (d_1\overline{M} \times d_2\overline{M}).$$

Преобразуя известным образом последовательные векторные произведения, мы найдем

$$-\operatorname{rot} \overline{V}\, d\tau = d_2\overline{M}\,(d_1\overline{V} d_3\overline{M}) - d_3\overline{M}\,(d_1\overline{V} d_2\overline{M}) + d_3\overline{M}\,(d_2\overline{V} d_1\overline{M}) - \\ - d_1\overline{M}\,(d_2\overline{V} d_3\overline{M}) + d_1\overline{M}\,(d_3\overline{V} d_2\overline{M}) - d_2\overline{M}\,(d_3\overline{V} d_1\overline{M}),$$

где в скобках заключены скалярные произведения. Предыдущий результат, очевидно, можно представить в условно сокращенной форме

$$\operatorname{rot} \overline{V}\, d\tau = d_1\overline{M}\,\{(dV^\alpha + V^\beta\omega_\beta^\alpha)\,\omega_0^\gamma\}_{23} I_\alpha I_\gamma + \\ + d_2\overline{M}\,\{(dV^\alpha + V^\beta\omega_\beta^\alpha)\,\omega_0^\gamma\}_{31} I_\alpha I_\gamma + d_3\overline{M}\,\{(dV^\alpha + V^\beta\omega_\beta^\alpha)\,\omega_0^\gamma\}_{12} I_\alpha I_\gamma,$$

где индексы скобок обозначают номера смещений d_1, d_2, d_3, по которым надо составлять внешние произведения форм Пфаффа.

Окончательное выражение ротора представится в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \overline{V}\, d\tau = -I_\alpha \omega_0^\alpha \omega_0^\beta\,(dV^\gamma + V^\delta\omega_\delta^\gamma)\,(I_\beta I_\gamma), \qquad (16)$$

где в правой части содержатся лишь внешние произведения форм и должно быть произведено суммирование по каждому индексу; в частности, для ортогонального репера получим

$$-\operatorname{rot} \overline{V}\, d\tau = I_1\,\{\omega_0^1\omega_0^2\,(dV^2 - V^3p + V^1r) + \omega_0^1\omega_0^3\,(dV^3 - V^1q + V^2p)\} + \\ + I_2\,\{\omega_0^2\omega_0^3\,(dV^3 - V^1q + V^2p) + \omega_0^2\omega_0^1\,(dV^1 - V^2r + V^3q)\} + \\ + I_3\,\{\omega_0^3\omega_0^1\,(dV^1 - V^2r + V^3q) + \omega_0^3\omega_0^2\,(dV^2 - V^3p + V^1r)\}. \qquad (16^*)$$

§ 2. Уравнения гидродинамики

1. Полученные выше формулы для градиента, дивергенции и ротора позволяют преобразовать основные уравнения гидродинамики, относя стационарный поток к произвольно выбираемому реперу; в частности, конечно, преобразованные уравнения дадут уравнения гидродинамики в произвольной криволинейной системе координат. В дальнейшем мы будем брать ортогональные реперы.

Уравнение неразрывности потока несжимаемой жидкости представится в виде

$$(dV^1 - V^2 r + V^3 q)\,\omega_0^2\omega_0^3 + (dV^2 - V^3 p + V^1 r)\,\omega_0^3\omega_0^1 + \\ + (dV^3 - V^1 q + V^2 p)\,\omega_0^1\omega_0^2 = 0, \qquad \text{(I)}$$

если вектор (12) считать за вектор скорости.

Выберем I_3 по направлению касательной линии тока, тогда

$$\overline{V} = VI_3, \qquad (17)$$

где V — величина скорости; в этом случае формула (I) дает

$$\frac{dV}{V}\,\omega_0^1\omega_0^2 = (p_2 - q_1)\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3$$

или

$$\left(\frac{d\ln V}{ds}\right)_{\substack{\omega_0^1=0\\ \omega_0^2=0}} = p_2 - q_1. \qquad (18)$$

Но $p_2 - q_1$ есть средняя кривизна линий тока, таким образом соотношение (18) обозначает, что:

в каждой точке потока логарифмическая производная от величины скорости по направлению линии тока равна средней кривизне конгруенции линий тока.

Конгруенцию линий, для которой $p_2 - q_1 = 0$, назовем *минимальной конгруенцией*; формула (18) показывает, что

если величина скорости потока постоянна вдоль каждой линии тока (меняясь от одной линии тока к другой), *то конгруенция линий тока есть минимальная конгруенция*. Наоборот, *если конгруенция линий тока минимальная, то величина скорости потока сохраняется вдоль каждой отдельной линии тока.*

Так как дивергенция вихря тоже равна нулю, то *аналогичные теоремы существуют по отношению к величине вихря и конгруенции вихревых линий.*

2. Пусть вихревой вектор $\overline{\omega}$ по ортам репера изображается в виде:

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\overline{V} = \frac{1}{2}\,\omega^\alpha I_\alpha, \qquad (19)$$

тогда формула (16*) определит двойные компоненты вихря:

$$\left.\begin{aligned} -\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3\cdot\omega^1 &= \omega_0^1\omega_0^2\,(dV^2 - V^3 p + V^1 r) + \omega_0^1\omega_0^3\,(dV^3 - V^1 q + V^2 p),\\ -\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3\cdot\omega^2 &= \omega_0^2\omega_0^3\,(dV^3 - V^1 q + V^2 p) + \omega_0^2\omega_0^1\,(dV^1 - V^2 r + V^3 q),\\ -\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3\cdot\omega^3 &= \omega_0^3\omega_0^1\,(dV^1 - V^2 r + V^3 q) + \omega_0^3\omega_0^2\,(dV^2 - V^3 p + V^1 r).\end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

Предположим опять, что I_3 имеет направление по касательной линии тока, тогда последняя из предыдущих формул дает

$$\frac{\omega^3}{V} = -(p_1 + q_2); \qquad (20)$$

но полная кривизна K_t и гауссова кривизна K_g конгруенции линий*,

* Геометрические свойства векторного поля (или конгруенции линий), которыми я пользуюсь в этой работе, разобраны в моей статье «Геометрия векторного поля», Изв. Ак Наук СССР, сер. матем., 10 (1946), 73—96.

огибаемых векторами поля (I_3), имеют выражения

$$K_t = p_1 q_2 - p_2 q_1, \quad K_g = p_1 q_2 - p_2 q_1 - \frac{1}{4}(p_1 + q_2)^2,$$

так что

$$\sqrt{K_t - K_g} = \frac{1}{2} | p_1 + q_2 |.$$

Итак, *отношение проекции вихря на касательную линии тока к величине скорости есть некоторый геометрический инвариант конгруенции линий тока, определенным образом связанный с полной и гауссовой кривизной последней.*

3. Будем предполагать, что внешние силы $\overline{F}$, действующие на жидкость, консервативны, т. е. имеют потенциал U, так что

$$\overline{F}\, d\overline{M} = -dU,$$

величину

$$H = \frac{1}{2} V^2 + U + \frac{p}{\rho} \tag{21}$$

будем называть *полной энергией частицы*; в таком случае уравнения Lamb-Громеки, как известно, можно записать в векторной форме:

$$\operatorname{grad} H = 2\overline{V} \times \overline{\omega}. \tag{22}$$

Умножая это состношение скалярно *на произвольное перемещение* $d\overline{M}$, мы получим

$$dH = 2\,\overline{V}\,\overline{\omega}\, d\overline{M} \tag{III}$$

или

$$dH = \begin{vmatrix} V^1 & \omega^1 & \omega_0^1 \\ V^2 & \omega^2 & \omega_0^2 \\ V^3 & \omega^3 & \omega_0^3 \end{vmatrix}. \tag{III*}$$

Из уравнения (III) можно получить более полные и отчетливые предложения, которые соответствуют обычной теореме (или «интегралу») Бернулли. Это уравнение прежде всего показывает, что *функция H постоянна* для любого перемещения точки потока, а следовательно, *во всем пространстве потока, если* $\overline{V} \times \overline{\omega} = 0$, т. е. *либо для безвихревого потока* ($\overline{\omega} = 0$), *либо для винтового потока* (в котором вихрь имеет направление скорости или, что то же самое, вихревые линии совпадают с линиями тока); случай $\overline{V} = 0$, как случай покоя, мы оставляем в стороне.

Далее, правая часть формулы (III), а следовательно, и левая, в любом потоке обращается в нуль для специальных перемещений, направление которых совпадает либо с направлением скорости, либо с направлением вихря, либо с любым направлением, *компланарным*

тому и другому; все такие перемещения лежат на поверхностях семейства («постоянной энергии»)

$$H = \text{const}, \tag{23}$$

которые характеризуются тем, что на них располагаются все линии тока и все вихревые линии. Таким образом, каждая из поверхностей (23) содержит одно семейство линий тока и одно семейство вихревых линий.

4. Гидродинамические уравнения Гельмгольца можно изобразить одним векторным соотношением:

$$(\overline{V}\,\text{grad})\,\overline{\omega} = (\overline{\omega}\,\text{grad})\,\overline{V}, \tag{24}$$

где скобками обозначено скалярное произведение вектора на оператор «набля».

Развертывая указанные скалярные произведения по формуле (7), мы получим

$$2\theta_{\overline{V}} d\overline{\omega} = \theta_{\overline{\omega}} d\overline{V}, \tag{24'}$$

где через $\theta_{\overline{V}}$ и $\theta_{\overline{\omega}}$ для краткости обозначены билинейные внешние формы

$$\left.\begin{aligned} \theta_{\overline{V}} &= V^1\omega_0^2\omega_0^3 + V^2\omega_0^3\omega_0^1 + V^3\omega_0^1\omega_0^2, \\ \theta_{\overline{\omega}} &= \omega^1\omega_0^2\omega_0^3 + \omega^2\omega_0^3\omega_0^1 + \omega^3\omega_0^1\omega_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Из условия (19) следует

$$2d\overline{\omega} = (d\omega^\alpha + \omega^\beta\omega_\beta^\alpha)\, I_\alpha;$$

таким образом, уравнение (24′) распадается на *три обобщенных* уравнения Гельмгольца в произвольной системе референции:

$$\theta_{\overline{V}}\,(d\omega^k + \omega^\beta\omega_\beta^k) = \theta_{\overline{\omega}}(dV^k + V^\beta\omega_\beta^k) \quad (k = 1,\ 2,\ 3); \tag{IV}$$

в частности, для ортогонального репера мы получим три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \theta_{\overline{V}}\,(d\omega^1 - \omega^2 r + \omega^3 q) &= \theta_{\overline{\omega}}\,(dV^1 - V^2 r + V^3 q), \\ \theta_{\overline{V}}\,(d\omega^2 - \omega^3 p + \omega^1 r) &= \theta_{\overline{\omega}}\,(dV^2 - V^3 p + V^1 r), \\ \theta_{\overline{V}}\,(d\omega^3 - \omega^1 q + \omega^2 p) &= \theta_{\overline{\omega}}\,(dV^3 - V^1 q + V^2 p). \end{aligned}\right\} \tag{IV**}$$

Разумеется, уравнения Гельмгольца (например, в последней форме) мы могли бы получить непосредственно из уравнения (III*), дифференцируя его внешним образом и используя соотношения

$$\text{div}\,\overline{V} = 0, \quad \text{div}\,\overline{\omega} = 0.$$

Из сказанного выше ясно, что при исследовании стационарного потока мы легко можем освободиться от его динамических элементов (силового поля и поля давлений), сохраняя только кинематические (поле скоростей, поле вихрей) и геометрические его элементы, двумя путями: либо введя в рассмотрение семейство поверхностей, на которых располагаются линии тока и вихревые линии, либо взяв уравнения Гельмгольца, как условия интегрируемости уравнения (III*).

§ 3. Семейство поверхностей постоянной полной энергии

1. Считая поток вихревым, а потому *имеющим* семейство поверхностей, содержащих все линии тока и все вихревые линии, выберем за поле векторов (I_3) *поле нормалей* к этому семейству поверхностей. Дифференциальное уравнение последнего будет

$$I_3\, d\overline{M} \equiv \omega_0^3 = 0; \tag{26}$$

так как оно должно быть вполне интегрируемо, то

$$(\omega_0^3)'\, \omega_0^3 = 0 \tag{27}$$

или

$$p_1 + q_2 = 0; \tag{27'}$$

это условие обозначает, что *линии кривизны поля* (I_3) *ортогональны и будут линиями кривизны на поверхностях* (26).

Форма ω_0^3, удовлетворяющая условию (27), должна быть вида

$$\omega_0^3 \equiv C\, dc, \tag{28}$$

т. е. она должна отличаться от полного дифференциала лишь некоторым множителем; при этом, в силу уравнения структуры,

$$\frac{dC}{C}\, \omega_0^3 = q\omega_0^1 - p\omega_0^2. \tag{29}$$

Так как линии тока и вихревые линии лежат на поверхностях (26), то мы можем положить

$$\overline{V} = V\, (I_1 \cos\sigma + I_2 \sin\sigma), \quad 2\overline{\omega} = \operatorname{rot} \overline{V} = \omega^1 I_1 + \omega^2 I_3, \quad \omega^3 = 0. \tag{30}$$

Уравнение Lamb-Громеки показывает, что H должно быть некоторой функцией параметра c:

$$H = f(c) \tag{31}$$

и тогда оно дает

$$CV\, (-\omega^1 \sin\sigma + \omega^2 \cos\sigma) = f'(c). \tag{32}$$

Уравнения компонентов вихря будут

$$-\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 \cdot \frac{\omega^1}{V} = \omega_0^1\omega_0^2 \left\{ \sin\sigma \frac{dV}{V} + \cos\sigma\, (d\sigma + r) \right\} + \omega_0^3\omega_0^1\, (q\cos\sigma - p\sin\sigma),$$

$$-\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 \frac{\omega^2}{V} = \omega_0^1\omega_0^2 \left\{ -\cos\sigma \frac{dV}{V} + \sin\sigma\, (d\sigma + r) \right\} - \omega_0^2\omega_0^3\, (q\cos\sigma - p\sin\sigma),$$

$$0 = \omega_0^3\omega_0^1 \left\{ -\cos\sigma \frac{dV}{V} + \sin\sigma\, (d\sigma + r) \right\} + \\ + \omega_0^2\omega_0^3 \left\{ \sin\sigma \frac{dV}{V} + \cos\sigma\, (d\sigma + r) \right\};$$

наконец, уравнение неразрывности принимает вид:

$$\left\{ \cos\sigma \frac{dV}{V} - \sin\sigma\, (d\sigma + r) \right\} \omega_0^2\omega_0^3 + \left\{ \sin\sigma \frac{dV}{V} + \cos\sigma\, (d\sigma + r) \right\} \omega_0^3\omega_0^1 + \\ + (p\sin\sigma - q\cos\sigma)\, \omega_0^1\omega_0^2 = 0.$$

Положим для краткости

$$L = p_2 \sin^2 \sigma + (p_1 - q_2) \sin \sigma \cos \sigma - q_1 \cos^2 \sigma,$$
$$N = p_3 \sin \sigma - q_3 \cos \sigma;$$

нетрудно убедиться, что L будет нормальной кривизной линии тока; далее, если мы рассмотрим конгруенцию линий, ортогональных к семейству поверхностей (28) (т. е. огибаемых векторами поля (I_3)), то вектор кривизны такой линии будет

$$\left(\frac{dI_3}{ds}\right)_{\substack{\omega_0^1=0\\ \omega_0^2=0}} = q_3 I_1 - p_3 I_2;$$

его проекция на направление скорости равна

$$(q_3 I_1 - p_3 I_2)\,\frac{\overline{V}}{V} = q_3 \cos \sigma - p_3 \sin \sigma = -N.$$

Удовлетворяя всем указанным выше гидродинамическим уравнениям, мы должны принять:

$$\frac{dV}{V} = \xi\omega_0^1 + \eta\omega_0^2 + \left(L + \frac{f'}{CV^2}\right)\omega_0^3,$$
$$d\sigma + r = (\eta + N \sin \sigma)\,\omega_0^1 - (\xi + N \cos \sigma)\,\omega_0^2 + \zeta\omega_0^3, \tag{33}$$

где ξ, η, ζ — новые неизвестные (функции), которые должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялись условия интегрируемости уравнений (33).

Эти уравнения представляют собой основные кинематические уравнения потока в данной референции и могут служить исходными уравнениями при изучении потока и допустимого семейства поверхностей (26).

Мне представляется, что было бы весьма интересно решение двух основных проблем (не легких!): 1) установить общую геометрическую характеристику такого семейства поверхностей, на которых могут располагаться как линии тока, так и вихревые линии какого-либо потока, и 2) найти такое семейство поверхностей, на котором можно построить бесчисленное множество потоков.

2. Возвращаясь к системе (33), предположим, в частности, что $\sigma = 0$, т. е. что векторы I_1 выбраны по касательным к линиям тока; можно сказать, что в этом случае мы считаем на поверхностях постоянной энергии заданными линии тока.

При $\sigma = 0$ второе из уравнений (33) дает

$$\xi = q_3 - r_2, \quad \eta = r_1,$$

а потому первое уравнение принимает вид:

$$\frac{dV}{V} = (q_3 - r_2)\,\omega_0^1 + r_1\omega_0^2 + \left(-q_1 + \frac{f'}{CV^2}\right)\omega_0^3. \tag{34}$$

Дифференцируя внешним образом это уравнение, мы получим условие его интегрируемости:

$$(dq_3 - dr_2)\,\omega_0^1 + dr_1\omega_0^2 - dq_1\omega_0^3 + (q_3 - r_2)\,(r\omega_0^2 - q\omega_0^3) +$$
$$+ r_1\,(p\omega_0^2 - r\omega_0^1) - q_1\,(q\omega_0^1 - p\omega_0^2) - \frac{2I'}{CV^2}\,\{(q_3 - r_2)\,\omega_0^1 - r_1\omega_0^2\}\,\omega_0^3 = 0; \qquad (35)$$

это последнее, вообще говоря, определяет V^2, следовательно, *на каждом семействе поверхностей полной энергии и заданных на них линиях тока мы получим вообще два потока с равнопротивоположными скоростями.*

3. Условие (35) не будет определять V^2 в том случае, когда

$$q_3 - r_2 = 0, \quad r_1 = 0, \qquad (36)$$

но эти равенства показывают, что $dV = 0$ на каждой поверхности $\omega_0^3 = 0$ и наоборот, если $dV\omega_0^3 = 0$, то должны выполняться условия (36) и тогда соотношение (35) не определяет V^2.

Итак, *на семействе поверхностей полной энергии с заданными на них линиями тока можно построить бесчисленное множество потоков* (с одним существенным произвольным постоянным) *только в том случае, когда величина скорости постоянна на каждой поверхности постоянной полной энергии* (и обратно).

При условии (36) соотношение (35) дает

$$(q_1\omega_0^3)' = 0. \qquad (37)$$

Первое из условий (36) обозначает, что средняя кривизна векторного поля (I_1) равна нулю, т. е. конгруенция линий токов есть минимальная конгруенция.

Второе из условий (36) обозначает, что линии тока на поверхностях постоянной полной энергии будут геодезическими линиями, поэтому главные нормали линий токов направлены по нормалям поверхностей полной энергии.

Так как

$$\operatorname{grad} \varphi\, d\overline{M} = d\varphi,$$

то условие (37) можно истолковать как условие того, что вектор $q_1 I_3$ есть градиент семейства поверхностей полной энергии. Но вектор кривизны линий тока ($\omega_0^2 = \omega_0^3 = 0$) будет

$$\frac{dI_1}{ds} = \frac{dI_1}{\omega_0^1} = r_1 I_2 - q_2 I_3;$$

таким образом, в нашем случае вектор кривизны линий тока должен быть градиентом соответствующей поверхности полной энергии.

Итак, *для того чтобы величина скорости потока была постоянной на каждой поверхности полной энергии, необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1) *конгруенция линий тока должна быть минимальной,*

2) *в каждой точке потока вектор кривизны линии тока должен быть градиентом соответствующей поверхности полной энергии.*

Минимальную конгруенцию, в которой векторы кривизны линий являются градиентами некоторого семейства поверхностей, назовем

специальной минимальной конгруенцией; если векторы кривизны линий минимальной конгруенции допускают семейство ортогональных поверхностей, то такую конгруенцию назовем *полуспециальной минимальной конгруенцией*. Обе эти конгруенции представляют собой интерес в геометрии потока и к их более подробному исследованию мы вернемся в дальнейшем.

4. Поставим теперь следующую частную задачу: *предполагая, что скорость постоянна на каждой поверхности полной энергии, определим семейство последних так, чтобы на нем можно было построить бесчисленное множество конгруенций линий токов.* Воспользуемся основной системой (33); так как предполагается, что

$$dV\omega_0^3 = 0,$$

то необходимо

$$\xi = \eta = 0.$$

Мы можем считать, что I_1 и I_2 выбраны по линиям кривизны поверхностей (26), поэтому

$$p_1 = q_2 = 0. \tag{38}$$

Итак, система (33) примет вид:

$$\frac{dV}{V} = \left(p_2 \sin^2\sigma - q_1 \cos^2\sigma + \frac{f'}{CV^2} \right) \omega_0^3,$$

$$d\sigma + r = (p_3 \sin\sigma - q_3 \cos\sigma)(\sin\sigma\omega_0^1 - \cos\sigma\omega_0^2) + \zeta\omega_0^3; \tag{39}$$

условия ее интегрируемости будут:

$$\sin^2\sigma \{dp_2\omega_0^3 + p_2(q\omega_0^1 - p\omega_0^2)\} - 2s\sin\sigma\cos\sigma r\omega_0^3 -$$
$$- \{dq_1\omega_0^3 + q_1(q\omega_0^1 - p\omega_0^2)\}\cos^2\sigma + 2sN\sin\sigma\cos\sigma(\sin\sigma\omega_0^1 - \cos\sigma\,\omega_0^2)\omega_0^3 = 0, \tag{40}$$

$$\sin^2\sigma\{(dp_3 - q_3 r)\,\omega_0^1 - p_3 q\omega_0^3 + pq + p_3^2\omega_0^1\omega_0^2\} +$$
$$+ 2\zeta(p_3\cos\sigma + q_3\sin\sigma)(\omega_0^3\omega_0^1\sin\sigma + \omega_0^3\omega_0^3\cos\sigma) +$$
$$+ \cos^2\sigma\{(dq_3 + p_3 r)\,\omega_0^2 + q_3 p\omega_0^3 + pq + q_3^2\omega_0^1\omega_0^2\} + d\zeta\omega_0^3 +$$
$$+ \sin\sigma\cos\sigma\{(-dp_3 + q_3 r)\,\omega_0^2 - (dq_3 + p_3 r)\,\omega_0^1 - p_3 p\omega_0^3 +$$
$$+ q_3 q\omega_0^3 - 2p_3 q_3\omega_0^1\omega_0^2\} = 0, \tag{41}$$

где для краткости принято $s = p_2 + q_1$.

Последнее из этих условий умножим внешним образом на ω_0^3, тогда

$$\sin^2\sigma\{(dp_3 - q_3 r)\,\omega_0^1\omega_0^3 + pq\omega_0^3 + p_3^2\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3\} +$$
$$+ \cos^2\sigma\{(dq_3 + p_3 r)\,\omega_0^2\omega_0^3 + pq\omega_0^3 + q_3^2\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3\} -$$
$$- \sin\sigma\cos\sigma\{(dp_3 - q_3 r)\,\omega_0^2\omega_0^3 + (dq_3 + p_3 r)\,\omega_0^1\omega_0^3 + 2p_3 q_3\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3\} = 0. \tag{41'}$$

Как соотношение (40), так и (41′) не должно давать конечных уравнений для функции σ на заданном семействе поверхностей, откуда мы получаем ряд условий, к которым надо присоединить и уравнения структуры. Всем этим условиям, как нетрудно убедиться, можно удовлетворить только предположениями:

$$p_3 = q_3 = 0, \quad r = 0, \quad p_2 q_1 = 0;$$

оба случая $p_2=0$ или $q_1=0$, очевидно, симметричны. Считая, например, $p_2=0$, мы получим следующую систему:

$$p=r=0, \quad q=q_1\omega_0^1, \quad dI_1=-qI_3, \quad dI_2=0, \quad dI_3=qI_1,$$
$$dq_1\omega_0^1+q_1^2\omega_0^3\omega_0^1=0, \quad dq_1\omega_0^3=0,$$
$$\frac{dV}{V}=\left(-q_1\cos^2\sigma+\frac{f'}{CV^2}\right)\omega_0^3, \quad d\sigma=\zeta\omega_0^3.$$

Решая эти уравнения, найдем

$$\omega_0^1=\frac{d\theta}{q_1}, \quad \omega_0^3=-\frac{dq_1}{q_1^2}, \quad q=d\theta,$$
$$I_1=-i\sin\theta+k\cos\theta, \quad I_2=j, \quad I_3=i\cos\theta+k\sin\theta,$$
$$\overline{M}=\frac{I_3}{q_1}+jy=i\frac{\cos\theta}{q_1}+jy+k\frac{\sin\theta}{q_1}, \quad \sigma=\sigma(q_1),$$

где σ — произвольная функция параметра q_1. Отсюда следует, что семейство поверхностей полной энергии состоит из соосных круглых цилиндров ($q_1=\text{const}$), линии тока будут винтовыми линиями на них, причем их наклон к образующим, будучи постоянным на каждом отдельном цилиндре, меняется от одной поверхности к другой по произвольно выбранному закону.

5. В качестве еще одного применения наших основных уравнений поставим задачу: *определить стационарный поток, для которого семейство поверхностей полной энергии, некоторое семейство поверхностей токов и некоторое семейство вихревых поверхностей образуют тройно-ортогональную систему.*

Пусть векторы репера выбраны по нормалям поверхностей тройно-ортогональной системы; тогда

$$\overline{V}=VI_1, \quad 2\overline{\omega}=2\omega I_2$$

и каждое из уравнений

$$\omega_0^1=0, \quad \omega_0^2=0, \quad \omega_0^3=0$$

изображает одно из семейств тройно-ортогональной системы; в таком случае

$$(\omega_0^1)'\,\omega_0^1=0, \quad (\omega_0^2)'\,\omega_0^2=0, \quad (\omega_0^3)'\,\omega_0^3=0$$

или

$$p_1=q_2=r_3=0. \tag{42}$$

Уравнение (32) дает

$$2\omega=\frac{f'(c)}{CV^2},$$

величина скорости будет удовлетворять уравнению (34), условие интегрируемости которого представится уравнением (35). Умножая последнее внешним образом на ω_0^1 и принимая во внимание условие (42) и уравнения структуры, мы получим

$$r_1=0 \tag{43}$$

т. е. линии тока — геодезические на поверхностях $\omega_0^3 = 0$, а потому они и плоские, ибо они одновременно и линии кривизны.

При $r_1 = r_3 = 0$ уравнение структуры $r' = qp$ дает

$$p_2 q_1 = 0$$

и мы должны последовательно разобрать два предположения: либо $p_3 = 0$, либо $q_1 = 0$.

Случай I. $p_1 = p_3 = q_2 = r_1 = r_3 = 0 \quad (q_1 \neq 0)$.

При этих условиях соотношение (35) дает два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} (dq_3 - dr_2)\,\omega_0^1\omega_0^2 + dq_1\omega_0^2\omega_0^3 + \left\{-q_1 r_2 + \frac{2f'}{CV^2}(q_3 - r_2)\right\}\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0, \\ (dq_3 - dr_2)\,\omega_0^3\omega_0^1 = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

а уравнения структуры будут:

$$\left.\begin{aligned} \{dp_2 + sr_2\omega_0^1 - (p_2^2 - q_3 r_2)\,\omega_0^3\}\,\omega_0^2 = 0, \\ dq_1\omega_0^1 + dq_3\omega_0^3 + (q_1^2 + q_2^2)\,\omega_0^3\omega_0^1 = 0, \\ \{dr_2 + (r_2^2 - p_2 q_1)\omega_0^1 - p_2 (r_2 + q_3)\,\omega_0^3\}\,\omega_0^3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

На основании уравнений структуры, мы можем положить

$$\left.\begin{aligned} dp_2 + r_2 q + p_2 (r_2\omega_0^1 - p_2\omega_0^2) = \xi\omega_0^2, \\ dr_2 - p_2 q + r_2 (r_2\omega_0^1 - p_2\omega_0^3) = \eta\omega_0^2, \end{aligned}\right\} \qquad (46)$$

но, в силу второго из уравнений (44) и второго из уравнений (45), мы имеем $\eta = 0$. Дифференцируя же внешним образом второе из уравнений (46), получим $\xi = 0$ и тогда условия интегрируемости обоих уравнений (46) будут выполнены.

Положим теперь

$$p_2 = \frac{\cos\varphi}{\sigma}, \quad r_2 = \frac{\sin\varphi}{\sigma};$$

уравнения (46) дадут

$$q = d\varphi, \quad \sin\varphi\omega_0^1 - \cos\varphi\omega_0^3 = d\sigma. \qquad (46')$$

Введем два новых ортогональных вектора:

$$\bar{\eta} = I_1 \sin\varphi - I_3 \cos\varphi, \quad \bar{\zeta} = I_1 \cos\varphi + I_3 \sin\varphi; \qquad (47)$$

тогда первая группа уравнений (4) примет вид

$$d\bar{\eta} = \frac{\omega_0^2}{\sigma} I_2, \quad dI_2 = -\frac{\omega_0^2}{\sigma}\eta, \quad d\bar{\zeta} = 0. \qquad (48)$$

Форма ω_0^2 вполне интегрируема; она должна приводиться к виду Bdb; система (48) показывает, что:

1) $\bar{\eta}$, I_1 суть функции параметра b и

2) отношение $\frac{B}{\sigma}$ тоже есть функция только от b.

Положим в таком случае

$$\frac{B}{\sigma} = \theta'(b);$$

тогда из уравнений (48) получим

$$I_2 = -i\sin\theta + j\cos\theta, \quad \overline{\eta} = i\cos\theta + j\sin\theta, \quad \zeta = k, \tag{49}$$

где i, j, k — постоянные орты.

Нетрудно видеть, что форма

$$A = \omega_0^1 \cos\varphi + \omega_0^3 \sin\varphi$$

есть полный дифференциал, ибо

$$A' = d\varphi\,(-\sin\varphi\omega_0^1 + \cos\varphi\omega_0^3) + q\,(\sin\varphi\omega_0^1 - \cos\varphi\omega_0^3) \equiv 0.$$

Полагая поэтому

$$\omega_0^1 \cos\varphi + \omega_0^3 \sin\varphi = dz,$$

мы получим

$$\overline{M} = \sigma\,(i\cos\theta + j\sin\theta) + zk,$$

т. е. поле потока отнесено к цилиндрическим координатам σ, θ, z.

Итак, векторы репера I_1, I_2, I_3 определяются формулами (47), (49), основные же формы репера будут:

$$\omega_0^1 = \sin\varphi\,d\sigma + \cos\varphi\,dz, \quad \omega_0^2 = \sigma\,d\theta, \quad \omega_0^3 = -\cos\varphi\,d\sigma + \sin\varphi\,dz,$$
$$p = \cos\varphi\,d\theta, \quad q = d\varphi, \quad r = \sin\varphi\,d\theta. \tag{50}$$

Так как каждый из векторов I_1 и I_3 всегда в одной плоскости с постоянном вектором $\overline{\zeta} = k$, то ортогональные семейства вихревых поверхностей и полной энергии состоят из поверхностей вращения, имеющих общую ось, именно, ось oz; семейство поверхностей тока, ортогональное двум предыдущим, изображается уравнением $\theta = \text{const}$, т. е. оно представляет собой пучок плоскостей, проходящих через ось oz. Чтобы получить окончательные уравнения, определяющие φ, V, ω в более удобной форме, мы восстановим основные гидродинамические уравнения с формами (50).

Уравнение неразрывности будет:

$$\{\sigma\,dV\,(-\cos\varphi\,d\sigma + \sin\varphi\,dz) + V\sin\varphi\,d\sigma\,dz +$$
$$+ \sigma V\,d\varphi\,(\sin\varphi\,d\sigma + \cos\varphi\,dz)\}\,d\theta = 0$$

или

$$\{-d\,(\sigma V\cos\varphi)\,d\sigma + d\,(\sigma V\sin\varphi)\,dz\}\,d\theta = 0; \tag{51}$$

уравнения компонентов вихря дают

$$\left.\begin{aligned} &d\varphi\,d\sigma\,dz = 0,\\ &\{2\omega\,d\sigma\,dz + dV\,(\sin\varphi\,d\sigma + \cos\varphi\,dz) -\\ &-V d\varphi\,(-\cos\varphi\,d\sigma + \sin\varphi\,dz)\}\,d\theta = 0,\\ &dV\,d\sigma\,dz = 0. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Уравнение Lamb-Громеки принимает вид

$$dH = 2V\omega\,(-\cos\varphi\,d\sigma + \sin\varphi\,dz); \tag{53}$$

наконец, приравняв нулю дивергенцию вихря, мы получим

$$2d\omega\,d\sigma\,dz = 0. \tag{54}$$

Из этих уравнений прежде всего следует, что функции φ, V, ω зависят только от σ и z, но не зависят от параметра θ. В силу этого, как уравнение (51), так и среднее из уравнений (52) можно проще написать в виде

$$-d(\sigma V\cos\varphi)\,d\sigma+d(\sigma V\sin\varphi)\,dz=0, \tag{51'}$$

$$2\omega\,d\sigma\,dz+d(V\sin\varphi)\,d\sigma+d(V\cos\varphi)\,dz=0. \tag{52'}$$

Условие интегрируемости уравнения (53) будет:

$$\frac{d\omega}{\omega}(-\cos\varphi\,d\sigma+\sin\varphi\,dz)-\frac{\sin\varphi}{\sigma}\,d\sigma\,dz=0. \tag{55}$$

Соотношения (53) и (51) показывают, что $V\omega$ и $V\sigma$ суть интегрирующие множители уравнения

$$\omega_c^3\equiv-\cos\varphi\,d\sigma+\sin\varphi\,dz=0; \tag{56}$$

поэтому

$$\frac{\omega}{\sigma}=f(c), \tag{57}$$

где $c=\mathrm{const}$, есть интеграл уравнения (56). т. е. уравнения семейства поверхностей полной энергии. Полагая

$$-\sigma V\cos\varphi=\frac{\partial c}{\partial\sigma},\quad \sigma V\sin\varphi=\frac{\partial c}{\partial z}, \tag{58}$$

мы удовлетворим условию (51′); эти уравнения определят нам V и φ; функция ω, определяемая условием (57), удовлетворяет уравнению (55).

Итак, остается уравнение (52′), которое равносильно уравнению с частными производными:

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial c}{\partial\sigma}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sigma}\frac{\partial c}{\partial z}\right)-2\sigma f(c)=0 \tag{52*}$$

и оно будет определять функцию $c=c(\sigma,z)$.

Перейдем теперь к рассмотрению второго из отмеченных выше случаев.

Случай II:

$$p_1=q_1=q_2=r_1=r_3=0.$$

Уравнения структуры при этих условиях будут:

$$\left.\begin{aligned}&dp_2\omega_0^2+dp_3\omega_0^3+(p_2^2+p_3^2-q_3r_2)\,\omega_0^2\omega_0^3+p_3q_3\omega_0^3\omega_0^1+p_2r_2\omega_0^1\omega_0^2=0,\\&dq_3\omega_0^3+p_3(q_3+r_2)\,\omega_0^2\omega_0^3+q_3^2\omega_0^3\omega_0^1=0,\\&dr_2\omega_0^2+p_2(q_3+r_2)\,\omega_0^2\omega_0^3+r_2^2\omega_0^1\omega_0^2=0;\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

на основании двух последних уравнений, мы положим

$$\begin{aligned}&dq_3=q_3^2\omega_0^1-p_3(q_3+r_2)\,\omega_0^2+\xi\omega_0^3,\\&dr_2=-r_2^2\omega_0^1+\eta\omega_0^2+p_2(q_3+r_2)\,\omega_0^3\end{aligned} \tag{60}$$

и тогда уравнение (35) даст

$$\xi=p_2(q_3+r_2)-\frac{2f'}{CV^2}(q_3-r_2),\quad \eta=-p_3(q_3+r_2).$$

Внешнее дифференцирование уравнений (60) приводит к условиям:

$$\left.\begin{aligned} &(q_3+r_2)(-dp_3\omega_0^2+dp_2\omega_0^3)-\frac{2p_3(q_3-r_2)f'}{CV^2}\omega_0^2\omega_0^3+p_3q_3(q_3+r_2)\omega_0^1\omega_0^2+\\ &\qquad+\left\{p_2(2q_3+r_2)(q_3+r_2)+\frac{6q_3^2-12q_3r_2+2r_2^2}{CV^2}f'\right\}\omega_0^3\omega_0^1=0,\\ &(q_3+r_2)(-dp_3\omega_0^2+dp_2\omega_0^3)+\frac{2p_3(q_3-r_2)f'}{CV^2}\omega_0^2\omega_0^3-p_2r_2(q_3+r_2)\omega_0^3\omega_0^1-\\ &\qquad-p_3(q_3^2+3q_3r_2+2r_2^2)\omega_0^1\omega_0^2=0; \end{aligned}\right\} \quad (61)$$

отсюда прежде всего следует, что

$$p_3(q_3+r_2)=0.$$

Случай $p_3=0$ нами разобран, если же $q_3+r_2=0$, то уравнения (60) или (61) дают

$$q_3-r_2=0,$$

т. е. $q_3=r_2$.

Если же $q=r=0$, то $I_1=\text{const}$, следовательно, *линии тока представляют собой прямые постоянного направления*, например, i или оси ox.

Примем $p=d\varphi$; тогда

$$I_2=j\cos\varphi+k\sin\varphi,\quad I_3=-j\sin\varphi+k\cos\varphi;$$

полагая затем

$$\overline{M}=xi+yj+zk,$$

мы получим уравнения поверхностей токов и поверхностей полной энергии соответственно в виде:

$$I_2d\overline{M}\equiv\omega_0^2\equiv\quad\cos\varphi\,dy+\sin\varphi\,dz=0,$$
$$I_3d\overline{M}\equiv\omega_0^3\equiv-\sin\varphi\,dy+\cos\varphi\,dz=0.$$

Условием интегрируемости этих уравнений будет соотношение

$$d\varphi\,dy\,dz=0,$$

показывающее, что φ есть функция (произвольная) от y и z, но не зависит от x.

Таким образом, в данном случае наша тройно-ортогональная система поверхностей состоит из семейства параллельных плоскостей (вихревые поверхности) и двух ортогональных семейств цилиндров с осями, перпендикулярными плоскостям первого семейства (поверхности тока и поверхности полной энергии). Уравнение (34) здесь дает

$$\frac{V^2}{2}+f(c)=\text{const}$$

и, следовательно, величина скорости постоянна на каждой отдельной поверхности полной энергии.

6. Рассмотрим теперь случай, когда *семейство поверхностей полной энергии представляет собой семейство параллельных плоскостей* ($z=\text{const}$); тогда

$$H=f(z);$$

мы можем в таком случае выбрать I_1, I_2, I_3 по неподвижным ортам i, j, k декартовой системы и, следовательно, $p = q = r = 0$.

Уравнения (33) примут вид

$$\frac{dV}{V} = \xi\, dx + \eta\, dy + \frac{f'}{V^2} dz, \qquad d\sigma = \eta\, dx - \xi\, dy + \zeta\, dz; \tag{62}$$

положим

$$H = \frac{V^2}{2} + Q = f(z);$$

тогда первое из уравнений (62) примет вид

$$dQ + V^2 (\xi\, dx + \eta\, dy) = 0, \tag{62'}$$

откуда следует, что Q *не зависит от* z.

Из уравнения (62′) мы имеем

$$\xi = -\frac{1}{V^2}\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{1}{V^2}\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Подставим эти выражения в условие интегрируемости второго из уравнений (62); тогда

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{f - Q} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\frac{\partial Q}{\partial y}}{f - Q} = 0.$$

Но последнее соотношение при условии $f' \neq 0$ может выполняться только в случае $Q = \text{const} = Q_0$.

Итак, общее решение представится в следующем виде:

$$\frac{V^2}{2} = f(z) - Q_0, \quad \frac{p}{\rho} + U = Q_0, \quad \sigma = \sigma(z),$$

$$\overline{V} = V(i\cos\sigma + j\sin\sigma), \quad \omega^1 = -\frac{d(V\sin\sigma)}{dz}, \quad \omega^2 = \frac{d(V\cos\sigma)}{dz}, \quad \omega^3 = 0,$$

где $f(z)$ и $\sigma(z)$ — произвольные функции. В каждой плоскости $z = \text{const}$ и линии тока и вихревые линии будут пучками параллельных прямых, причем вихревые линии пересекают линии тока под постоянным для этой плоскости углом.

§ 4. Конгруенции линий тока

1. Предположим, что поле векторов (I_3) огибает конгруенцию линий тока, и примем

$$\overline{V} = VI_3, \quad 2\overline{\omega} = \text{rot}\,\overline{V} = \omega^\alpha I_\alpha.$$

Последнее соотношение даст нам три уравнения:

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\omega^1}{V} = p_3 + \frac{dV\omega_0^3\omega_0^1}{V\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3}, \\ b &= \frac{\omega^2}{V} = q_3 - \frac{dV\omega_0^2\omega_0^3}{V\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3}, \\ &\frac{\omega^3}{V} = -(p_1 + q_2); \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

уравнения Гельмгольца будут:

$$\left.\begin{aligned} &(d\omega^1 + \omega^3 q - \omega^2 r)\,\omega_0^1\omega_0^2 = \theta_{\overline{\omega}} q,\\ &(d\omega^2 + \omega^1 r - \omega^3 p)\,\omega_0^1\omega_0^2 = -\theta_{\overline{\omega}} p,\\ &(d\omega^3 + \omega^2 p - \omega^1 q)\,\omega_0^1\omega_0^2 = \theta_{\overline{\omega}}\frac{dV}{V},\\ &(\theta_{\overline{\omega}} = \omega^1\omega_0^2\omega_0^3 + \omega^2\omega_0^3\omega_0^1 + \omega^3\omega_0^1\omega_0^2); \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

наконец, уравнение неразрывности примет вид:

$$q\omega_0^2\omega_0^3 - p\omega_0^3\omega_0^1 + \frac{dV}{V}\,\omega_0^1\omega_0^2 = 0. \tag{65}$$

Последнее из уравнений (63) показывает, что отношение $\frac{\omega^3}{V}$ равно одному из геометрических инвариантов конгруенции линий токов (именно, двойной третьей кривизне с обратным знаком); отсюда тотчас вытекает известное предложение: чтобы конгруенция линий токов допускала ортогональное семейство поверхностей, необходимо и достаточно, чтобы вихревые линии были ортогональны к линиям токов. Из уравнений (63) и (65) мы получим

$$\frac{dV}{V} = (q_3 - b)\,\omega_0^1 + (a - p_3)\,\omega_0^2 + (p_2 - q_1)\,\omega_0^3; \tag{66}$$

два первых уравнения (64) дают

$$\left.\begin{aligned} &(da - br)\,\omega_0^1\omega_0^2 = \{a(-p_2 + 2q_1) + bq_2\}\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3,\\ &(db + ar)\,\omega_0^1\omega_0^2 = \{-ap_1 + b(-2p_2 + q_1)\}\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3; \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

третье уравнение системы (64) после подстановки значения ω^3 примет вид

$$aq_3 - bp_3 + T = 0, \tag{68}$$

где

$$d(p_1 + q_2)\,\omega_0^1\omega_0^2 = 2T\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3.$$

Итак, для выбранной референции мы имеем основную систему уравнений (66), (67), (68). Внешнее дифференцирование уравнения (66) дает:

$$(dq_3 - db)\,\omega_0^1 + (da - dp_3)\,\omega_0^2 + (dp_2 - dq_1)\,\omega_0^3 + (p_2 - q_1)(q\omega_0^1 - p\omega_0^2) + \\ + (q_3 - b)(r\omega_0^2 - q\omega_0^3) + (a - p_3)(p\omega_0^3 - r\omega_0^1) = 0; \tag{69}$$

умножая внешним образом поочередно это уравнение на ω_0^1, ω_0^2, ω_0^3, мы получим три соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &\{2a(p_2 - q_1) - p_3q_1 - q_3(q_2 + r_3)\}\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 + \\ &\qquad + d(p_2 - q_1)\,\omega_0^3\omega_0^1 + dp_3\omega_0^1\omega_0^2 = 0,\\ &\{2b(p_2 - q_1) + p_3(p_1 + r_3) + q_3p_2\}\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 - \\ &\qquad - d(p_2 - q_1)\,\omega_0^2\omega_0^3 + dq_3\omega_0^1\omega_0^2 = 0,\\ &d(a - p_3)\,\omega_0^2\omega_0^3 - d(q_3 - b)\,\omega_0^3\omega_0^1 + \\ &\qquad + \{(q_3 - b)\,r_1 + (a - p_3)\,r_2 - (p_1 + q_2)(p_2 - q_1)\}\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{69*}$$

Если $p_2 - q_1 \neq 0$, то два первых из этих уравнений определят a и b; исключая эти величины из всех остальных уравнений, мы получим

те условия, которым должна удовлетворять конгруенция линий, могущая служить конгруенцией линий токов; если они выполняются, то величины V, ω^1, ω^2, ω^3 определятся с произвольным постоянным множителем, одинаковым для всех четырех величин. Так как этот множитель не имеет существенного значения, то мы можем сказать, что *всякая* (допустимая) *не минимальная конгруенция линий токов определяет единственный поток*.

2. Предположим теперь, что мы имеем минимальную конгруенцию:

$$p_2 - q_1 = 0; \tag{70}$$

тогда два первых уравнения (69*) не будут определять a и b, но дадут два добавочных условия на конгруенцию:

$$\left.\begin{aligned} (dp_3 - q_3 r)\,\omega_0^1\omega_0^2 - (p_3 q_1 + q_3 q_2)\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0, \\ (dq_3 + p_3 r)\,\omega_0^1\omega_0^2 + (p_3 p_1 + q_3 p_2)\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{71}$$

Возьмем дифференциал уравнения (68):

$$q_3 da - p_3 db + a dq_3 - b dp_3 + dT = 0; \tag{68$'$}$$

умножая это соотношение внешним образом на $\omega_0^1\omega_0^2$, мы получим

$$dT\omega_0^1\omega_0^2 = 0. \tag{72}$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} dp_3 - q_3 r &= a_1\omega_0^1 + a_2\omega_0^2 + (p_3 q_1 + q_3 q_2)\,\omega_0^3, \\ dq_3 + p_3 r &= b_1\omega_0^1 + b_2\omega_0^2 - (p_3 p_1 + q_3 p_2)\,\omega_0^3, \\ dT &= c_1\omega_0^1 + c_2\omega_0^2; \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

тогда, удовлетворяя уравнениям (67), (69* : 3) и (68′), найдем

$$\left.\begin{aligned} da - br - \frac{\theta}{q_3}\,\omega &= a_1\omega_0^1 + \frac{M + p_3 b - c_2}{q_3}\,\omega_0^2 + (aq_1 + bq_2)\,\omega_0^3, \\ db + ar - \frac{\theta}{p_3}\,\omega &= \frac{-M + q_3 a_1 + c_1}{p_3}\,\omega_0^1 + b_2\omega_0^2 - (ap_1 + bp_2)\,\omega_0^3, \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

где

$$\omega = q_3\omega_0^1 - p_3\omega_0^2, \qquad M = a\,(p_3 p_1 + q_3 p_2) + b\,(p_3 q_1 + q_3 q_2).$$

Внешнее дифференцирование обоих предыдущих уравнений приводит к одному только соотношению вида

$$(d\theta - \theta_1\omega_0^1 - \theta_2\omega_0^2 - \theta_3\omega_0^3)\,\omega = 0,$$

из которого не получится никаких конечных условий на введенные уже функции; поэтому поставленная задача имеет бесчисленное множество решений (с одной произвольной функцией от одного аргумента).

Нетрудно видеть, что в силу условий (71) указанная выше форма ω будет удовлетворять соотношению

$$\omega'\omega = 0, \tag{75}$$

т. е. наша минимальная конгруенция линий является полуспециальной.

Кривизна линий конгруенции определяется формулой:

$$\frac{1}{\rho^2} = p_3^2 + q_3^2;$$

отсюда, на основании условий (71), получим

$$\frac{d\rho}{\rho}\,\omega_0^1\omega_0^2 = \frac{q_3^2 p_2 + q_3 p_3 (p_1 - q_2) - p_3^2 q_1}{p_3^2 + q_3^2}\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3, \tag{76}$$

но коэффициент внешнего производения правой части есть нормальная кривизна поля (I_3) по направлению $p_3 I_1 + q_3 I_2$, т. е. по направлению бинормали линии конгруенции.

Таким образом, равенство (76) обозначает, что вдоль линии конгруенции

$$\frac{d \ln \rho}{ds} = \frac{1}{R}\ . \tag{76'}$$

Легко установить, что, обратно, из условий (75) и (76) вытекают условия (71).

Итак, *минимальная конгруенция линий может быть принята за конгруенцию линий тока только тогда, если*

1) *она полуспециальная,*

2) *удовлетворяет условию* (72) *и*

3) *если логарифмическая производная радиуса кривизны линий конгруенции, взятая по направлению касательных, равна нормальной кривизне конгруенции по направлению их бинормалей;*

при этом на такой конгруенции линий токов можно построить бесчисленное множество потоков (с одной произвольной функцией).

Еще большую степень свободы выбора потока мы получим, если минимальная конгруенция будет прямолинейной ($p_3 = q_3 = 0$); тогда условия (71) выполняются, конечное соотношение (68) между a и b пропадает и эти два компонента вихря будут связаны только тремя дифференциальными уравнениями, именно, двумя уравнениями (67) и уравнением

$$(da - br)\,\omega_0^2\omega_0^3 + (db + ar)\,\omega_0^3\omega_0^1 = 0. \tag{69* : 3}$$

В этом случае из уравнений структуры следует

$$\{d(p_2 - q_1) + (2p_1 q_2 - p_2^2 - q_1^2)\,\omega_0^3\}\,\omega_0^1\omega_0^2 = 0$$

или

$$p_1 q_2 - p_2 q_1 = 0 \quad (p_3 = q_3 = 0),$$

но это последное условие обозначает, что либо одна из форм p или q равна нулю, либо обе эти формы линейно зависимы. Разберем последовательно эти случаи.

Случай I: $p = q = 0$. Поле (I_3) допускает семейство ортогональных поверхностей (ибо $p_1 + q_2 = 0$), но $dI_3 = 0$ во всем потоке, следовательно, это семейство состоит из параллельных плоскостей; поэтому во всех точках потока мы можем взять реперы с осями постоянных

направлений i, j, k и положить

$$d\overline{M}=i\,dx+j\,dy+k\,dz.$$

Вся основная наша система кинематических уравнений сведется к уравнениям:

$$Va=\omega^1=\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Vb=\omega^2=-\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \omega^3=0,$$
$$\overline{V}=Vk, \quad dV\,dx\,dy=0 \quad (V=V(x,\,y)),$$

Все линии тока суть прямые, параллельные оси OZ, величина скорости $V=V(x,\,y)$ — произвольная функция от x и y; семейство цилиндров $V=\text{const}$ будет семейством поверхностей полной энергии, вихревые линии будут сечениями этих цилиндров плоскостями, перпендикулярными линиям тока.

Случай II: $p=0$, $q\neq 0$, $q_1=q_3=0$. Тогда формы q и r линейно зависимы и каждая из них есть полный дифференциал; положим

$$q=\lambda\,d\varphi, \quad r=-\mu\,d\varphi;$$

мы можем считать, что векторы I_3, I_1, I_2 соответственно параллельны касательной, главной нормали и бинормали некоторый пространственной кривой Г, имеющей кривизну λ и кручение μ. Так как

$$q=q_2\omega_0^2=\lambda\,d\varphi,$$

то поле $I_2(\varphi)$ имеет ортогональное семейство поверхностей $\varphi=\text{const}$, т. е. семейство плоскостей. Пусть $\eta=\eta(\varphi)$ будет расстояние какой-либо плоскости этого семейства от начала координат, тогда мы можем принять

$$\overline{M}=\eta I_2+\xi I_1+\zeta I_3,$$

а потому

$$\omega_0^1=d\xi+(\eta\mu+\zeta\lambda)\,d\varphi, \quad \omega_0^2=(\eta'-\mu\xi)\,d\varphi=\frac{\lambda\,d\varphi}{q_2} \quad \omega_0^3=d\zeta-\lambda\xi\,d\varphi;$$

в каждой плоскости $\varphi=\text{const}$ линии тока будут прямыми постоянного направления $I_3(\varphi)$.

Основные уравнения (66), (67), (69* : 3) сводятся к следующим:

$$\frac{dV}{V}=-b\omega_0^1+a\omega_0^2, \quad db\,d\xi\,d\varphi=0, \quad r_2=-\frac{\mu q_2}{\lambda}, \quad \omega^3=-Vq_2,$$
$$da\,d\xi\,d\varphi=0, \quad da\,d\varphi\,d\zeta+\frac{q_2}{\lambda}\,db\omega_0^3\omega_0^1-\frac{a\mu q_2}{\lambda}\,d\xi\,d\varphi\,d\zeta=0;$$

два последних соотношения дают уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial\xi}=-\frac{q_2}{\lambda}\left\{\frac{\partial b}{\partial\varphi}-(\eta\mu+\zeta\lambda)\frac{\partial b}{\partial\xi}\right\}+\frac{a\mu q_2}{\lambda}, \quad \frac{\partial a}{\partial\zeta}=bq_2,$$

условия интегрируемости которых выполняются, ибо

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\xi\,\partial\zeta}=\frac{\partial^2 a}{\partial\zeta\,\partial\xi}=q_2\frac{\partial b}{\partial\xi}+\frac{b\mu q_2^2}{\lambda},$$

причем b — произвольная функция от ξ и φ.

Итак, конгруенция линий тока получается следующим образом: возьмем произвольно однопараметрическое семейство плоскостей, имеющее ребро возврата Г; тогда в каждой плоскости семейства линии тока будут прямые, параллельные соответствующей касательной кривой Г.

Случай III: p и q — зависимые формы; мы можем принять

$$p=\tilde{\lambda}\omega, \quad q=\tilde{\mu}\omega,$$

но из уравнения структуры

$$p'=d\tilde{\lambda}\omega+\tilde{\lambda}\omega'=r\mu\omega$$

следует, что $\omega'\omega=0$. Таким образом, мы можем положить

$$p=\lambda\, du, \quad q=-\mu\, du, \quad r=dv.$$

Принимая, что

$$I_1=\bar{\xi}\cos v+\bar{\eta}\sin v, \quad I_2=-\bar{\xi}\sin v+\bar{\eta}\cos v,$$

на основании уравнений (4), найдем

$$d\bar{\mu}=\frac{I_3}{\rho}\,du, \quad d\bar{\xi}=\frac{I_3}{t}\,du, \quad dI_3=\left(-\frac{\xi}{t}-\frac{\eta}{\rho}\right)du,$$

где

$$\lambda\cos v+\mu\sin v=\frac{1}{\rho}, \quad -\lambda\sin v+\mu\cos v=\frac{1}{t}.$$

Из этих уравнений следует, что 1) $\bar{\eta}$, $\bar{\xi}$, I_3 суть функции только от u и 2) $\bar{\eta}$, I_3 $\bar{\xi}$ могут быть приняты, соответственно, за направления касательной, главной нормали и бинормали некоторой пространственной кривой Г, имеющей кривизну $\frac{1}{\rho}$ и кручение $\frac{1}{t}$. Условия, что искомая конгруенция линий тока прямолинейна:

$$p\omega_0^3\omega_0^2=0, \quad q\omega_0^1\omega_0^2=0$$

сводятся к одному соотношению: $du\,\omega_0^1\omega_0^2=0$; условие, что конгруенция минимальная:

$$p\omega_0^3\omega_0^1-q\omega_0^2\omega_0^3=0$$

дает соотношение $(\lambda\omega_0^1-\mu\omega_0^2)\,du\omega_0^3=0$. Два последних соотношения показывают, что формы du, ω_0^1, ω_0^2 линейно зависимы, именно зависимость

$$\lambda\omega_0^1-\mu\omega_0^2\equiv A\,du;$$

но в таком случае уравнение

$$\lambda\omega_0^1-\mu\omega_0^2=0$$

дает семейство поверхностей $u=\text{const}$, ортогональных к векторам

$$\lambda I_1-\mu I_2=\frac{\bar{\xi}}{\rho}-\frac{\bar{\eta}}{t},$$

т. е. к полю векторов, выходящих из точек потока параллельно вектору Дарбу триедра Френе кривой Г, следовательно, это семейство будет семейством плоскостей. Указанное однопараметрическое семейство

плоскостей будет определено, если, например, мы зададим их расстояния от некоторого начала в виде произвольной функции параметра u. Прямолинейная минимальная конгруенция линий тока таким образом будет построена; основные кинематические уравнения потока будут совместны, как указано выше в общем случае.

3. Будем искать теперь все случаи потоков, когда *линии тока — прямые*; тогда прежде всего

$$p_3 = q_3 = 0 \tag{77}$$

и уравнение (68) дает

$$(dp_1 + dq_2)\omega_0^1\omega_0^2 = 0. \tag{78}$$

При условиях (77) из уравнений структуры мы получим

$$dp_1\omega_0^1\omega_0^2 + (p_1q_1 - p_1p_2 - p_2r_3 - q_1r_3)\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0,$$
$$dq_2\omega_0^1\omega_0^2 + (-p_2q_2 + q_1q_2 + q_1r_3 + p_2r_3)\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0,$$

откуда, на основании (78), сейчас же найдем:

$$(p_2 - q_1)(p_1 + q_2) = 0.$$

Итак, *если конгруенция линий тока прямолинейна, то она либо минимальная, либо допускает семейство ортогональных параллельных поверхностей* (в последнем случае линии вихрей ортогональны к линиям тока). Первый случай нами разобран выше, остановимся на втором. Направим I_1 и I_2 по линии кривизны поля (I_3), тогда

$$p_1 = q_2 = 0, \tag{79}$$

а уравнения структуры будут

$$\begin{aligned} &dp_2\omega_0^2 + p_2^2\omega_0^2\omega_0^3 - (p_2 + q_1)\,r_3\omega_0^3\omega_0^1 + (p_2 + q_1)\,r_2\omega_0^1\omega_0^3 = 0,\\ &dq_1\omega_0^1 - (p_2 + q_1)\,r_3\omega_0^2\omega_0^3 + q_1^2\omega_0^3\omega_0^1 + (p_3 + q_1)\,r_1\,\omega_0^1\omega_0^2 = 0. \end{aligned} \tag{80}$$

Отсюда получаем

$$(p_2 + q_1)\,r_3 = 0.$$

Если $p_2 + q_1 = 0$, то при условиях (79) линии кривизны неопределенны, поэтому семейство поверхностей

$$\omega_0^3 = 0 \tag{81}$$

состоит либо из семейства параллельных плоскостей, либо из семейства концентрических сфер; если $r_3 = 0$, то семейство $\omega_0^3 = 0$ есть семейство Ламе.

В первом случае мы можем считать каждый из векторов I_1, I_2, I_3 постоянного направления (соответственно по осям неподвижной системы координат) и тогда

$$p \equiv q \equiv r \equiv 0,$$
$$dV = -\omega^2\,dx + \omega^1\,dy, \quad d\omega^1\,dx\,dy = 0, \quad d\omega^2\,dx\,dy = 0, \quad \omega^3 = 0$$

или

$$\omega^1 = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \omega^2 = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

где V — произвольная функция от x и y.

Во втором случае мы можем принять $d\overline{M} = d(RI_3)$ и тогда

$$\omega_0^1 = Rq, \quad \omega_0^2 = -Rp, \quad \omega_0^3 = dR,$$

$$q_2 = q_3 = 0, \quad q_1 = \frac{1}{R}, \quad p_1 = p_3 = 0, \quad p_2 = -\frac{1}{R},$$

а уравнения (69*) дадут:

$$a = 0, \quad b = 0,$$

т. е. мы получаем *потенциальный поток по лучам, выходящим из неподвижной точки.*

Наконец, в третьем случае, если $r_3 = 0$, то уравнения (69*) и (80) дают

$$\begin{aligned} dp_2 &= s(-r_2\omega_0^1 + r_1\omega_0^2) - 2a(p_2 - q_1)\omega_0^2 + p_2^2\omega_0^3, \\ dq_1 &= s(-r_2\omega_0^1 + r_1\omega_0^2) - 2b(p_2 - q_1)\omega_0^1 - q_1^2\omega_0^3. \end{aligned} \qquad (s = p_2 + q_1)$$

Внешнее дифференцирование этих уравнений и получаемых конечных соотношений приводят к условиям

$$a = b = 0, \quad sr_1 = sr_2 = 0.$$

Если $s = 0$, то мы получим два предыдущих случая; если же $r = 0$, $p_2 \neq 0$, $q = 0$ (или симметричный случай: $r = 0$, $p = 0$, $q_1 \neq 0$), то вся наша система сводится к условиям

$$p_2 = -\frac{1}{R}, \quad \omega_0^3 = dR, \quad I_1 = \text{const},$$

$$\overline{M} = I_1 k + RI_3, \quad \omega_0^2 = -\frac{p}{R}, \quad p' = 0, \quad VR = \text{const}$$

и мы получим *потенциальный поток по прямым, расходящимся перпендикулярно к некоторой постоянной оси.*

Итак, *линии тока могут быть прямолинейными только либо в случае минимальной конгруенции* (случай п. 2), *либо для потенциального потока* (три случая, указанные выше).

4. Исследуем теперь вопрос, при каких условиях *величина скорости постоянна во всем пространстве потока.* Из уравнения (66) прежде всего следует, что

$$a = p_3, \quad b = q_3, \quad p_2 - q_1 = 0;$$

последнее условие обозначает, что конгруенция линий токов — минимальная. Условие (68) дает

$$d(p_1 + q_2)\,\omega_0^1\omega_0^2 = 0, \qquad (78')$$

а два первых уравнения (69*) примут вид

$$\begin{aligned} (dp_3 - q_3 r)\,\omega_0^1\omega_0^2 - (p_3q_1 + q_3q_2)\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 &= 0, \\ (dq_3 + p_3 r)\,\omega_0^1\omega_0^2 + (p_3p_1 + q_3p_2)\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 &= 0. \end{aligned} \qquad (71')$$

Возьмем форму

$$\omega = q_3\omega_0^1 - p_3\omega_0^2;$$

нетрудно проверить, что внешняя производная этой формы удовлетворяет условиям

$$(\omega)'\,\omega_0^1 = 0, \quad (\omega)'\,\omega_0^2 = 0 \quad (\omega)'\,\omega_0^3 = 0, \qquad (82)$$

из которых два первые выполняются на основании уравнений (71′), а последнее — на основании уравнения (78) и уравнений структуры.

Соотношения (82) означают, что

$$(\omega)' = 0, \tag{82'}$$

т. е. что конгруенция линий тока есть специальная минимальная конгруенция. Обратно, если поле (I_3) есть специальное минимальное поле, то из уравнения (82) и уравнений структуры вытекают условия (71′) и (78′), а тогда способом, аналогичным способу п. 2, легко обнаружить, что кинематические уравнения потока будут совместны.

Итак, *специальная минимальная конгруенция может быть принята за конгруенцию линий тока, и только в этом случае мы получим постоянную величину скорости во всем пространстве потока.*

Из уравнения (66) следует, что *величина скорости будет постоянной вдоль каждой линии тока,* если выполняется условие

$$p_2 - q_1 = 0,$$

но в п. 2 мы подробно выяснили, при каких условиях конгруенция линий тока может быть минимальной. Таким образом, все потоки, найденные в п. 2, будут обладать тем свойством, что величина скорости остается постоянной вдоль каждой линии тока.

§ 5. Винтовой поток

1. *Винтовым потоком* будем называть такой стационарный поток, в котором вихревые линии совпадают с линиями тока, иначе говоря, поток, в каждой точке которого направление вихря совпадает с направлением скорости.

Винтовой поток характеризуется условиями

$$\operatorname{div} \overline{V} = 0, \tag{83}$$

$$2\,\overline{\omega} = \operatorname{rot} \overline{V} = 2k\overline{V}; \tag{84}$$

так как дивергенция вихря равна нулю, то из этих уравнений следует

$$\overline{V} \operatorname{grad} k = 0. \tag{85}$$

Таким образом, линии токов винтового потока располагаются на семействе поверхностей

$$k = \frac{\omega}{V} = \text{const}, \tag{86}$$

т. е. на таком семействе поверхностей, для (точек) каждой из которых отношение величины вихря к величине скорости постоянно.

Выберем какое-нибудь *семейство поверхностей токов* винтового потока и пусть поле нормалей этого семейства будет полем векторов I_3; тогда это семейство поверхностей будет изображаться уравнением

$$\omega_0^3 = 0, \tag{87}$$

которое должно быть вполне интегрируемо; следовательно, в нашем случае

$$p_1 + q_2 = 0. \tag{88}$$

Скорость потока может быть представлена в виде

$$\overline{V} = V(I_1 \cos\sigma + I_2 \sin\sigma) \tag{89}$$

и тогда уравнения (83) и (84) преобразуются к виду

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\cos\sigma\frac{dV}{V} - \sin\sigma(d\sigma + r)\right\}\omega_0^2\omega_0^3 + \left\{\sin\sigma\frac{dV}{V} + \cos\sigma(d\sigma + r)\right\}\omega_0^3\omega_0^1 + \\
&\qquad\qquad + (p\sin\sigma - q\cos\sigma)\,\omega_0^1\omega_0^2 = 0,\\
&\omega_0^1\omega_0^3\left\{\sin\sigma\frac{dV}{V} + \cos\sigma(d\sigma + r)\right\} - \omega_0^3\omega_0^1(p\sin\sigma - q\cos\sigma) + \\
&\qquad\qquad + 2k\cos\sigma\,\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0,\\
&-\omega_0^1\omega_0^2\left\{\cos\sigma\frac{dV}{V} - \sin\sigma(d\sigma + r)\right\} + \omega_0^2\omega_0^3(p\sin\sigma - q\cos\sigma) + \\
&\qquad\qquad + 2k\sin\sigma\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = 0,\\
&-\omega_0^2\omega_0^3\left\{\sin\sigma\frac{dV}{V} + \cos\sigma(d\sigma + r)\right\} + \omega_0^3\omega_0^1\left\{\cos\sigma\frac{dV}{V} - \sin\sigma(d\sigma + r)\right\} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{90}$$

Примем для краткости

$$\begin{aligned}
L &= p_2\sin^2\sigma + (p_1 - q_2)\sin\sigma\cos\sigma - q_1\cos^2\sigma,\\
M &= p_1\sin^2\sigma - (p_2 - q_1)\sin\sigma\cos\sigma + q_2\cos^2\sigma,\\
N' &= p_3\cos\sigma + q_3\sin\sigma, \qquad N'' = p_3\sin\sigma - q_3\cos\sigma;
\end{aligned}$$

тогда, на основании уравнений (90), мы можем положить

$$\begin{aligned}
\frac{dV}{V} &= \xi\omega_0^1 + \eta\omega_0^2 + L\omega_0^3,\\
d\sigma + r &= (\eta + N''\sin\sigma)\,\omega_0^1 - (\xi + N''\cos\sigma)\,\omega_0^2 - (M + 2k)\,\omega_0^3,
\end{aligned} \tag{91}$$

где ξ, η должны быть выбраны так, чтобы выполнялись условия интегрируемости этих уравнений. Уравнения (91) являются основными уравнениями винтового потока. Величина L будет изображать нормальную кривизну линии тока на поверхности тока (87), ибо для смещения вдоль линии тока

$$\frac{\omega_0^1}{\cos\sigma} = \frac{\omega_0^2}{\sin\sigma} = \frac{\omega_0^3}{0} = ds$$

мы как раз получим

$$\frac{1}{R_0} = -(I_1\cos\sigma + I_2\sin\sigma)\frac{dI_3}{ds} = \frac{p\sin\sigma - q\cos\sigma}{ds} = L.$$

Таким образом, первое из уравнений (91) показывает, что *логарифмическая производная от величины скорости по нормали какой-либо поверхности тока равна нормальной кривизне линии тока на этой поверхности*. Нетрудно убедиться, что величина M будет на поверхности тока *геодезическим кручением линии, ортогональной к линии тока*, т. е.

$$M = \frac{1}{T_{g\left(\sigma + \frac{\pi}{2}\right)}}.$$

С помощью уравнений (91) можно найти те условия, которым должно удовлетворять какое-либо семейство поверхностей токов винтового потока, в частности, семейство $k = \text{const}$, а также найти те случаи, когда на данном семействе поверхностей токов можно построить бесчисленное множество потоков; однако решение этих задач требует весьма длинных вычислений.

2. В качестве одного из примеров приложения уравнения (91) рассмотрим те случаи, когда *семейство поверхностей токов состоит из семейства плоскостей* или *семейства сфер*.

a) Допустим, что семейство поверхностей тока состоит из *семейства параллельных плоскостей*, тогда $I_3 = \text{const}$; можно принять, что и векторы I_1 и I_2 постоянны, а потому

$$p \equiv q \equiv r \equiv 0$$

и система (91) принимает вид

$$d \ln V = \xi dx + \eta dy, \quad d\sigma = \eta dx - \xi dy - 2k dz;$$

отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2 \ln V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ln V}{\partial y^2} = 0, \quad k = k(z).$$

Таким образом, *из всякого плоского безвихревого потока мы можем получить плоский винтовой поток*. В самом деле, если $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ представляют собой потенциал скорости и функцию тока какого-либо безвихревого потока, то, полагая

$$\ln V = \varphi(x, y), \quad \sigma = -\psi(x, y) - 2 \int k dz,$$

или

$$\ln V = \psi(x, y), \quad \sigma = \varphi(x, y) - 2 \int k dz,$$

мы получим винтовой поток, линии тока которого располагаются в параллельных плоскостях.

Повидимому, не представляет особых трудностей и исследование тех случаев, когда семейство поверхностей токов представляется и другими семействами плоскостей.

b) Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда *семейство поверхностей тока винтового потока представляет собой семейство концентрических сфер*.

Возьмем на единичной сфере какую-нибудь ортогональную систему координат

$$dI_3^2 = e\, du^2 + g\, dv^2,$$

векторы I_1 и I_2 направим по касательным к координатным линиям:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{e}} \frac{\partial I_3}{\partial u}, \quad I_2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial I_3}{\partial v};$$

тогда

$$p = -\sqrt{g}\,dv, \quad q = \sqrt{e}\,du,$$
$$r = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\,du + \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\,dv.$$

Уравнение структуры сводится здесь к одному условию гауссовой кривизны сферы

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{e}}{\partial v}\right) + \sqrt{eg} = 0.$$

Какая-либо точка потока может быть определена вектором

$$\overline{M} = RI_3,$$

где R — третье независимое переменное; отсюда следует, что

$$d\overline{M} = R(qI_1 - pI_2) + I_3\,dR,$$

а потому

$$\omega_0^1 = Rq = R\sqrt{e}\,du, \quad \omega_0^2 = -Rp = R\sqrt{g}\,dv, \quad \omega_0^3 = dR.$$

Основные уравнения (91) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= \xi R\sqrt{e}\,du + \eta R\sqrt{g}\,dv - \frac{dR}{R}, \\ d\sigma + r &= \eta R\sqrt{e}\,du - \xi R\sqrt{g}\,dv - 2k\,dR, \end{aligned} \tag{92}$$

их условия интегрируемости будут:

$$d(\xi R\sqrt{e})\,du + d(\eta R\sqrt{g})\,dv = 0,$$
$$d(\eta R\sqrt{e})\,du - d(\xi R\sqrt{g})\,dv + \sqrt{eg}\,du\,dv - 2dk\,dR = 0.$$

Первое из этих уравнений показывает, что функции $R\xi$ и $R\eta$ не зависят от R, а тогда второе уравнение распадается на два условия:

$$d(\eta R\sqrt{e})\,du - d(\xi R\sqrt{g})\,dv + \sqrt{eg}\,du\,dv = 0,$$
$$dk\,dR = 0.$$

Таким образом, мы можем принять

$$\xi = \frac{1}{R\sqrt{e}}\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad \eta = \frac{1}{R\sqrt{g}}\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad k = k(R),$$

и функция φ должна удовлетворять единственному условию:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{g}{e}}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{\frac{e}{g}}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) = \sqrt{eg}. \tag{93}$$

Итак, *существует бесконечное множество винтовых стационарных потоков, имеющих семейство поверхностей тока в виде семейства концентрических сфер.*

Величина скорости и угол σ последней с координатной линией $v = \text{const}$ на сфере определяется уравнениями:

$$d\ln(VR) = d\varphi, \quad d\sigma + r = \sqrt{\frac{e}{g}}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\,du - \sqrt{\frac{g}{e}}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\,dv - 2k(R)\,dR, \tag{94}$$

условия интегрируемости которых выполнены.

Если k непостоянно, то семейство концентрических сфер будет некоторым специальным семейством поверхностей токов, именно семейством

$$k = \frac{\omega}{V} = \text{const}.$$

Величина k, в силу своего произвола, может быть взята и постоянной, тогда мы получим частный случай винтового потока, для которого отношение величины вихря к величине скорости всюду постоянно.

В качестве специального примера найденного винтового потока рассмотрим случай, когда *на каждой сфере все линии тока составляют постоянный угол* σ с линиями $v = \text{const}$ (на сфере), т. е. потребуется, чтобы

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 0.$$

В этом случае второе из уравнений (94) дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \ln \sqrt{e}}{\partial v} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{e}}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial u\, \partial v},$$

т. е. здесь на сфере мы должны взять *любую изометрическую систему*:

$$\sqrt{e} = \sqrt{g} = \lambda(u, v).$$

Уравнение (92) обращается тогда в уравнение кривизны сферы и мы получим

$$V = \frac{C}{\lambda R}, \quad \sigma = -2 \int k dR,$$

где C — произвольное постоянное и $k = k(R)$ — попрежнему произвольная функция от R.

3. Отнесем теперь винтовой поток к конгруенции его линий тока. Пусть I_3 направлен по скорости потока: $\bar{V} = V I_3$; уравнения движения (83) и (84) дадут здесь соотношения

$$q\omega_0^2 \omega_0^3 - p\omega_0^3 \omega_0^1 + \frac{dV}{V} \omega_0^1 \omega_0^2 = 0,$$
$$p\omega_0^1 \omega_0^2 + \frac{dV}{V} \omega_0^3 \omega_0^1 = 0,$$
$$-q\omega_0^1 \omega_0^2 + \frac{dV}{V} \omega_0^2 \omega_0^3 = 0,$$
$$-2k\omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3 = p\omega_0^2 \omega_0^3 + q\omega_0^3 \omega_0^1,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{dV}{V} &= q_3 \omega_0^1 - p_3 \omega_0^2 + (p_2 - q_1) \omega_0^3, \\ 2k &= -(p_1 + q_2). \end{aligned} \tag{95}$$

Условием интегрируемости первого из этих уравнений будет:

$$(dq_3 + p_3 r)\,\omega_0^1 - (dp_3 - q_3 r)\,\omega_0^2 + d\,(p_2 - q_1)\,\omega_0^3 - \\ - (p_3 p + q_3 q)\,\omega_0^3 + (p_2 - q_1)\,(q\omega_0^1 - p\omega_0^2) = 0 \qquad (96)$$

и это будет единственным условием, которому должна удовлетворять конгруенция линий, чтобы она могла быть принята за конгруенцию линий тока некоторого винтового потока.

Возьмем вектор кривизны $q_3 I_1 - p_3 I_2$ линии конгруенции и прибавим к нему вектор по касательной, отложив на нем среднюю кривизну $p_2 - q_1$ конгруенции, т. е. составим вектор

$$\overline{I} = q_3 I_1 - p_3 I_2 + (p_2 - q_1)\, I_3;$$

тогда первое из уравнений (95) примет вид

$$\frac{dV}{V} = \overline{I}\, d\overline{M}$$

и условие (96) обозначает, что вектор $\overline{I}$ дает поле градиентов некоторого семейства поверхностей.

Итак, *для того чтобы некоторая конгруенция линий могла быть принята за конгруенцию линий тока винтового потока, необходимо и достаточно, чтобы поле инвариантных векторов конгруенции, построенное указанным способом, было полем градиентов какого-либо семейства поверхностей.*

Умножая уравнение (96) на ω_0^3 и используя уравнения структуры, мы получим из него следствие:

$$d\,(p_1 + q_2)\,\omega_0^1\,\omega_0^2 = 0,$$

т. е. k постоянно вдоль каждой линии тока; это опять дает известную теорему, что линии тока лежат на поверхностях

$$k = \frac{\omega}{V} = \text{const.}$$

Минимальная конгруенция $(p_2 - q_1 = 0)$ может быть принята за конгруенцию линий тока винтового потока, если форма

$$\omega = q_3\,\omega_0^1 - p_3\,\omega_0^3$$

будет полным дифференциалом, т. е. *если минимальная конгруенция будет специальной.*

5. В качестве одного из применений уравнения (94) поставим себе задачей *определить такой винтовой поток, для которого величина скорости была бы всюду постоянной*; в этом случае необходимо, чтобы

$$p_3 = q_3 = 0, \quad p_2 - q_1 = 0,$$

т. е. *конгруенция должна быть минимальной прямолинейной* (такую мы нашли в п. 2 § 4). Очевидно и обратное, если минимальная прямолинейная конгруенция удовлетворяет условию

$$-2k = p_1 + q_2 \neq 0,$$

то ее можно принять за конгруенцию линий тока винтового потока и для последнего величина скорости будет всюду постоянной.

Научно-исслед. институт математики
Московского гос. университета

Поступило
10. V. 1947

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 513–554

М. А. ЛАВРЕНТЬЕВ

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ТЕОРИИ КВАЗИ-КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПЛОСКИХ ОБЛАСТЕЙ

Доказывается существование и единственность квази-конформного отображения, соответствующего сильно эллиптической системе уравнений, для двух заданных плоских областей.

В 1943 г. мною было введено общее понятие квази-конформного отображения, соответствующего данной системе дифференциальных уравнений в частных производных ([1]): гомеоморфное отображение области D на область Δ

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \tag{1}$$

называется *квази-конформным отображением, соответствующим системе уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \\ \Phi_2\left(x, y, u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

если функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$, осуществляющие это отображение, удовлетворяют системе (2).

В той же заметке было введено геометрическое понятие сильно эллиптической системы (2). Напомню это определение. Выделим для произвольной пары соответствующих точек отображения (1) главную линейную часть этого отображения:

$$\left.\begin{aligned} u - u_0 = u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0), \\ v - v_0 = v_x(x - x_0) + v_y(y - y_0). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Рассмотрим в плоскости u, v единичный квадрат с вершиной в точке $w_0 = u_0 + iv_0$ и сторонами $\overline{w_0 w_1}$, $\overline{w_0 w_2}$,

$$w_2 - w_0 = (w_1 - w_0)\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

и обозначим через ν угол, образованный вектором $\overline{w_0 w_1}$ с осью u:

$$w_1 - w_0 = e^{i\nu}.$$

При отображении (3) рассматриваемый квадрат будет соответствовать некоторому параллелограму Π_ν; пусть при этом точки w_0, w_1, w_2 соответствуют точкам z_0, z_1, z_2.

Положим

$$z_2 - z_0 = V_\nu e^{i\alpha_\nu}, \quad \theta_\nu = \arg \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0}, \quad W_\nu V_\nu \cdot \Delta = 1,$$

где Δ — определитель преобразования (1) в точке $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}.$$

При любом фиксированном ν введенные величины V_ν, α_ν, W_ν и θ_ν полностью определяют параллелограм Π_ν и могут быть элементарно выражены через коэффициенты преобразования (3).

Соотношения (2) могут быть заменены двумя соотношениями между *характеристиками отображения* V, α, W и θ:

$$\left.\begin{aligned} W_\nu &= F_1^{(\nu)}(V_\nu, \alpha_\nu; \quad x, y, u, v), \\ \theta_\nu &= F_2^{(\nu)}(V_\nu, \alpha_\nu; \quad x, y, u, v). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Система (2) называется *сильно эллиптической*, если при любом фиксированном ν в представлении (4) нашей системы будут выполняться следующие условия:

1° Функции F_1 и F_2 однозначны и непрерывны при всех значениях аргументов.

2° Существует положительная постоянная k такая, что при всех значениях аргументов имеем

$$k < \theta < \pi - k, \quad \Delta > 0.$$

3° При любых фиксированных α_ν, x, y, u, v функция F_1 монотонно возрастает относительно $V_\nu, V_\nu > 0$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial V} > k > 0.$$

Квази-конформные отображения, соответствующие сильно эллиптическим системам, обладают многими свойствами конформных отображений. Часть этих свойств была отмечена в моих заметках ([1]), ([2]) и ([3]). В данной статье я имею в виду дать доказательство основной теоремы теории:

Каковы бы ни были две области D и Δ, ограниченные кусочно гладкими кривыми, и две положительно занумерованные тройки точек границы $D: z_1, z_2, z_3$ и $\Delta: w_1, w_2, w_3$ * *и какова бы ни была сильно эллиптическая система* (4) *с равномерно непрерывными частными производными функций F_1 и F_2, всегда существует единственное квази-конформное отображение, соответствующее* (4) *и переводящее D в Δ с соответствием тройки z_1, z_2, z_3 тройке w_1, w_2, w_3.*

При доказательстве сформулированной теоремы мы будем существенно опираться на ряд предложений, установленных нами раньше ([3]). Приведу эти результаты.

---

* Положительному обходу областей D и Δ соответствует встреча точек z и w в порядке 1, 2, 3, 1, ...

ТЕОРЕМА 1. *Если квази-конформное отображение* (1) *соответствует системе* (4), *то характеристики этого отображения* $V=V_0$ *и* $\alpha=\alpha_0$ *удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial v}&=a_1\frac{\partial V}{\partial u}+a_2\frac{\partial\alpha}{\partial u}+a_3,\\ \frac{\partial\alpha}{\partial v}&=b_1\frac{\partial V}{\partial u}+b_2\frac{\partial\alpha}{\partial u}+b_3,\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

где коэффициенты a *и* b *суть функции координат и характеристик* V *и* α:

$$\left.\begin{aligned}&a_1=\frac{\partial W}{\partial V}\operatorname{ctg}\theta-\frac{\partial\theta}{\partial V}\frac{W}{\sin^2\theta},\quad a_2=\frac{\partial W}{\partial\alpha}\operatorname{ctg}\theta-\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\frac{W}{\sin^2\theta}-W,\\ &a_3=\left\{\frac{\partial W}{\partial u}+V\frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha+V\frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha\right\}\operatorname{ctg}\theta-\\ &\qquad-\left\{\frac{\partial\theta}{\partial u}+V\frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha+V\frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha\right\}\frac{W}{\sin^2\theta},\\ &b_1=\frac{1}{V}\frac{\partial W}{\partial V},\quad b_2=\frac{1}{V}\left\{\frac{\partial W}{\partial\alpha}+W\operatorname{ctg}\theta\right\},\\ &b_3=\frac{1}{V}\frac{\partial W}{\partial u}+\frac{\partial W}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial W}{\partial y}\sin\alpha.\end{aligned}\right\}\qquad(5')$$

Если дополнительно известно, что система (2) *сильно эллиптична, то система* (5) *эллиптична и* $b_1>0$:

$$-4a_3b_1-(b_2-a_1)^2>k>0,$$

где k — *некоторая положительная постоянная.*

Для дальнейшего, наряду с характеристиками V и α, мы будем пользоваться «плотностью» R и «наклоном» τ линий тока.

Примем в отображении (1) x и v за новые независимые переменные, тогда y и u окажутся функциями x и v:

$$y=y(x,v),\quad u=u(x,v).\qquad(6)$$

Первое из уравнений (6) при $v=\text{const}$ будет давать «линии тока» — линии области D, которые при отображении (1) переходят в прямые, параллельные оси u. Величины R и τ мы определим как производные y соответственно по v и по x:

$$R=\frac{\partial y}{\partial v},\quad \tau=\frac{\partial y}{\partial x}.$$

Если система (2) сильно эллиптична, то функции R и τ будут удовлетворять эллиптической системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial R}{\partial x}&=\frac{\partial\tau}{\partial v},\\ \frac{\partial R}{\partial v}&=a\frac{\partial\tau}{\partial x}+b\frac{\partial\tau}{\partial v}+c,\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

где коэффициенты a, b, c могут быть выражены через ранее выведенные величины. Полагая

$$a_4=\frac{W}{V}(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\theta),$$

будем иметь

$$a = V^2 \cos^2 \alpha \, [a_2 b_1 - (a_1 + a_4)(b_2 + a_4)],$$
$$b = V \cos \alpha \left[a_1 + a_4 + \frac{1}{V} \frac{\partial W}{\partial \alpha} + \frac{1}{V} \operatorname{tg} \alpha \right],$$
$$c = \frac{1}{\cos \alpha} \left\{ R \frac{\partial W}{\partial y} + a_4 \frac{\partial W}{\partial u} + \frac{\partial W}{\partial v} - V [a_3 b_1 + b_2 (a_1 + a_4)] \right\},$$

причем

$$-4a - b^2 > kV^2 \cos^2 \alpha > 0,$$

где k — положительная постоянная, определяемая постоянными, характеризующими условия сильной эллиптичности системы (2).

Заметим, что коэффициенты a, b, c можно рассматривать как заданные функции координат и величин R и τ:

$$R = \frac{W}{\cos \alpha}, \quad \tau = \operatorname{tg} \alpha.$$

Система уравнений (7) эквивалентна одному уравнению:

$$-a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - b \frac{\partial^2 y}{\partial x \, \partial v} = c. \tag{8}$$

В случае, когда в системе (2) функции Φ не зависят от y и u, коэффициенты a, b и c будут зависеть только от независимых переменных x, v и от частных производных первого порядка функции $y = y(x, v)$.

Наряду с отмеченными свойствами сильно эллиптических систем, для доказательства основной теоремы нам понадобится еще ряд новых свойств линейных систем.

§ 1. Линейные системы. Введем одно новое геометрическое понятие. Пусть в единичном круге $|z| < 1$ заданы две непрерывные функции:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \tag{9}$$

Мы скажем, что отображение (9) *квази-однолистно в единичном круге*, если функции u и v можно доопределить в круге $|z| \leqslant 2$ так, чтобы соблюдались следующие условия:

1° новые функции непрерывны в замкнутом круге $|z| \leqslant 2$;

2° расширенное отображение переводит взаимно однозначно окружность $|z| = 2$ в некоторую окружность $|w| = R$ так, что положительному обходу $|z| < 2$ соответствует положительный обход $|w| < R$.

Пусть теперь функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ заданы в произвольной односвязной области D и Δ есть образ D. Мы скажем, что отображение (9) квази-однолистно в D, если D и Δ можно гомеоморфно отобразить на единичные круги $|\zeta| < 1$ и $|\tau| < 1$ так, что получающееся отсюда отображение $|\zeta| < 1$ будет квази-однолистным в круге $|\zeta| \leqslant 1$.

Во всем дальнейшем мы будем рассматривать отображения (9) при условии, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ обладают в отображаемой области кусочно непрерывными частными производными.

Введем обозначения: пусть λ есть спрямляемая простая замкнутая кривая, расположенная в области D. Положим

$$L(\lambda)=\int\limits_{\lambda}\sqrt{\left(\frac{du}{ds}\right)^2+\left(\frac{dv}{ds}\right)^2}\,ds, \tag{10}$$

$$S(\lambda)=\iint\limits_{D(\lambda)}\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}dx\,dy, \tag{11}$$

где производные $\frac{du}{ds}$ и $\frac{dv}{ds}$ берутся по элементу дуги ds линии λ, а $D(\lambda)$ есть область, ограниченная кривой λ.

Установим два элементарных предложения относительно введенных понятий.

ЛЕММА 1. *Если отображение* (9) *квази-однолистно в* $D(\lambda)$ *и если в* $D(\lambda)$

$$u^2+v^2\leqslant R^2,$$

то

$$S(\lambda)\leqslant\pi R^2.$$

В самом деле, в силу инвариантности квази-однолистных отображений относительно гомеоморфных преобразований, мы можем предполагать, что линия λ переходит в окружность $|w|=R$ так, что положительному обходу $D(\lambda)$ соответствует положительный обход $|w|<R$. Но путем интегрирования по частям интеграл $S(\lambda)$ можно свести к интегралу по λ:

$$S(\lambda)=\frac{1}{2}\int\limits_{\lambda}vu_y dy+uv_x dx, \tag{12}$$

который, очевидно, дает площадь круга $|w|<R$.

ЛЕММА 2. *Имеем*

$$S(\lambda)\leqslant\frac{L^2(\lambda)}{4\pi}. \tag{13}$$

В самом деле, доказательство (13) сводится к классической вариационной задаче: найти максимум (12) при условии (10). Искомый максимум осуществляется, когда образ λ есть окружность, что немедленно дает (13).

Опираясь на установленные элементарные предложения, нетрудно получить два, важных для дальнейшего, свойства решений систем эллиптического типа.

Рассмотрим систему линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=a_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_1\frac{\partial u}{\partial y}+c_1,\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=a_2\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+c_2,\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

где a, b, c суть заданные функции независимых переменных, причем при всех значениях аргументов имеем

$$-4a_2b_1-(b_2-a_1)^2>k>0, \tag{15}$$

а все функции a, b, c ограничены постоянной K.

Установим следующее основное предложение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция* $w=f(z)$,

$$u=u(x, y), \quad v=v(x, y) \tag{16}$$

удовлетворяют в единичном круге $|z|\leqslant 1$ *системе* (14) *и пусть отображение* (16) *квази-однолистно в том же круге, причем*

$$u^2+v^2<1.$$

Тогда во всяком круге $|z|\leqslant r_0<1$ *функции* u *и* v *будут удовлетворять условию Гёльдера*

$$|f(z+h)-f(z)|<C|h|^\alpha, \tag{17}$$

где коэффициенты C *и* α *зависят только от постоянных* K, k *и* r_0.

Отображая круг $|z|<1$ конформно на самого себя так, чтобы точка z перешла в начало координат $z=0$, мы можем свести доказательство неравенства (17) к случаю $z=0$ и $f(0)=0$.

Заметив это, рассмотрим однородную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}&=a_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_1\frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial v}{\partial y}&=a_2\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Выражая частные производные u и v через характеристики V, W, α и θ, систему (18) можно заменить двумя следующими соотношениями между характеристиками:

$$\left.\begin{aligned} W&=\frac{V}{\Delta}\{-b_1\cos^2\alpha+(a_1-b_2)\cos\alpha\sin\alpha+a_2\sin^2\alpha\}, \\ \sin^2\theta&=\frac{\{-b_1\cos^2\alpha+(a_1-b_2)\cos\alpha\sin\alpha+a_2\sin^2\alpha\}^2}{(a_1\cos\alpha+a_2\sin\alpha)^2+(b_1\cos\alpha+b_2\sin\alpha)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

где

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Из условия (15) следует, что $\Delta>k$. Таким образом, отношение $\frac{W}{V}$ и $\sin\theta$ ограничены сверху и снизу постоянными, зависящими только от k и K:

$$k_0<\frac{W}{V}<\frac{1}{k_0}, \quad \sin\theta>k_0, \quad k_0=k_0(k, K).$$

Систему (14) можно также привести к виду (19). Для этой цели достаточно коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 заменить соответственно величинами

$$a_1+\frac{c_1}{\frac{\partial u}{\partial x}}, \quad b_1, \quad a_2+\frac{c_2}{\frac{\partial u}{\partial x}}, \quad b_2$$

или величинами

$$a_1, \quad b_1 + \frac{c_1}{\frac{\partial u}{\partial y}}, \quad a_2, \quad b_2 + \frac{c_2}{\frac{\partial u}{\partial y}}.$$

Отсюда заключаем, что в каждой точке, где не имеют места неравенства

$$\frac{1}{2} k_0 < \frac{W}{V} < \frac{2}{k_0}, \quad \sin\theta > \frac{1}{2} k_0, \tag{20}$$

частные производные $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ и $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ меньше некоторой постоянной, зависящей только от k и K:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < k_1, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < k_1. \tag{21}$$

Но так как частные производные v по x и y связаны с частными производными u при помощи (14), то мы можем считать, что при нарушении (20) имеем также

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| < k_1, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| < k_1. \tag{22}$$

Установленное свойство отображения (16), соответствующего системе (14), можно еще формулировать следующим образом: пусть ds есть элемент длины дуги в круге $|z| < 1$ и пусть $d\sigma$ есть элемент длины дуги, соответствующий, в силу (16), элементу ds; при этих обозначениях, если

$$\frac{d\sigma}{ds} \geqslant k_1, \tag{23}$$

то в точке элемента ds имеет место (20).

Для дальнейшего нам будет удобно придать условиям (20) несколько иную форму: обозначим через dS площадь образа бесконечно малого квадрата со стороной ds; тогда из (20) или (23) будет следовать

$$dS > p_0 \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds^2, \tag{24}$$

где p_0 может быть элементарно выражено через k_0; при $k_0 > 0$ имеем $p_0 > 0$.

Обозначим теперь через $L(r)$ длину образа окружности $|z| = r$:

$$L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2}\, d\varphi = \int_0^{2\pi r} \frac{d\sigma}{ds}\, ds,$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

а через $S(r)$ — «площадь» образа круга $|z| < r$:

$$S(r) = \iint\limits_{|z|<r} \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} dx\, dy.$$

Далее, обозначим через E множество точек окружности, в которых отношение элементов длины дуг образа окружности $|z| = r$ и окружности $|z| = r$ удовлетворяет (23).

В силу (24), будем иметь

$$\frac{dS}{dr} \geqslant p_0 \int\limits_E \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds - k_1^2 \int\limits_{CE} ds. \tag{25}$$

Опираясь на (25), нетрудно оценить снизу $\frac{dS}{dr}$ через $L(r)$. Для этой цели обозначим через t меру E. Наша задача сводится к определению минимального значения функционала

$$I = p_0 \int\limits_t^{2\pi r} \left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 ds - k_1^2 t$$

при условии

$$\int\limits_t^{2\pi r} \left(\frac{d\sigma}{ds}\right) ds + k_1 t = L.$$

Определим сначала условный минимум I при фиксированном t; получим

$$I_t = p_0 \frac{(L - k_1 t)^2}{2\pi r - t} - k_1^2 t.$$

Нам остается найти минимум I_t при $0 \leqslant t \leqslant 2\pi r$. Если

$$L > 2\pi k_1 r \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{p_0}}\right), \tag{26}$$

то искомый минимум реализуется при $t = 0$ и будет равен

$$I_{\min} = p_0 \frac{L^2}{2\pi r}.$$

Таким образом, при выполнении (26) будем иметь

$$\frac{dS}{dr} \geqslant \frac{p_0}{2\pi r} L^2, \tag{27}$$

откуда, в силу (13), получим

$$\frac{dS}{dr} \geqslant \frac{2p_0}{r} S \tag{28}$$

или после интеграции с учетом того, что $S(1) \geqslant \pi$, найдем

$$S(r) \leqslant \pi r^{2p_0}. \tag{29}$$

Мы доказали (29) в предположении (26). Покажем, что в общем случае при некоторой постоянной k_2, зависящей только от k_1 и p_0, будем иметь

$$S(r) \leqslant k_2 \pi r^{2p_0}. \tag{30}$$

В самом деле, допустим от противного, что при некотором r_0

$$S(r_0) > k_2 \pi r_0^{2p_0}; \tag{31}$$

тогда, в силу леммы 2,

$$L(r_0) \geqslant 2\sqrt{\pi S} > 2\pi \sqrt{k_2}\, r^{p_0},$$

т. е. если

$$k_2 > k_1^2 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{p_0}}\right)^2,$$

то неравенство (26) будет иметь место при $r=\dot{r}_0$, а в силу (28) и той же леммы, неравенства (31) и (26) будут иметь место для всех r, $r>r_0$, что невозможно, ибо $S(1)\leqslant 1$.

Обозначим теперь через $\delta(r)$ диаметр образа λ окружности $|z|=r$ и через $m(r)$ — максимум $|f(z)|$ при $|z|=r$:

$$m(r)=\max_{|\varphi|\leqslant\pi}|f(re^{i\varphi})|;$$

пусть, кроме того, $\rho(r)$ равно расстоянию λ до точки $w=0$, если λ не охватывает $w=0$, и $\rho(r)=0$, если λ охватывает $w=0$. Нетрудно видеть, что

$$\frac{d\delta}{dr}>-2k_1,\quad \frac{d\rho}{dr}<k_1,\quad m(r)<\delta+\rho. \tag{32}$$

Из последних двух неравенств следует, что для доказательства теоремы нам достаточно получить оценку для $\delta(r)$. Так как $L>2\delta$ то, в силу (27), будем иметь

$$\frac{dS}{dr}>\frac{2p_0}{\pi}\cdot\frac{\delta^2}{r},\quad S>\frac{2p_0}{\pi}\int_0^r\frac{\delta^2(r)}{r}\,dr. \tag{33}$$

Оценим $\delta(r)$ в произвольной точке r_0; при этом мы, очевидно, можем заранее допустить, что

$$\delta(r_0)>2k_1r_0. \tag{34}$$

Положим в (33) $r=2r_0$, тогда, в силу (32) и (34), правая часть (33) будет уменьшена, если функцию $\delta(r)$ положить равной

$$\delta(r)=\begin{cases}0 & \text{при } 0<r<r_0,\\ \frac{1}{2}\delta(r_0) & \text{при } r_0<r\leqslant 2r_0.\end{cases}$$

Таким образом,

$$S(2r_0)\geqslant\frac{p_0}{2\pi}\delta^2(r_0)\ln 2,$$

откуда, принимая во внимание (30), окончательно получим

$$\delta(r)<\sqrt{\frac{2\pi S(2r)}{p_0\ln 2}}<k_3r^{p_0}.$$

Этим теорема полностью доказана.

Заметим, что *если при отображении* (16) *единичная окружность переходит в единичную окружность, то неравенство* (17) *имеет место в замкнутом круге* $|z|\leqslant 1$.

Опираясь на доказанную теорему, нетрудно установить ряд следующих вспомогательных предложений, существенных для дальнейшего.

Мы будем рассматривать линейную систему

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= a\frac{\partial \tau}{\partial x} + b\frac{\partial \tau}{\partial v} + c, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

удовлетворяющую следующим условиям:

$$-4a - b^2 > k > 0, \quad |a| + |b| + |c| < K. \tag{36}$$

Кроме того, мы будем предполагать, что функции a, b, c от независимых переменных x, v кусочно непрерывны и обладают кусочно непрерывными производными во всей плоскости.

ЛЕММА 3. *В полосе* $|v| \leqslant 1$ *существует решение* (35)

$$\zeta = f(z) = R(x, v) + i\tau(x, v)$$

такое, что

$$|f(z)| < M, \quad |f(z+h) - f(z)| < N|h|^{\nu},$$

где постоянные M, N *и* ν, $0 < \nu \leqslant 1$, *зависят только от постоянных* k, K.

Для доказательства построим вспомогательную систему с числовым параметром λ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial v}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= a\frac{\partial \tau}{\partial x} + b\frac{\partial \tau}{\partial v} + \lambda c \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

и будем сначала предполагать, что вне прямоугольника T: $|v| < 1$, $|x| < n$ имеем

$$c \equiv 0. \tag{38}$$

В силу линейности системы (37), нам достаточно установить лемму для λ достаточно малого, при этом малость параметра λ должна, очевидно, зависеть только от постоянных k, K и n.

Построим квази-конформное отображение $\zeta = f_0(z)$, соответствующее системе (37) при $\lambda = 0$, полосы $|v| < 2$ на единичный круг $|\zeta| < 1$ при условиях

$$f_0(0) = 0, \quad f_0(\pm\infty) = \pm 1.$$

В силу условия (36) и известных свойств квази-конформных отображений, при $\zeta = f_0(z)$ область полосы $|v| < 2$, внешняя к T, перейдет в круге $|\zeta| < 1$ в область Δ, содержащую кольцо

$$0 < 1 - r_0 < |\zeta| < 1,$$

где r_0 будет зависеть только от n.

По функциям R и τ построим в полосе $|v| \leqslant 2$ функцию $y = y_0(x, v)$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \tau, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = R; \tag{39}$$

произвольной постоянной при интеграции (39) мы распорядимся, для определенности, так, чтобы $y(0, 0) = 0$.

Заметив это, рассмотрим уравнение

$$a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial v}-\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\lambda c=0 \tag{40}$$

и обозначим через $y=y(x, v, \lambda)$, $y(0, 0, \lambda)=0$, его интеграл в полосе $|v|<2$, совпадающей с $y_0(x, v)$ на прямых $v=\pm 2$. Очевидно, имеем

$$y(x, v, 0)\equiv y_0(x, v).$$

При λ бесконечно малом функция $y(x, v, \lambda)$ будет иметь близость первого порядка с функцией $y_0(x, v)$, следовательно, при бесконечно малом λ функция

$$f(z, \lambda)=\frac{\partial y(x, v, \lambda)}{\partial v}+i\frac{\partial y(x, v, \lambda)}{\partial x},$$

квази-аналитическая в полосах $1<|v|<2$, будет однолистна в части $|v|<2$, внешней к прямоугольнику $|v|<\frac{3}{2}$, $|x|<n+1$. В силу определения квази-однолистности, функция $f(z, \lambda)$ будет квази-однолистна в полосе $|v|<2$ для достаточно малых λ. Квази-однолистность будет во всяком случае иметь место до тех пор, пока $f(z, \lambda)$ — образ прямоугольника T — будет расположен в круге $|\zeta|<1-\frac{r_0}{2}$. Применяя в функции $f(z, \lambda)$ следствие теоремы 1, мы получим, что $f(z, \lambda)$ будет квази-однолистна в полосе $|v|<2$ при всех значениях λ, $\lambda<\lambda_0$, где λ_0 зависит только от постоянных k, K и n; повторное применение того же следствия дает нам заключение леммы при условии (38).

Нам остается избавиться от ограничения (38). Для этой цели оценим $f(z_0)$ при $|x|>n$, когда $f(z)$ соответствует решению (40) при нулевых граничных условиях и при условии (38). В силу доказанной части леммы, всюду в полосе имеем

$$|f(z)|<M, \qquad |f(z+h)-f(z)|<N|h|^{\nu}.$$

В силу условия (38), функция $w=f(z)$ осуществляет квази-конформное отображение полуполосы $S: x>n$, $0<v<1$, на некоторую риманову поверхность.

Пусть $\mathscr{E}(x, v)$ есть эллипс, который главной линейной частью отображения $w=f(z)$ (в окрестности точки x, v) переводится в круг. Отобразим полуполосу S квази-конформно на единичный круг $|\zeta|<1$ при следующих условиях:

1) в каждой точке x, v бесконечно малый эллипс, подобный и подобно расположенный с $\mathscr{E}(x, v)$, переводится (с точностью до малых высших порядков) в круг;

2) точка $x_0+\frac{i}{2}$ переводится в точку $\zeta=0$;

3) точка $x=+\infty$ переводится в точку $\zeta=1$.

В силу известных свойств квази-конформных отображений, при рассматриваемом отображении отрезок, соединяющий точки n и $n+i$,

перейдет в дугу γ окружности $|\zeta|=1$ длины $e^{-k_0(x_0-n)}$, где k_0 зависит только от k и K, а стрезок, соединяющий точки x_0 и x_0+i, перейдет в линию Γ, отстоящую от γ на расстоянии, не меньшем некоторой постоянной k_1, не зависящей от x_0 и n, коль скоро $x_0-n>1$.

Рассмотрим теперь функцию $f(z)$ как функцию ζ:

$$w=F(\zeta).$$

Функция $F(\zeta)$ аналитична в единичном круге $|\zeta|<1$, кроме того, на γ

$$|F(\zeta)|<M,$$

а во всех точках окружности $|\zeta|=1$ вне γ ее мнимая часть равна нулю:

$$\operatorname{Im} F(e^{i\varphi})=0.$$

Следовательно, на Γ будем иметь

$$|f(z_0)|=|F(\zeta)|<C\cdot Me^{-k_0(x_0-n)},$$

а при $x>x_0$

$$|f(z+h)-f(z)|<CNe^{-k_0(x_0-n)}\,|h|^{\nu}, \tag{41}$$

где C — абсолютная постоянная.

Фиксируя n, мы можем, в силу (41), построить искомое решение при помощи ряда

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} f_n(z+n),$$

где $f_n(z)$ суть решения нашей системы, соответствующие разобранному частному случаю.

ЛЕММА 4. *Пусть при* $|v|<1$ $\zeta=f(z)=R+i\tau$ *есть решение системы* (35), *удовлетворяющей условиям* (36), *такое, что*

$$f(0)=1, \quad |\tau(x, \pm 1)|<k_1.$$

При этих условиях в любой полосе $|v|<\lambda<1$ *имеем*

$$\left.\begin{aligned} &|f(z+h)-f(z)|<k_2\,|h|^{\nu},\\ &|\tau|<k_3,\\ &|f(z)|<k_4\ln\frac{1}{1-|v|}+k_5\,|x|, \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

где k_2, k_3 *зависят только от* k, k_1, K, λ, *а постоянные* k_4, k_5 *зависят только от* k, k_1, K.

В самом деле, наша система уравнений удовлетворяет условиям леммы 3, следовательно, существует решение этой системы $f_0(z)$, ограниченное в полосе $|v|<1$ и удовлетворяющее в этой полосе условию Гёльдера с постоянными, зависящими только от k и K.

Заметив это, построим функцию:

$$F(z)=f(z)-f_0(z).$$

Функция $F(z)$ будет удовлетворять однородной системе уравнений (38) при $\lambda=0$; кроме того, мнимая часть $F(z)$ будет ограничена на прямых $v=\pm 1$, но тогда, в силу теоремы 2, наша функция $F(z)$, а значит и $f(z)$, будет удовлетворять (41) и (42).

Лемма полностью доказана.

Кроме установленных свойств линейных систем, для доказательства основной теоремы нам понадобится ряд свойств линейных уравнений и линейных систем, которые я приведу без доказательств. Все эти свойства содержатся или непосредственно вытекают из известных предложений, изложенных в курсах уравнений математической физики ([4]) и статьях М. А. Лаврентьева ([5]), З. Я. Шапиро ([6]), Б. В. Шабата ([7]).

Начнем с результатов, относящихся к теории линейных уравнений второго порядка.

Мы будем рассматривать уравнения вида

$$\Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \tag{43}$$

$$\Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = f(\xi, \eta), \tag{44}$$

где Δ есть оператор Лапласа:

$$\Delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2},$$

а A, B, f суть функции ξ, η, заданные в полосе $0 \leqslant \eta \leqslant 1$.

Свойство 1. Пусть в уравнении (43) коэффициенты A и B ограничены постоянной c_0, а их первые и вторые производные ограничены постоянными c' и c'':

$$|A| < c_0, \quad |B| < c_0, \quad |\operatorname{grad} A| < c', \quad |\operatorname{grad} B| < c', \ \ldots \tag{45}$$

и пусть заданы две функции $y_0(\xi)$ и $y(\xi)$, причем

$$|y_0| \leqslant k_0, \quad |y| \leqslant k_0, \quad |y_0'| < k', \quad |y'| < k', \quad |y_0''| < k'', \quad |y''| < k''.$$

При этих условиях в полосе $0 < \eta < 1$ существует решение (43) $y(\xi, \eta)$, принимающее на границах соответственно значения $y_0(x)$ и $y(x)$. Частные производные функции $y(\xi, \eta)$: $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ будут при этом ограничены сверху и снизу, равномерно непрерывны в замкнутой полосе $0 < \eta < 1$, причем как верхние и нижние границы, так и показатель равномерной непрерывности могут быть оценены только через постоянные c и k.

Если $y(\xi) \equiv 0$, а $y_0(\xi)$ не превосходит ε, то

$$y(\xi, \eta) < \varepsilon(1 - c_1\eta),$$

где постоянная c_1 зависит только от постоянных c_0 и c'.

Свойство 2. При обозначениях, принятых выше, производная $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ стремится к нулю вместе с c_0, c' и k'.

Свойство 3. Пусть в уравнении (44) коэффициенты A и B удовлетворяют прежним условиям и пусть $y(\xi, \eta)$ есть решение (44) при нулевых граничных условиях:

$$y(\xi, 0) = 0, \quad y(\xi, 1) = 0.$$

Тогда, если функция f дифференцируема и всюду в полосе $0 \leqslant \eta \leqslant 1$ $|f(\xi, \eta)| < \varepsilon$, то

$$\left|\frac{\partial y}{\partial \xi}\right| < K\varepsilon, \quad \left|\frac{\partial y}{\partial \eta}\right| < K\varepsilon,$$

где постоянная K зависит только от постоянных c_0, c', c''.

В дальнейшем нам понадобятся также два свойства решений $y(x, v)$ уравнений вида

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + A\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial x\, \partial v} = C, \tag{46}$$

где A, B, C суть функции x, удовлетворяющие условиям

$$\left|\frac{dA}{dx}\right| < \nu, \quad \left|\frac{dB}{dx}\right| < \nu, \quad |C| < \varepsilon \tag{47}$$

и условию эллиптичности

$$4A - B^2 > c_0 > 0.$$

Свойство 4. Если при $v = \pm 1$

$$\left|\frac{\partial y(x, \pm 1)}{\partial x}\right| < k',$$

то всюду в полосе $|v| < 1$ имеем

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| < k' + K\varepsilon.$$

Свойство 5. Если

$$\left|\frac{\partial y(x, -1)}{\partial x}\right| < k', \quad \max_{|x|<\infty}\left|\frac{\partial y(x, 1)}{\partial x}\right| = M,$$

то при M достаточно большом, $M \geqslant M_0(\nu, c_0, k', \varepsilon)$, всюду в полосе $|\nu| < 1$ будем иметь

$$\left|\frac{\partial y(x, v)}{\partial x}\right| < M.$$

Свойство 6. Если коэффициенты уравнения (46) дополнительно удовлетворяют условиям

$$\left|\frac{d^2A}{dx^2}\right| < \nu, \quad \left|\frac{d^2B}{dx^2}\right| < \nu, \quad \left|\frac{dC}{dx}\right| < \nu$$

и если

$$M = \max\left|\frac{\partial^2 y(x, 1)}{\partial x^2}\right| > \max\left|\frac{\partial^2 y(x, -1)}{\partial x^2}\right| + \lambda,$$

то при λ достаточно большом, $\lambda \geqslant \lambda_0(\nu, \varepsilon, \varepsilon_0)$, будет

$$\left|\frac{\partial^2 y(x, v)}{\partial x^2}\right| < M.$$

Перейдем к группе свойств квази-конформных отображений, соответствующих линейным системам.

Мы будем рассматривать квази-конформные отображения (полосы $0 < \eta < 1$ плоскости ξ, η на области плоскости x, y), соответствующие системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= a_1\frac{\partial x}{\partial \xi} + b_1\frac{\partial y}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= a_2\frac{\partial x}{\partial \xi} + b_2\frac{\partial y}{\partial \xi}, \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

где коэффициенты a и b суть заданные дважды дифференцируемые функции четырех координат x, y, ξ, η. Кроме того, систему (48) мы будем предполагать эллиптической:

$$-4b_1a_2-(b_2a_1)^2>\nu>0,$$

где ν — постоянная, не зависящая от координат.

Отметим прежде всего следующую общую теорему:

Свойство 7. Какова бы ни была односвязная риманова поверхность S гиперболического типа, всегда существует квази-конформное отображение (соответствующее системе (48)) полосы $0<\eta<1$ на S; это отображение единственно с точностью до трех действительных постоянных. Если коэффициенты a и b ограничены по модулю постоянной k, а поверхность S принадлежит полосе $|y|<H$, то в полосе $h<\eta<1-h$, $h>0$, функции x и y удовлетворяют условию Гёльдера

$$|f(\zeta+\Delta\zeta)-f(\zeta)|<K|\Delta\zeta|^{\alpha}, \tag{49}$$

$$(\zeta=\xi+i\eta, \quad f(\zeta)=x+iy)$$

где K и $\alpha>0$ зависят только от ν, k, H, h.

Если дополнительно допустить, что все первые частные производные коэффициентов a и b ограничены постоянной k', то в полосе $h<\eta<1-h$ все частные производные x и y будут ограничены постоянной, зависящей только от ν, k, H, h, k', причем

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \eta}\right|<K\ln\frac{1}{\eta(1-\eta)}. \tag{50}$$

Остановимся особо на случае, когда S есть единичная полоса $0<y<1$, а при отображении

$$z=f(\zeta), \quad z=x+iy,$$

точки $\xi=\pm\infty$ переходят в точки $x=\pm\infty$.

Свойство 8. Если все первые частные производные коэффициентов a и b не превосходят ε', то в полосе $0\leqslant\eta\leqslant1$ будем иметь

$$0<k<\left|\frac{f(\zeta+\Delta\zeta)-f(\zeta)}{\Delta\zeta}\right|<K,$$

где k и K зависят только от ε', ν и максимумов модулей коэффициентов a и b.

Свойство 9. Если все первые частные производные коэффициентов a и b не превосходят ε', а их вторые частные производные — ε'', то в полосе $0\leqslant\eta\leqslant1$ будем иметь

$$\left|\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2}\right|<K\varepsilon'\left(1+\varepsilon'\ln\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}\right), \quad \varepsilon'<\varepsilon''.$$

Отметим в заключение еще два свойства, устанавливающие зависимость между вариацией отображения и вариацией коэффициентов a и b.

Свойство 10. Допустим, что наряду с системой (48) мы имеем бесконечно-близкую систему

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \bar{a}_1 \frac{\partial x}{\partial \xi} + \bar{b}_1 \frac{\partial y}{\partial \xi},\\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \bar{a}_2 \frac{\partial x}{\partial \xi} + \bar{b}_2 \frac{\partial y}{\partial \xi}\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

и пусть $z = \bar{f}(\zeta)$ дает отображение, соответствующее системе (51), единичной полосы $0 < \eta < 1$ на единичную полосу $0 < y < 1$:

$$\bar{f}(\pm\infty) = \pm\infty, \quad \bar{f}(0) = 0.$$

При этих условиях, если первые и вторые частные производные коэффициентов a и b не превосходят $\frac{1}{T}$ и если вариации

$$\delta a_1 = \bar{a}_1 - a_1, \ldots, \delta b_2 = \bar{b}_2 - b_2$$

не превосходят ε, а их первые и вторые частные производные не превосходят $\frac{\varepsilon}{T}$, то вариации всех вторых частных производных x, y по ξ, η не превосходят $K\frac{\varepsilon}{T}$ ($K = \text{const}$, T велико сравнительно с единицей), а вариация первых производных не превосходит $K\varepsilon$.

§ 2. Приближенное решение и его свойства. В силу рассмотрений § 7 нашей статьи ([3]), задача построения квази-конформного отображения криволинейной полосы на полосу $0 < v < 1$ сводится к задаче Дирихле для квази-линейного уравнения второго порядка. Мы рассмотрим сначала случай, когда основная система уравнений не содержит явно координат y и u. В этом случае квази-линейное уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - b\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} - a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c, \tag{52}$$

где a, b и c суть функции R, τ и координат x, v:

$$R = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \tau = \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$a = a(R, \tau, x, v), \quad b = b(R, \tau, x, v), \quad c = c(R, \tau, x, v),$$

равномерно непрерывные вместе с их первыми двумя производными в плоскостях R, τ и x, v.

В силу предполагаемой сильной эллиптичности основной системы, уравнение (52) будет эллиптично:

$$-4a - b^2 > 0 \quad (R \neq 0). \tag{53}$$

В ближайших параграфах при конструировании решения мы будем дополнительно предполагать, что при R достаточно больших, $R \geqslant C$,

$$a = -1, \quad b = 0,$$

а при R достаточно малых, $R \leqslant \mu_0$,

$$-4a - b^2 > k > 0.$$

Кроме того, будем предполагать, что a и b слабо зависят от координат: модули всех первых частных производных a и b по x и v не превосходят числа ν:

$$\left|\frac{\partial a}{\partial x}\right| < \nu, \ldots, \left|\frac{\partial b}{\partial v}\right| < \nu. \tag{54}$$

Функцию c будем предполагать малой со всеми ее частными производными по всем четырем аргументам:

$$|c| < \nu, \quad \left|\frac{\partial c}{\partial R}\right| < \nu, \ldots, \left|\frac{\partial c}{\partial v}\right| < \nu. \tag{55}$$

От этих ограничений мы в дальнейшем освободимся.

Переходя к конструкции решения уравнения (52), мы начнем с построения «приближенного решения» задачи Дирихле для этого уравнения. Это приближенное решение мы будем строить в единичной полосе $0 < v < 1$ в предположении, что искомая функция $y(x, v)$ задана на границах этой полосы:

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad y(x, 1) = y_1(x), \tag{56}$$

причем функции y_0 и y_1 будем предполагать дважды дифференцируемыми и такими, что

$$\begin{gathered} 0 < k_0 < y_1(x) - y_0(x) < k_1, \\ |y_0'| < k', \quad |y_1'| < k', \\ |y_0''| < k'', \quad |y_1''| < k''. \end{gathered}$$

Фиксируем положительное число T и положим

$$\left.\begin{gathered} a = a_0(x) = a(R_0, \tau_0, x, 0), \quad b = b_0(x) = b(R_0, \tau_0, x, 0), \\ c = c_0(x) = c(R_0, \tau_0 x, 0), \end{gathered}\right\} \tag{57}$$

где

$$\left.\begin{aligned} R_0 &= \frac{1}{T^2} \int\limits_{x-T}^{x+T} dt \int\limits_{t-T}^{t+T} [y_1(t) - y_0(t)]\, dt, \\ \tau_0 &= \frac{1}{2T^3} \int\limits_{x-T}^{x+T} dt \int\limits_{t-T}^{t+T} [y_1(t+T) - y_1(t) + y_0(t+T) - y_0(t)]\, dt. \end{aligned}\right\} \tag{58}$$

Дифференцируя R_0 и τ_0, мы можем получить оценки для четырех первых производных R_0 и τ_0 по x:

$$\left.\begin{aligned} |R_0'| &< \frac{2(k_1 - k_0)}{T}, & |\tau_0'| &< \frac{2k'}{T}, \\ |R_0''| &< \frac{4k_1}{T^2}, & |\tau_0''| &< \frac{4k'}{T^2}, \\ |R_0'''| &< \frac{4k'}{T^2}, & |\tau_0'''| &< \frac{4k'}{T^3}, \\ |R_0^{\mathrm{IV}}| &< \frac{4k''}{T^2}, & |\tau_0^{\mathrm{IV}}| &< \frac{4k''}{T^3}. \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Наряду с приведенными оценками, нам в дальнейшем понадобятся еще оценки для вариаций производных R_0 и τ_0 в зависимости от вариаций y_0 и y_1.

Итак, пусть

$$\delta y_0 = 0, \quad |\delta y_1| \leqslant \varepsilon;$$

тогда, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} |\delta R_0'| &< \frac{4\varepsilon}{T}, & |\delta \tau_0'| &< \frac{8\varepsilon}{T^2}, \\ |\delta R_0''| &< \frac{4\varepsilon}{T^2}, & |\delta \tau_0''| &< \frac{8\varepsilon}{T^3}. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Построим теперь дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - a_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - b_0(x)\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial v} = c_0(x). \tag{61}$$

Интеграл этого уравнения, правильный в полосе $0 < v < 1$ и принимающий на границах полосы значения (56), мы будем рассматривать как «приближенное» выражение интеграла уравнения (52) при тех же граничных заданиях. При сделанных гипотезах относительно a, b и c уравнение (61) есть линейное уравнение эллиптического типа, допускающее дважды непрерывно дифференцируемое в полосе $0 < v < 1$ решение при любых дважды дифференцируемых граничных условиях.

Кроме известных свойств интеграла $y(x, v)$ уравнения (61), приведенных нами в нашей статье ([3]), нам понадобится следующее вариационное предложение:

ЛЕММА 5. *При фиксированных достаточно малых значениях констант k', k'' и при любом достаточно большом фиксированном T, если вариация $y_0(x)$ не превосходит ε и стремится к нулю при $|x| \to \infty$, а вариация $y_1(x)$ равна нулю:*

$$|\delta y_0(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \lim_{|x|\to\infty} \delta y_0(x) = 0, \quad \delta y_1(x) = 0,$$

то при любом $v > 0$ вариация $y(x, v)$, $v = \text{const}$, не будет превосходить $m\varepsilon$:

$$|\delta y(x, v)| < m\varepsilon,$$

где m зависит только от v, и при любом v

$$m = m(v) < 1.$$

Для доказательства приведем, прежде всего, уравнение (61) к каноническому виду:

$$\Delta y + A\frac{\partial y}{\partial \xi} + B\frac{\partial y}{\partial \eta} = C. \tag{62}$$

Соотношения между старыми переменными x, v и новыми ξ, η:

$$\xi = \xi(x, v), \quad \eta = \eta(x, v) \tag{63}$$

будут осуществлять квази-конформное отображение единичной полосы $0 < v < 1$, на единичную полосу $0 < \eta < 1$, соответствующее линейной системе

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \quad \frac{b_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{a_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial v} &= -\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{b_0}{\Delta}\frac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \Delta &= -a_0 - \frac{1}{4}b_0^2 > k > 0. \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

Коэффициенты A и B будут при этом иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{M}(a_0\,\xi_{xx} + b_0\,\xi_{xv} + \xi_{vv}),\\ B &= \frac{1}{M}(a_0\,\eta_{xx} + b_0\,\eta_{xv} + \eta_{vv}),\\ M &= \frac{1}{-a_0\,\xi_x^2 - b_0\xi_x\xi_v + \xi_v^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

Аналогичное преобразование мы проделаем для уравнения (61), соответствующего провариированному граничному условию; полагая

$$\bar{y}(x, v) = y(x, v) + \delta y(x, v),$$

получим

$$\Delta\bar{y} + \bar{A}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\xi}} + \bar{B}\frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{\eta}} = \bar{C}, \qquad (66)$$

где $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ определяются по формулам (64) и (65) при вариированных значениях a_0 и b_0.

Заметив это, фиксируем произвольную точку $M(x_0, v)$ и оценим в этой точке вариацию $\delta y(x, v)$. Произвольной постоянной в отображении (63) и проварииированном отображении

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(x, v), \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}(x, v) \qquad (67)$$

мы распорядимся так, чтобы точка M при первом отображении перешла в точку $M_1(0, \eta)$ и чтобы при обоих отображениях некоторая точка x_1 оси x перешла в начало координат.

Искомую вариацию δy представим как сумму пяти вариаций:

$$\delta y = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \delta_4 + \delta_5.$$

За δ_1 мы примем вариацию интеграла $y(\xi, \eta)$ уравнения (62) в точке M при начальных функциях A и B, когда вариируются только граничные условия: от условия

$$y(\xi, 0) = y_0[x(\xi)]$$

мы переходим к условию

$$y(\xi, 0) = y_0[x(\xi)] + \delta y_0[x(\xi)].$$

За δ_2 мы примем δy в точке M_1 уравнения (62), когда вариируются только A и B. За δ_3 мы примем δy в точке M_1 уравнения (62), когда вариируются только граничные условия в соответствии с переходом от координат ξ, η к координатам $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$,

$$\delta y_0 = y_0[\bar{x}(\xi)] - y_0[x(\xi)].$$

За δ_4 мы примем δy уравнения (62) при переходе от точки M_1 к точке $M_1(\bar{\xi}_0, \bar{\eta})$, соответствующей точке M при отображении (67). За δ_5 мы примем δy, когда варииируется только правая часть (62).

Мы покажем, что при сделанных гипотезах главным членом δy будет являться член δ_1, который, согласно отмеченному в предыдущем параграфе свойству 1, имеет вид

$$|\delta_1| < \varepsilon(1 - c\eta_0), \tag{68}$$

где $c > 0$, но, в силу свойства 8 отображения (63), отношение $\frac{\eta_0}{v}$ ограничено сверху и снизу постоянными, зависящими также только от постоянных k', k'' и T, следовательно, в (68) мы можем η_0 заменить на v:

$$|\delta_1| < \varepsilon(1 - cv).$$

Докажем теперь, что все остальные δ при больших T малы сравнительно с εv или, что то же самое, с $\varepsilon\eta_0$.

Варьируя уравнение (62), для δ_2 получим:

$$\Delta\delta_2 + A\frac{\partial\delta_2}{\partial\xi} + B\frac{\partial\delta_2}{\partial\eta} = -\frac{\partial y}{\partial\xi}\delta A - \frac{\partial y}{\partial\eta}\delta B. \tag{69}$$

Нам нужно оценить δ_2 в точке M_1 при условии, что на границах единичной полосы δ_2 обращается в нуль. Для этой цели оценим правую часть (69); мы можем при этом ограничиться случаем, когда

$$|y_1(0) - y_0(0)| < 2C.$$

В силу свойства 1 линейных уравнений, $\frac{\partial y}{\partial\xi}$, $\frac{\partial y}{\partial\eta}$ ограничены величинами, зависящими только от постоянных C, k', k'', следовательно, порядок малости правой части (69) будет определяться δA и δB. В силу (65), δA и δB суть суммы произведений функций a и b на вариации вторых частных производных ξ и η по x и v, а также произведений тех же частных производных на вариации a и b:

$$a_0\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, b_0\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, \tag{70}$$

$$\delta a_0\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}, \ldots, \delta b_0\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \ldots \tag{71}$$

Рассмотрим члены (70). По условиям задачи a_0 и b_0 ограничены, а в силу (59), (60) и свойства 9 линейных квази-конформных отображений, все вариации $\delta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ будут иметь порядок $\frac{\varepsilon}{T}$.

Перейдем к членам (71). В силу свойства 8 линейных систем, $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$ будут малы вместе с $\frac{1}{T}$, а члены δa_0, δb_0 будут иметь порядок ε.

Таким образом, окончательно

$$\left|\frac{\partial y}{\partial\xi}\delta A + \frac{\partial y}{\partial\eta}\delta B\right| < K\frac{\varepsilon}{T},$$

где K — постоянная, зависящая только от постоянных C, k', k''. Отсюда, в силу линейности (69), заключаем, что

$$\left|\frac{\partial\delta_2}{\partial\eta}\right| < K_1\frac{\varepsilon}{T}$$

и в интересующей нас точке M

$$|\delta_2| < K_2\frac{\varepsilon\eta_0}{T}.$$

Перейдем к оценке δ_3. В силу определения δ_3 и условий, определяющих квази-конформное отображение (63) и его вариацию, наша задача сводится к оценке вариации решения уравнения (62) при переходе от граничных условий

$$y(\xi, 0) = y_0(\xi), \quad y(\xi, 1) = y_1(\xi)$$

к условиям

$$y(\xi, 0) = y_0[\varphi_0(\xi)], \quad y(\xi, 1) = y_1[\varphi_1(\xi)],$$

где $\bar{\xi} = \varphi_0(\xi)$ и $\bar{\xi} = \varphi_1(\xi)$ суть функции, определяющие соответствия между границами единичных полос плоскостей ξ, η и $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$. Эти функции обладают тремя первыми производными, причем, в силу свойства 9, имеем

$$\varphi_0(0) = 0, \quad |\varphi_0'(\xi) - 1| < K\varepsilon, \quad |\varphi_0''(\xi)| < \frac{K\varepsilon}{T},$$
$$|\varphi_1'(\xi) - 1| < K\varepsilon, \quad |\varphi_1''(\xi)| < K\varepsilon.$$

Кроме того, очевидно, что

$$|\varphi_1(0)| < K\varepsilon,$$

где K зависит только от постоянных k.

Отсюда, принимая во внимание малость k', k'', $\frac{1}{T}$, мы, в силу свойства 6 линейных уравнений, получим, что δ_3 мало сравнительно с $\varepsilon\eta_0$.

Оценим δ_4. В силу свойства 9 квази-конформных отображений и дополнительных условий, наложенных на отображения (63) и (67), будем иметь

$$|\bar{\xi}_0| < K\varepsilon\eta_0, \quad |\bar{\eta}_0 - \eta_0| < \frac{K\varepsilon\eta_0}{T},$$

но, по условиям задачи и свойству 7 линейных уравнений, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$ мало, а $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ ограничено постоянной, зависящей только от постоянных k, следовательно, δ_4 будет мало сравнительно с $\varepsilon\eta_0$.

Нам остается оценить δ_5. В силу определения δ_5,

$$\Delta\delta_5 + A\frac{\partial \delta_5}{\partial \xi} + B\frac{\partial \delta_5}{\partial \eta} = \delta C.$$

Но так как по условию c, а следовательно, и C, слабо зависит от всех аргументов, то δC будет мало сравнительно с вариациями R_0 и τ_0. Таким образом, в интересующей нас точке

$$|\delta_5| < K\varepsilon\eta_0.$$

Наше предложение полностью доказано.

§ 3. Лемма о склеивании. Рассмотрим в плоскости x, v полосу $|v| < 1$; пусть на границах этой полосы $v = \pm 1$ нам заданы функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, удовлетворяющие условиям леммы 5. В силу известных свойств линейных систем, какова бы ни была дважды диф-

ференцируемая функция $y_0(x)$, для которой $|y_2-y_0|$, $|y_0-y_1|$, $|y_0'|$, $|y_0''|$ ограничены, всегда можно построить функции $y_1(x, v)$, $y_2(x, v)$ такие, что функция y_1 удовлетворяет в полосе $-1<v<0$ уравнению (61) и принимает на прямых $v=0$, $v=-1$ соответственно значения $y_0(x)$ и $y_1(x)$; функция y_2 удовлетворяет (61) в полосе $0<v<1$ и принимает на прямых $v=0$ и $v=1$ соответственно значения $y_0(x)$ и $y_2(x)$. При этом мы естественно предполагаем, что коэффициенты a_0, b_0 и c_0 в уравнении (61) определяются по формулам (57) и (58) для нижней полосы через $y_1(x)$ и $y_0(x)$, а для верхней полосы — через $y_0(x)$ и $y_2(x)$.

Установим следующую лемму:

ЛЕММА 6. *При сделанных гипотезах относительно $y_1(x)$ и $y_2(x)$ и при T достаточно большом, существует дважды дифференцируемая функция $y_0(x)$ такая, что вдоль оси x*

$$\frac{\partial y_1(x, 0)}{\partial v}=\frac{\partial y_2(x, 0)}{\partial v},$$

причем, если $|y_1'(x)|$ и $|y_2'(x)|$ ограничены постоянной k', а $|y_1''(x)|$, $|y_2''(x)|$ ограничены постоянной k'', то

$$|y_0'(x)|<k'+\mu_1(\nu), \quad |y_0''(x)|<\mu_2(k', k'', \nu),$$

где μ_1 стремится к нулю вместе с ν, а μ_2 — вместе с k' и ν.

Для доказательства воспользуемся альтернирующим процессом Шварца. Фиксируем число h и рассмотрим две полосы B_1: $-1<v<h$ и B_2: $-h<v<1$, в каждой из которых строим свою последовательность функций. Через $y_2^{(1)}(x, v)$ обозначим решение уравнения (61) в полосе B_1, принимающее на $v=h$ значение 0, а на прямой $v=-1$ значения $y_1(x)$. Через $y_2^{(1)}(x, v)$ обозначим решение уравнения (61) в полосе B_2, принимающее на $v=-h$ значения $y_1^{(1)}(x, -h)$, а на $v=1$ значения $y_2(x)$. Через $y_1^{(n)}(x, v)$ обозначим решение уравнения (61) в полосе B_1, принимающее на $v=h$ значения $y_2^{(n-1)}(x, h)$, а на $v=-1$ значения $y_1(x)$; $y_2^{(n)}(x, v)$ есть решение уравнения (61), равное $y_1^{(n)}(x, -h)$ на $v=-h$ и равное $y_2(x)$ на $v=1$.

В силу свойств 4, 5, частные производные по x всех функций $y^{(n)}$ не будут превосходить $k'+\lambda$, а вторые частные производные по x не будут превосходить μ_2, где λ и μ не зависят ни от n, ни от h. Отсюда, используя лемму 5, заключаем, что каждая из последовательностей

$$y_1^{(1)}, y_1^{(2)}, \ldots, y_1^{(n)}, \ldots,$$
$$y_2^{(1)}, y_2^{(2)}, \ldots, y_2^{(n)}, \ldots$$

будет равномерно сходиться соответственно в полосах B_1 и B_2. Обозначим соответственно через $y_1(x, v, h)$ и $y_2(x, v, h)$ пределы этих последовательностей.

В силу свойства 1 линейного уравнения, построенные функции суть решения уравнения (61) и обладают равностепенно непрерывными

(относительно h) частными производными по v; кроме того, по построению,

$$y_1(x, -h, h) = y_2(x, -h, h), \quad y_1(x, h, h) = y_2(x, h, h).$$

Отсюда заключаем, что при $h \to 0$ построенные функции в пределе дадут искомые решения $y_1(x, v)$ и $y_2(x, v)$.

Вторая часть заключения леммы вытекает из построения, леммы 5 и свойств 4, 5 линейных уравнений.

Из двух установленных выше лемм и свойств линейных систем нетрудно получить следующие вариационные предложения относительно функции $y_0(x)$ леммы 6:

ЛЕММА 7. *Пусть в условиях леммы 6 функция $y_1(x)$ получает бесконечно малое дважды дифференцируемое приращение δy_1. Обозначая через δy_0 соответствующее приращение функции склеивания $y_0(x)$, будем иметь*

$$|\delta y_0| < \mu_1 |\delta y_1|, \quad |\delta y_0'| < \mu_2 |\delta y_1|,$$

где μ_1 и μ_2 — постоянные, зависящие только от постоянных k и ν, причем $\mu_1 < 1$.

§ 4. Принцип подобия. Уравнение (61), очевидно, инвариантно относительно подобного преобразования пространства x, v, y, если интервал осреднения T изменять с тем же коэффициентом подобия. Отсюда вытекает, что последние леммы можно формулировать для произвольной полосы с границами, параллельными оси x.

Если ширина полосы будет равна λ, то в формулах (57) вместо R_0 и τ_0 нужно подставить выражения

$$R_0 = \frac{1}{t^2\lambda} \int\limits_{x-t}^{x+t} ds \int\limits_{s-t}^{s+t} [y_2(s) - y_1(s)]\, ds,$$

$$\tau_0 = \frac{1}{2t^3} \int\limits_{x-t}^{x+t} ds \int\limits_{s-t}^{s+t} [y_2(s+t) - y_2(s) + y_1(s+t) - y_1(s)]\, ds.$$

Заключения трех последних лемм будут оставаться в силе, если при фиксированном k_2,

$$|y_2(x) - y_1(x)| < k_2\lambda,$$

будут достаточно малы следующие пять величин:

$$\max|y_1'|, \quad \max|y_2'|, \quad \lambda \max|y_1''|, \quad \lambda \max|y_2''| \text{ и } \frac{\lambda}{t}.$$

§ 5. n-е приближение. Разобьем единичную полосу B: $0 < v < 1$ на n полос $B_1, B_2, \ldots, B_n$,

$$B_i : \frac{i-1}{n} < v < \frac{i}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Функцию $Y(x, v)$ назовем приближенным решением n-го порядка уравнения (52), если функция Y будет обладать в полосе B непрерыв-

ными частными производными по x и v и если в каждой полосе B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ функция Y будет удовлетворять уравнению (61) при

$$\lambda=\frac{1}{n}, \quad y_1=Y\left(x, \frac{i-1}{n}\right), \quad y_2=Y\left(x, \frac{i}{n}\right).$$

Определенное таким образом n-е приближение Y будет, очевидно, зависеть от параметра «осреднения» t, которому мы придадим вид

$$t=\frac{T}{n}.$$

Установим теперь следующую основную лемму.

ЛЕММА 8. *Пусть уравнение* (52) *удовлетворяет условиям* (54), (55) *и*

$$c(0, \tau, x, v)\equiv 0.$$

Пусть, кроме того, заданы две функции $y_0(x)$ *и* $y_1(x)$, *обладающие двумя первыми производными и такие, что*

$$\left.\begin{aligned} &|y_1(x)-y_0(x)|<k_0, \\ &\lim_{x\to+\infty} y_0(x)=h_0, \quad \lim_{x\to-\infty} y_0(x)=h_1, \\ &\lim_{x\to+\infty} y_1(x)=h_2, \quad \lim_{x\to-\infty} y_1(x)=h_{32} \\ &|y_0'(x)|<k', \quad |y_1'(x)|<k', \\ &|y_0''(x)|<k'', \quad |y_1''(x)|<k''. \end{aligned}\right\} \qquad (72)$$

При этих условиях, каковы бы ни были фиксированные числа $k_0, h_0, \ldots, h_3$ *и достаточно малые* ν, k', k'', $\frac{1}{T}$, *при любом* n *в полосе* B *существует приближенное решение* $Y(x, v)$ n*-го порядка уравнения* (52), *принимающее на границах полосы, соответственно, значения*:

$$Y(x, 0)=y_0(x), \quad Y(x, 1)=y_1(x).$$

Заметим, прежде всего, что при $y_0(x)=y_1(x)=0$ решение тривиально: $Y(x, v)\equiv 0$ при любом n и T.

Допустим, что искомое решение Y_n существует при граничных условиях $\mu y_0(x)$ и $\mu y_1(x)$, где y_0 и y_1 — функции, удовлетворяющие (72), а μ — некоторое положительное число, меньшее единицы, и построим решение для граничных условий $(\mu+\Delta\mu)\, y_0(x)$ и $y_1(x)$ при $\Delta\mu$ достаточно малом. Мы будем искать методом последовательных приближений значения $Y_{\mu+\Delta\mu}$ на границах полос B_i. Опишем процесс.

Рассмотрим полосы B_1 и B_2. Используя лемму о склеивании, построим в полосе $0<v<\frac{2}{n}$ непрерывно дифференцируемую функцию, удовлетворяющую в полосах B_1 и B_2 уравнению (61) и принимающую на границах $v=0$, $v=\frac{2}{n}$ соответственно значения $(\mu+\Delta\mu)\, y_0(x)$ и $Y_\mu\left(x, \frac{2}{n}\right)$. Обозначим через $z_1(x, 1)$ значения построенной функции на прямой $v=\frac{1}{n}$. В полосе $\frac{1}{n}<v<\frac{3}{n}$ строим, согласно той же лемме,

решение (61), принимающее на прямых $v=\frac{1}{n}$, $\frac{3}{n}$ значения $z_1(x, 1)$ и $Y_\mu\left(x, \frac{3}{n}\right)$. Значения построенной функции вдоль $v=\frac{2}{n}$ обозначим через $z_1(x, 2)$. Продолжая этот процесс, мы получаем $n-1$ функций:

$$z_1(x, 1),\ z_1(x, 2), \ldots, z_1(x, n-1).$$

Повторим описанный выше процесс; заменяя граничные условия $Y_\mu\left(x, \frac{i}{n}\right)$ граничными условиями $z_1(x, i)$, мы получим новую группу $n-1$ функций:

$$z_2(x, 1),\ z_2(x, 2), \ldots, z_2(x, n-1).$$

Отправляясь от функций z_2, мы построим $n-1$ функций z_3 и т. д.

Покажем, что в условиях леммы при любом $i=1, 2, \ldots, n-1$ последовательность функций

$$z_1(x, i),\ z_2(x, i), \ldots, z_m(x, i), \ldots$$

существует и равномерно сходится к дважды дифференцируемой функции $z(x, i)$, причем решение (61), построенное в полосах B_i $(i=1, 2, \ldots, n)$, при граничных значениях $z(x, i)$ и $z(x, i+1)$ будет давать искомое решение $Y_{\mu+\Delta\mu}$.

Для этой цели отметим предварительно некоторые свойства функций Y_μ и z_m.

Рассмотрим отображение единичной полосы $0<v<1$ плоскости x, v на поверхность S плоскости R, τ, осуществляемое функциями

$$R=\frac{\partial Y_\mu}{\partial v}, \quad \tau=\frac{\partial Y_\mu}{\partial x}. \tag{73}$$

Отображение (73) соответствует системе

$$\frac{\partial \tau}{\partial v}=\frac{\partial R}{\partial x},$$

$$\frac{\partial R}{\partial v}=a_0\frac{\partial \tau}{\partial x}+b_0\frac{\partial \tau}{\partial v}+c_0,$$

где a_0, b_0 и c_0 суть функции x, v, равномерно непрерывные в каждой из полос $\frac{i}{n}<v<\frac{i+1}{n}$. Кроме того, эти коэффициенты равномерно ограничены и удовлетворяют условиям сильной эллиптичности.

По условиям задачи, на границах полосы $v=0$, $v=1$ имеем $|\tau|<k'$, следовательно, в силу леммы 4, будем иметь:

1°. Во всей полосе $0\leqslant v\leqslant 1$

$$|\tau|<k'+\lambda,$$

где λ не зависит от n и стремится к нулю вместе с c_0.

2°. При любом положительном h в полосе $h<v<1-h$ функции R и τ равностепенно непрерывны и удовлетворяют условию Гёльдера (равномерно относительно n).

3°. При любом x и v, $0 < v < 1$,

$$|R(x, v)| < K \ln \frac{1}{v(1-v)},$$

где K не зависит от n.

Из 1° и 3° непосредственно заключаем, что решения Y_μ в полосе $0 < v < 1$ равностепенно непрерывны относительно n.

Кроме того, в силу отмеченных выше свойств интегралов линейных уравнений и в силу 1°, имеем

4°. Всюду в полосе $0 < v < 1$

$$\left|\frac{\partial^2 Y_\mu}{\partial x^2}\right| < \rho(k', \nu) \cdot n, \tag{74}$$

где $\rho(k', \nu)$ мало вместе с k' и ν.

Заметив это, займемся функциями $z_m(x, i)$. В силу леммы (7), имеем

$$|z_{m+1}(x, i) - z_m(x, i)| < \theta |z_m(x, i) - z_{m-1}(x, i)|, \tag{75}$$

где $\theta < 1$ и зависит от постоянных k' и ν из условий леммы (7). Таким образом, построение функций z_{m+1} будет возможно и все эти функции будут удовлетворять (75) при фиксированном θ, если z_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ будут обладать достаточно малыми производными z'_j. Но в силу (74),

$$|z_j(x, i) - Y_\mu(x, i)| < \frac{\Delta\mu}{1-\theta},$$

следовательно, применяя лемму (7) и свойство 1° решения Y_μ, получим

$$\left|z'_j(x, i) - \frac{\partial}{\partial x} Y_\mu(x, i)\right| < K\Delta\mu,$$

$$|z'_j(x, i)| < k' + \lambda + K\Delta\mu.$$

Взяв k', ν и $\Delta\mu$ достаточно малыми, мы обеспечим для каждого шага возможность построения функций z_{m+1} и применимость лемм (5), (6) и (7) при фиксированном θ, не зависящем от m.

Отсюда, в силу (74), следует равномерная сходимость последовательности

$$z_1(x, i),\ z_2(x, i), \ldots, z_m(x, i), \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\lim_{m\to\infty} z_m(x, i) = Y_{\mu+\Delta\mu}(x, i).$$

Кроме того, в силу (74), построенное «приближенное» решение $Y_{\mu+\Delta\mu}$ будет обладать в каждой из полос B_i равномерно непрерывными частными производными по x и v, причем на общей границе полос B_i и B_{i+1} производная $\frac{\partial Y}{\partial v}$ для B_i будет равна $\frac{\partial Y}{\partial v}$ для B_{i+1}.

Таким образом, мы доказали, что для k', $\frac{1}{T}$ и ν достаточно малых, при наличии решения Y_μ при граничных условиях $\mu y_0(x)$, $\mu y_1(x)$ можно построить решение для граничных условий $(\mu + \Delta\mu)\, y_0(x)$, $\mu y_1(x)$.

Следовательно, при k', ν и $\frac{1}{T}$ достаточно малых и при любых фиксированных k и k'' существует приближенное решение (52) при граничных условиях $y_0(x)$, $y_1(x)$ любого конечного порядка n.

§ 6. Предельный переход и общие свойства квази-конформных отображений. Из перечисленных выше свойств приближенного решения $Y_n(x, v)$ n-го порядка уравнения (52) непосредственно следует, что функции Y_n равностепенно непрерывны в полосе $0 < v < 1$; а функции

$$R_n = \frac{\partial Y_n}{\partial v}, \quad \tau_n \frac{\partial Y_n}{\partial x}$$

равностепенно непрерывны в полосе $h < v < 1 - h$ при любом $h > 0$. Из последовательности Y_n мы можем, таким образом, выделить равномерно сходящуюся последовательность так, чтобы функции R_n и τ_n также равномерно сходились.

Обозначим через $Y(x, v)$ предельную функцию. При $n \longrightarrow \infty$ «осредненные» коэффициенты a_0, b_0 и c_0 n-го приближения будут также равномерно сходиться к функциям $a_0(R, \tau, x, v)$, $b(R, \tau, x, v)$ и $c(R, \tau, x, v)$, где R и τ суть частные производные функции Y соответственно по v и по x.

Отсюда заключаем, что построенная предельная функция $Y(x, v)$ будет давать искомый интеграл уравнения (52) при граничных условиях $y_0(x)$ и $y_1(x)$. Этим самым доказана теорема существования (52) для достаточно малых k' и ν и при любых фиксированных k и k''. Кроме того, при доказательстве мы предполагали, что c обращается в нуль вместе с R.

Отправляясь от построенного решения уравнения (52), нетрудно установить теорему существования квази-конформного отображения, соответствующего системе

$$\left. \begin{aligned} W &= F_1(V, \alpha, x, v), \\ \theta &= F_2(V, \alpha, x, v) \end{aligned} \right\} \tag{76}$$

полосы $D: y_0(x) < y < y_1(x)$ на полосу $0 < v < 1$ при условиях:

1° функции F_1 и F_2 слабо зависят от координат x, v, т. е. первые и вторые частные производные F_1 и F_2 по координатам по модулю ограничены достаточно малыми постоянными;

$$2^\circ \; |y_0''| < k'', \quad |y_1''| < k'', \quad k < y_1(x) - y_0(x) < K,$$

где k, K и k'' — фиксированные постоянные;

$$3^\circ \; |y_0'| < k', \quad |k_1'| < k',$$

где k' — достаточно малая постоянная.

В самом деле, для этой цели нам достаточно показать, что при сделанных гипотезах относительно функций F_1, F_2 и граничных функ-

ций y_0 и y_1 построенное нами решение уравнения (52) будет обладать положительной частной производной по v:

$$R = \frac{\partial Y}{\partial v} > 0.$$

Установим предварительно несколько вспомогательных предложений.

ЛЕММА 9. *Пусть в условиях доказанной теоремы существования интеграла уравнения* (52) *нам даны два интеграла* $Y(x, v)$ *и* $\overline{Y}(x, v)$, *удовлетворяющие граничным условиям*

$$Y(x, 0) = \overline{Y}(x, 0) = y_0(x),$$
$$Y(x, 1) = y_1(x), \quad \overline{Y}(x, 1) = y_1(x) + \delta y_1, \quad \delta y_1 \geqslant 0;$$

тогда при любом v, $0 < v < 1$, *имеем*

$$p > \overline{Y}(x, v) - Y(x, v) > 0,$$

где $p = \max \delta y_1$, *и при* $v = \frac{1}{2}$

$$\overline{Y}\left(x, \frac{1}{2}\right) - Y\left(x, \frac{1}{2}\right) < \lambda p,$$

где λ — *постоянная, меньшая единицы, зависящая только от постоянных, определяющих сильную эллиптичность.*

При тех же условиях в точке прямой $v = 1$, *где* δy_1 *достигает своего максимума, и вдоль оси* x *имеем*

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial v} < \frac{\partial Y}{\partial v},$$

а в точках прямой $v = 1$, *где* $\delta y_1 = 0$,

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial v} < \frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Заметим, что в силу компактности семейства решений уравнения (52) при граничных условиях, удовлетворяющих условиям 1°, 2° и 3°, нам достаточно доказать лемму для решений Y, обладающих двумя первыми равномерно непрерывными в полосе $0 < v < 1$ частными производными. Но в таком случае, в силу леммы нашей статьи ([3]), функции

$$m(v) = \min_{|x|<\infty} \{\overline{Y}(x, v) - Y(x, v)\},$$
$$M(v) = \max_{|x|<\infty} \{\overline{Y}(x, v) - Y(x, v)\}$$

суть функции, соответственно, монотонно убывающая и монотонно возрастающая в некотором интервале $0 < v < v_0$, где v_0 не меньше некоторой постоянной, зависящей только от постоянных, характеризующих сильную эллиптичность системы, постоянных k, K, k', k'' и вторых производных решения $Y(x, v)$. Отсюда заключаем, что лемма имеет место при достаточно малой разности $K - k$ и когда решение $Y(x, v)$ рассматривается в достаточно узкой полосе $0 < v < v_0$. Переход от

полосы $0 < v < v_0$ к единичной полосе получается применением использованного нами многократно [3] приема.

Опираясь на установленную лемму, нетрудно доказать ограниченность $\ln R$ для рассматриваемого класса решений уравнения (52).

ЛЕММА 10. *При условиях предыдущей леммы функция* $\ln R$, *где*

$$R = \frac{\partial Y(x, v)}{\partial v},$$

ограничена в полосе $0 < v < 1$ *постоянной, зависящей только от постоянных, характеризующих сильную эллиптичность системы* (76) *и постоянных* k, K, k', k''.

В самом деле, в силу леммы 4, нам достаточно доказать ограниченность $\ln R$ на границах полосы $0 < v < 1$. Кроме того, в силу леммы 9, имеет место следующий факт: если $Y(x, v)$ и $\overline{Y}(x, v)$ суть решения (52), соответствующие краевым условиям $y_0(x)$, $y_1(x)$ и $\overline{y}_0(x)$, $\overline{y}_1(x)$, причем

$$\overline{y}_1(x) \geqslant y_1(x), \quad \overline{y}_1(x_0) = y_1(x_0), \quad \overline{y}_0(x) \geqslant y_0(x),$$

то в точке x_0 имеем

$$\frac{\partial \overline{Y}}{\partial v} \leqslant \frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Отсюда заключаем, что для доказательства леммы достаточно построить решение (52) с ограниченной сверху функцией $\ln R$ при граничных условиях $y_0(x)$ и $y_1(x)$ таких, что при $|x| \leqslant \frac{k'}{k''}$ $y_0''(x) > k''$, при $x > \frac{k'}{k''}$ $y_0'(x) > k'$, при $x < -\frac{k'}{k''}$ $y_0'(x) < -k'$ и всюду

$$y_1(x) - y_0(x) > K,$$

и построить решение (52) с ограниченной снизу функцией $\ln R$ при граничных условиях $y_0(x)$ и $y_1(x)$ таких, что при $|x| < \frac{k'}{k''}$ $y_0''(x) < -k''$, при $x > \frac{k'}{k''}$ $y_0'(x) < -k'$, при $x < -\frac{k'}{k''}$ $y_0'(x) > k'$ и всюду

$$0 < y_1(x) - y_0(x) < k.$$

Так как конструкция искомых решений (52) для оценки $\ln R$ сверху и снизу принципиально одинакова, то мы ограничимся случаем оценки $\ln R$ сверху. Построим вспомогательную систему

$$W = F_1(V, \alpha, 0, 0),$$
$$\theta = F_2(V, \alpha, 0, 0)$$

и пусть

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial \tau}{\partial y}, \\ \frac{\partial R}{\partial v} &= a_0 \frac{\partial \tau}{\partial x} + b_0 \frac{\partial \tau}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (77)$$

— ее производная система. Пусть, далее,

$$R=R(x, v), \quad \tau=\tau(x, v)$$

— решение (77), реализующее квази-конформное отображение полосы $-h<v<1+h$ на круговую луночку, симметричную относительно оси R и расположенную справа от оси τ. Функция

$$Y_0(x, v)=\int R\,dv+\tau\,dx$$

будет, очевидно, интегралом уравнения

$$a_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+b_0\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial v}-\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=0.$$

Параметрами луночки и малым параметром h можно, очевидно, распорядиться так, чтобы функции $Y_0(x, 0)$ и $Y_0(x, 1)$ удовлетворяли условиям «мажорантных» краевых функций $y_0(x)$ и $y_1(x)$.

Заметив это, вернемся к основной системе (76), в которую введем дополнительный параметр λ:

$$\left.\begin{aligned} W&=F_1(V, \alpha, \lambda x, \lambda v),\\ \theta&=F_2(V, \alpha, \lambda x, \lambda v), \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

и пусть в полосе $-h<v<1+h$ $Y(x, v, \lambda)$ есть решение уравнения

$$a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial v}-\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=c, \tag{79}$$

соответствующего (78) при граничных условиях $Y_0(x, -h)$ и $Y_0(x, 1+h)$. Так как при $\lambda \to 0$ функция Y вместе с ее двумя первыми производными будет внутри полосы $-h<v<1+h$ равномерно стремиться к функции Y_0, то при λ достаточно малом функции $Y(x, 0, \lambda)$ и $Y(x, 1, \lambda)$ будут искомыми мажорантными функциями. Решение уравнения (79) при этих краевых условиях, $Y(x, v, \lambda)$, будет обладать ограниченной частной производной по v. Лемма полностью доказана. Этим самым доказано также существование квази-конформного отображения полосы $y_0(x)<y<y_1(x)$ на полосу $0<v<1$ при условиях существования интеграла (79).

Переходя к общему случаю, когда в систему явно входят все четыре координаты, мы начнем с доказательства теоремы существования квази-конформного отображения достаточно узких полос или, что то же самое, с доказательства случая, когда функции F_1 и F_2 слабо зависят от координат.

§ 7. Случай узких полос. Переход от разобранного частного случая системы (77) к произвольной системе

$$\left.\begin{aligned} W&=F_1(V; \alpha, x, y, u, v),\\ \theta&=F_2(V, \alpha, x, y, u, v) \end{aligned}\right\} \tag{80}$$

мы проводим по аналогии с переходом от линейного уравнения к нелинейному.

Построим прежде всего приближенное квази-конформное отображение, соответствующее системе (80), полосы $y_0(x) < y < y_1(x)$ на полосу $v_0 < v < v_1$.

Рассмотрим полосу π: $y_0(x) < y < y_1(x)$ и построим в этой полосе «среднюю линию» γ:

$$y = \frac{1}{t} \int\limits_{x-t}^{x+t} \frac{y_0(t) + y_1(t)}{2}\, dt = a(x),$$

где t — числовая величина, большая сравнительно с шириной полосы $y_1(x) - y_0(x)$.

Обозначим через $\delta(x)$ длину нормали к γ, заключенную между $y_0(x)$ и $y_1(x)$, и положим

$$w_0(x) = \frac{1}{t} \int\limits_{x-t}^{x+t} \delta(x)\, dx.$$

Отправляясь от построенных функций $a(x)$ и $w_0(x)$ в соответствии с первым из уравнения (80), построим обыкновенное дифференциальное уравнение, связывающее x и u:

$$w_0(x) = F_1\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{dx}{du},\ \alpha,\ x,\ a(x),\ u,\ \frac{v_0+v_1}{2}\right), \tag{81}$$

где

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{da}{dx} = a'.$$

В силу условия сильной эллиптичности системы (80), дифференциальное уравнение (81) обладает однопараметрическим семейством интегралов

$$u = u(x, C),$$

устанавливающих гомеоморфное соответствие между x и осью u. Значение C определится из условия соответствия точек x_0 и u_0:

$$u_0 = u(x_0, C).$$

Приближенным (первого порядка) квази-конформным отображением полосы π на полосу $v_0 < v < v_1$, соответствующим системе (80), мы назовем квази-конформное отображение π на $v_0 < v < v_1$, соответствующее системе

$$W = F_1(V, \alpha, x, a(x), u(x, C_0), v),$$
$$\theta = F_2(V, \alpha, x, a(x), u(x, C_0), v).$$

Допустим теперь, что полоса π разбита на n полос π_i:

$$y_i(x) < y < y_{i+1}(x)$$

и пусть каждая π_i приближенно квази-конформно отображена, $w = f_i(z)$, соответственно на полосу

$$v_0 + \frac{v_1 - v_0}{n} i < v < v_0 + \frac{v_1 - v_0}{n}(i+1).$$

Функцию $w = f(z)$, равную $f_i(z)$ в полосе π_i, мы будем называть приближенным квази-конформным отображением n-го порядка, если $f(z)$ будет непрерывна во всей полосе π.

Наложим теперь на функции F_1, F_2 и границы $y_0(x)$ и $y_1(x)$ дополнительные ограничения:

$$k < y_1(x) - y_0(x) < k(1+\lambda),$$

$$|y_0'(x)| < k', \quad |y_1'(x)| < k',$$

$$|y_0''(x)| < k'', \quad |y_1''(x)| < k''$$

при $|u| > T$, где T — фиксированное число, F_1 и F_2 от u не зависят.

Рассуждая так же, как в §§ 2, 3, 4, 5, мы приходим к выводу, что при k, λ, k' достаточно малых и при любых фиксированных T и k'' квази-конформные отображения первого, второго и n-го приближения существуют и обладают всеми основными свойствами соответствующих приближенных решений, построенных в § 5. Отсюда, используя лемму 4 при $u \to \infty$ и при достаточно малых k, λ и k', заключаем, что приближенные решения будут равномерно сходиться к функции, реализующей квази-конформное отображение (полосы π на полосу $v_0 < v < v_1$), соответствующее системе (80).

Замечая, что свойство системы (80) быть сильно эллиптичной инвариантно при конформном отображении, мы получаем следующий результат:

Пусть полоса π *ограничена кривыми* Γ_0 *и* Γ; *квази-конформное отображение, соответствующее системе* (80), *полосы* π *на полосу* $v_0 < v < v_1$ *возможно, если будут выполнены следующие условия:*

1^0 *кривизны* Γ_0 *и* Γ *ограничены*,

2^0 *длина нормали к* Γ_0, *заключенная между* Γ_0 *и* Γ, *заключена в пределах* k *и* λk, *где* λ — *любое фиксированное число, а* k *достаточно мало (в зависимости от функций* F_1, F_2 *кривизн* Γ_0, Γ *и числа* k).

Переход от случая узких полос к случаю произвольных полос проводится альтернирующим процессом Шварца. Для доказательства сходимости процесса нам понадобится ряд свойств отображений, выводом которых мы сейчас и займемся.

§ 8. Граничные свойства. Начнем с так называемых граничных свойств.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функции* F_1 *и* F_2 *сильно эллиптической системы (80) обладают частными производными второго порядка по всем аргументам и пусть эти частные производные удовлетворяют условиям Гёльдера. Пусть кривизны* K_0 *и* K *границ* Γ_0 *и* Γ *полосы* D *удовлетворяют условиям Гёльдера относительно длины дуг* Γ_0 *и* Γ:

$$|K_0(s+\Delta s) - K_0(s)| < C|\Delta s|^\nu,$$

$$|K(s+\Delta s) - K(s)| < C|\Delta s|^\nu.$$

Пусть, наконец,

$$w = f(z) = u + iv$$

дает квази-конформное отображение (соответствующее системе (80)) области D на полосу $h_0 < v < h$ при условии соответствия бесконечно удаленных точек. При этих условиях функции u и v будут обладать в области D, включая ее границу, всеми вторыми частными производными, удовлетворяющими в $\overline{D}$ условиям Гёльдера.

Если дополнительно допустить, что длина $n(s)$ нормали к Γ_0, заключенная между Γ_0 и Γ, удовлетворяет неравенству

$$k_0(h_1 - h_0) < n(s) < k_1(h_1 - h_0)$$

и что

$$|K_0| < \varepsilon, \quad |K| < \varepsilon,$$

то, каково бы ни было число η, $\eta > 0$, при $h_1 - h_0$ и ε достаточно малых, все вторые частные производные функций u и v будут по модулю меньше η.

Для доказательства отобразим конформно

$$\zeta = \xi + i\eta = \varphi(z), \quad x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

область D на полосу $0 < \eta < h_1 - h_0$ при условии соответствия бесконечно удаленных точек. Отнесем систему (80) к переменным ξ, η. Относительно новых переменных наша система примет вид

$$W = \frac{1}{\lambda} F_1 \left\{ \lambda V, \alpha + \nu, x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u, v\right) = \Phi_1,$$
$$\theta = F_2 \left\{ \lambda V, \alpha + \nu, x(\xi, \eta), y(\xi, \eta), u, v\right) = \Phi_2,$$
$$\lambda e^{i\nu} = f'(z).$$

В силу условий, наложенных на Γ_0 и Γ, и известных свойств конформных отображений, функции Φ_1 и Φ_2 будут обладать частными производными второго порядка, подчиненными условию Гёльдера; кроме того, новая система будет, очевидно, также сильно эллиптична. Построим для этой системы производную систему

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial v},$$
$$\frac{\partial R}{\partial v} = a_1 \frac{\partial \tau}{\partial x} + b_1 \frac{\partial \tau}{\partial v} + c_1.$$

В силу формул (5′), функции a_1, b_1, c_1,

$$a_1 = a_1(R, \tau, x, y, u, v), \quad b_1 = b_1(R, \tau, x, y, u, v), \quad c_1 = c_1(R, \tau, x, y, u, v),$$

будут по всем аргументам удовлетворять условиям Гёльдера. Кроме того, при $v = h_0$ и $v = h_1$ функция τ обращается в нуль. Отображение

$$R = R(x, v), \quad \tau = \tau(x, v)$$

можно распространить принципом симметрии на полосу

$$h_0 - (h_1 - h_0) < v < h_1 + (h_1 - h_0),$$

но тогда, в силу известных свойств линейных систем и леммы 4, функции R и τ будут обладать в замкнутой полосе $h_0 \leqslant v \leqslant h_1$ частными производными, удовлетворяющими условию Гёльдера. Этим доказана первая часть теоремы.

Из установленной равностепенной непрерывности вторых частных производных и дополнительных условий второй части теоремы непосредственно вытекает ее заключение.

§ 9. Вариационные принципы. Установим теперь для изучаемого общего класса квази-конформных отображений вариационные принципы, аналогичные принципу Шварца-Линделёфа для конформных отображений. Начнем со случая отображения узких полос.

ЛЕММА 11. *Пусть в условиях теоремы 3 ширина $n(s)$ полосы D удовлетворяет неравенствам*

$$k_0 h < n < k_1 h.$$

Фиксируем на границе Γ_0 полосы D точку z_0 и рассмотрим квази-конформные отображения D на полосу $0 < v < h$,

$$w = f(z), \quad w = \bar{f}(z),$$
$$f(z_0) = \bar{f}(z_0) = 0, \quad f(\pm\infty) = \bar{f}(\pm\infty) = \pm\infty,$$

соответствующие системе

$$W = F_1(V, \alpha, x, y, u, v),$$
$$\theta = F_2(V, \alpha, x, y, u, v)$$

и системе

$$W = \bar{F}_1(V, \alpha, x, y, u, v),$$
$$\theta = \bar{F}_2(V, \alpha, x, y, u, v),$$

где функции F и $\bar{F}$ обладают вторыми частными производными, удовлетворяющими условию Гёльдера по всем аргументам, и близки друг к другу в смысле близости 1-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} &|\bar{F}_1 - F_1| < \varepsilon, \quad |\bar{F}_2 - F_2| < \varepsilon, \\ &\left|\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial V} - \frac{\partial F_1}{\partial V}\right| < \varepsilon, \ \ldots, \left|\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial v}\right| < \varepsilon. \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

При этих условиях и при h достаточно малом в точках z Γ_0 и Γ, находящихся на расстоянии s от точки z_0 (s есть длина дуги Γ_0, заключенная между z_0 и z, если z принадлежит Γ_0, и s есть длина дуги Γ, заключенная между z и концом нормали к Γ_0 в точке z_0), имеем

$$|\bar{W} - W| < Kh(s+1)\varepsilon, \tag{83}$$

$$|\bar{f}(z) - f(z)| < Kh(s+1)\varepsilon. \tag{84}$$

При тех же условиях длина нормали m к линии тока $y(x, v)$, заключенная между $y(x, v)$ и $\bar{y}(x, v)$, удовлетворяет неравенству

$$m < Kh(s+1)\varepsilon.$$

Для доказательства фиксируем число T и допускаем дополнительно, что при $|u| > T$ функции F и $\bar{F}$ от u не зависят и совпадают. Кроме того, отображая конформно область D на полосу $0 < \eta < h$ при условии соответствия бесконечно удаленных точек, мы, не нарушая общности,

можем считать, что D есть прямолинейная полоса $0 < \eta < h$ и что $z_0 = 0$. В силу теоремы 3, при h достаточно малом угол α и кривизны линий тока $y(x, v)$ и $\overline{y}(x, v)$ можно считать сколь угодно малыми.

Заметив это, обозначим через η_1 максимум разности $\overline{u}(x, v) - u(x, v)$ при фиксированном v и при $|x| < \infty$; через η_2 — максимум разности $\overline{\alpha} - \alpha$ также при фиксированном v и при $|x| < \infty$ и через $m = m(v)$ — максимум разности $\overline{y}(x, v) - y(x, v)$:

$$m = \max_{|x| < \infty} [\overline{y}(x, v) - y(x, v)].$$

Согласно выведенной нами формуле [см. ([3]), стр. 298], имеем

$$\frac{d^2m}{dv^2} > A_0 m + A_1 \frac{dm}{dv} + A_2 \varepsilon + A_3 \eta_1, \tag{85}$$

где A_0 и A_1 — ограниченные функции x, а A_2 и A_3 — линейные функции вторых частных производных функции $y(x, v)$; в нашем случае A_2 и A_3 сколь угодно малы вместе с h.

Но так как, по условию, $m(0) = m(h) = 0$, то из (85) заключаем что в переменных x, v

$$\left.\begin{aligned} |\overline{y}(x, v) - y(x, v)| &< \lambda h^2 (\eta_1 + \varepsilon), \\ |\overline{W}(x, v) - W(x, v)| &< \lambda h (\eta_1 + \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

где λ мало вместе с h.

Покажем, что η_1 и η_2 имеют порядок ε. Для этой цели воспользуемся связью между V, α, W и θ. Функция V определяется функцией W при помощи уравнения

$$W = F_1\left(\frac{1}{\cos\alpha}\frac{dx}{du}, \alpha, x, y(x, v), u, v\right) \tag{87}$$

при начальном условии

$$u(x_0, v) = 0, \quad u(0, 0) = 0, \quad \frac{dx_0}{dv} = \operatorname{tg}(\theta + \alpha). \tag{88}$$

Составим для (87) уравнение в вариациях; тогда, используя (88) и условие, что α мало вместе с h, получим

$$\frac{d(\overline{u} - u)}{dx} = B_0(\overline{u} - u) + B_1 h(\eta_1 + \varepsilon) + B_2(\overline{\alpha} - \alpha), \tag{89}$$

где B суть ограниченные функции от x. Интегрируя (89) вдоль оси x, при $x = 2T$ найдем

$$|\overline{u}(2T, 0) - u(2T, 0)| < e^{KT} h(\eta_1 + \varepsilon). \tag{90}$$

С другой стороны, в полуполосе $0 < y < h$, $x > T$, имеет место (86), причем, согласно дополнительному допущению, в этой полуполосе функции F_1 и F_2 от u не зависят, следовательно, при $x \geqslant 2T$ будем иметь

$$|\overline{\alpha} - \alpha| < kh(\eta_1 + \varepsilon);$$

но тогда, используя (84) и полученную оценку (90), найдем

$$|\overline{u}(2T, v) - u(2T, v)| < e^{KT} h(\eta_1 + \varepsilon) + kh^2(\eta_1 + \varepsilon) = Kh(\eta_1 + \varepsilon).$$

Проинтегрируем теперь (89) вдоль линии $y = y(x, v)$; при начальных условиях

$$\bar{u}(2T, v) - u(2T, v) = u_T, \quad u_T < Kh(\eta_1 + \varepsilon)$$

получим

$$\bar{u} - u = e^{\int B\,dx} \int_{2T}^{x} e^{-\int B\,dx} \{B_1 h(\eta_1 + \varepsilon) + B_2(\bar{\alpha} - \alpha)\}\,dx + u_T.$$

Отсюда, замечая, что $\int(\bar{\alpha} - \alpha)\,dx$ имеет порядок $h(\eta_1 + \varepsilon)$ и используя интегрирование по частям, окончательно находим

$$|\bar{u} - u| < Kh(\eta_1 + \varepsilon), \quad |x| < 2T.$$

Следовательно, при h достаточно малом малая величина η_1 имеет порядок ε.

Приемом, только что описанным, без труда получаем следующий частный результат:

Пусть в условиях леммы при $T < x < 2T$ функции F и $\bar{F}$ от u не зависят и пусть при $x < 2T$ и при $x > 3T$ функции F и $\bar{F}$ совпадают, а при $2T < x < 3T$ функции $\bar{F}$ отличаются от F вместе со всеми их частными производными первого порядка не больше чем на ε,

$$|\bar{F}_1 - F_1| < \varepsilon, \quad |\bar{F}_2 - F_2| < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial V} - \frac{\partial F_1}{\partial V}\right| < \varepsilon, \ \ldots, \left|\frac{\partial \bar{F}_2}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial v}\right| < \varepsilon:$$

тогда при $|x| < T$ будем иметь

$$|\bar{y}(x, v) - y(x, v)| < e^{-K\frac{T}{h}} \cdot \varepsilon,$$

$$|\bar{W} - W| < e^{-K\frac{T}{h}} \cdot \varepsilon,$$

$$|\bar{u} - u| < e^{-K\frac{T}{h}} \cdot \varepsilon,$$

$$|\bar{\alpha} - \alpha| < e^{-K\frac{T}{h}} \cdot \varepsilon,$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от h, T и ε.

Сопоставление отмеченных двух частных результатов без труда дает заключение леммы.

Опираясь на установленную лемму, нетрудно получить для изучаемого класса отображений принцип, аналогичный известному принципу Шварца-Линделёфа.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть область D ограничена линиями Γ_0 и Γ, причем кривизны Γ_0 и Γ удовлетворяют условию Гёльдера относительно длины дуг Γ_0 и Γ. Пусть длина $n(s)$ нормали к Γ_0, заключенная между Γ_0 и Γ, удовлетворяет неравенству*

$$k_0 h < n(s) < k_1 h,$$

где k_0 *и* k_1 — *некоторые фиксированные числа. Рассмотрим наряду с областью* D *область* $\overline{D}$, *ограниченную линиями* $\overline{\Gamma}_0$ *и* $\overline{\Gamma}$, *бесконечно близкими (соответственно) к* Γ_0 *и* Γ.

Пусть $\delta_0(s)$ $(\delta(s))$ *есть длина нормали к* Γ_0 (Γ), *заключенная между* Γ_0 *и* Γ $(\Gamma$ *и* $\overline{\Gamma})$; *мы будем предполагать, что*

$$|\delta_0(s)| \leqslant \varepsilon, \quad |\delta_0'(s)| < \nu\varepsilon, \quad |\delta_0''(s)| < \nu\varepsilon,$$

$$\delta_0(s_0) = \varepsilon,$$

$$|\delta(s)| \leqslant \lambda\varepsilon, \quad |\delta'(s)| < \nu\varepsilon, \quad |\delta''(s)| < \nu\varepsilon,$$

где λ *и* ν — *фиксированные числа, причем* $\lambda < 1$.

Построим квази-конформные отображения (полос D *и* $\overline{D}$ *на полосу* $0 < v < h$), *соответствующие сильно эллиптической системе* (80) *при условиях соответствия бесконечно удаленных точек, точек* z_0, $\overline{z}_0$ *границ* Γ_0, $\overline{\Gamma}_0$ *и точки* $u = 0$ *прямой* $v = 0$, *где* $\overline{z}_0$ *лежит на нормали к* Γ_0, *проведенной из точки* z_0.

Тогда, если при $|u| > T$

$$W = V, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

то в точке s_0 *будем иметь*

$$\overline{W} > W\left\{1 + \frac{\varepsilon}{n}(1 - \lambda) + A\varepsilon\right\}, \tag{91}$$

где A — *постоянная, не зависящая от* h.

При тех же условиях вариации δn *произвольной линии тока* γ_v (*линии, переходящей при отображении в прямую* $v = \text{const}$) *будет удовлетворять неравенству*

$$|\delta n| < \varepsilon + B(h - v)\varepsilon \tag{92}$$

и при $v = \frac{h}{2}$ — *неравенству*

$$|\delta n| < \frac{1+\lambda}{2}\varepsilon + Bh\varepsilon, \tag{93}$$

где B — *постоянная, не зависящая от* h.

Заметим, что для случая конформных отображений $W = V$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ при любом h имеем $A \geqslant -\frac{1-\lambda}{h}$, $B \leqslant 1$, и неравенства (91) (92), (93) выражают известные принципы Монтеля и Шварца-Линделёфа.

Для доказательства неравенств (91), (92), (93) начнем со случая h достаточно малых*. Переход от отображения D на полосу $0 < v < h$ к отображению $\overline{D}$ на ту же полосу мы осуществим следующим образом: мы отобразим конформно область $\overline{D}$ на D, а затем D отобразим квази-конформно на полосу; каждое из этих отображений мы проде-

* Степень малости будет зависеть от введенных ранее постоянных, в частности от T.

лаем с соблюдением начальных данных (соответствие бесконечно удаленных точек, точек z_0, $\bar{z}_0$ и точки $u=0$), кроме того, квази-конформное отображение будет соответствовать системе (80), отнесенной к новым координатам, соответствующим конформному отображению.

При первом (конформном) отображении вариация функции W будет удовлетворять неравенству

$$\delta W > W\frac{\varepsilon}{n}(1-\lambda), \quad kh < n < Kh.$$

Займемся вторым отображением. В силу известных свойств конформных отображений, при отображении D на $\bar{D}$ вариации координат будут иметь порядок εhl, где l — «расстояние» рассматриваемой точки до точки z_0, а вариация производной будет иметь порядок $\frac{\varepsilon l}{h}$, следовательно, вариация первых частей уравнений в характеристиках (5′) будет иметь порядок $\frac{\varepsilon T}{h}$, но тогда соответствующая вариация W будет иметь порядок εT. Отсюда заключаем, что при h достаточно малом имеет место (91).

Неравенства (92) и (93) получаются известным приемом из неравенства (91). Именно, мы рассматриваем точку z линии γ_v, в которой δn — вариация γ_v — достигает наибольшего значения. Для этой точки, по (91), мы можем оценить δW, рассматривая отдельно отображение полос, ограниченных Γ_0, γ_v и $\bar{\Gamma}_0$, $\bar{\gamma}_v$, на полосу ширины v и полос, ограниченных γ_v, Γ и $\bar{\gamma}_v$, $\bar{\Gamma}$, на полосу ширины $h-v$. Полученные таким образом неравенства дадут нам (92) и (93).

Только что описанный прием дает также возможность индукцией перейти от случая малого h к любому h. В самом деле, фиксируя число $h=h_0$ настолько малым, чтобы в формулах (91), (92), (93) первые члены были главными, допустим, что эти формулы имеют место при $h=kh_0$, где k — некоторое целое число; докажем, что те же формулы будут иметь место при $h=(k+1)h_0$ (естественно, при новых значениях коэффициентов A и B).

Рассмотрим линии γ_{kh_0} и $\bar{\gamma}_{kh_0}$. Пусть в точке z линии γ_{kh_0} вариация этой линии (отрезок нормали к γ_{kh_0}, заключенный между γ_{kh_0} и $\bar{\gamma}_{kh_0}$) достигает максимума и равна η. Допустим, для определенности, что $\eta > 0$. Линии γ_{kh_0} и $\bar{\gamma}_{kh_0}$ разделят соответственно] области D и $\bar{D}$ на области, которые мы обозначим через D_1, D_2 и $\bar{D}_1$, $\bar{D}_2$. Рассматривая отображения областей D_1 и $\bar{D}_1$, согласно (91), в точке z будем иметь

$$\delta W < -KW\frac{\eta-\varepsilon}{h_0}.$$

С другой стороны, по индукции, рассматривая отображение областей D_2 и $\bar{D}_2$ в той же точке, будем иметь

$$\delta W > W\left\{K\frac{\eta-\lambda\varepsilon}{kh_0}+A\eta\right\}.$$

Следовательно,

$$\eta - \varepsilon < Ah_0\eta,$$

$$\eta < \frac{\varepsilon}{1 - Ah} \approx \varepsilon + Ah_0\varepsilon.$$

Полученная нами оценка η непосредственно дает нам (91) для $h = (k+1)\, h_0$ и, по индукции, (92) и (93).

§ 10. Теорема существования. Опираясь на установленные теоремы, нетрудно дать доказательство основной теоремы существования, сформулированной нами в начале статьи. Для возможности применения теоремы 4 мы начнем со случая, когда при $|u| > T$, где T — произвольное фиксированное число, функции F_1 и F_2 соответствуют конформному отображению

$$F_1 = V, \quad F_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Кроме того, область D мы будем считать полосой, ограниченной двумя линиями Γ_0, Γ, кривизны которых удовлетворяют условию Гёльдера.

Возможность квази-конформного отображения D на полосу $0 < v < h$ доказана нами в условиях теоремы 4 при h достаточно малом.

Для доказательства теоремы в общем виде мы, используя альтернирующий метод Шварца, будем последовательно расширять класс областей, для которых имеет место теорема существования.

В силу инвариантности сильной эллиптичности относительно конформных преобразований, мы можем, не нарушая общности, считать, что Γ_0 есть ось x. Область, ограниченную осью x и линией Γ, будем в дальнейшем обозначать через $D(\Gamma)$.

Введем класс областей, зависящий от двух параметров:

Пусть $K = K(s)$ есть кривизна Γ, рассматриваемая как функция длины s дуги Γ, и пусть

$$|K(s + \Delta s) - K(s)| < c_1 |\Delta s|^{\alpha}.$$

Пусть, кроме того,

$$w = f(z), \quad f(\pm\infty) = \pm\infty$$

есть функция, реализующая конформное отображение области D на полосу $0 < v < h$, и c_2 есть максимум $|\ln|f'(z)||$. При этих обозначениях мы скажем, что область D, ограниченная осью x и линией Γ, принадлежит классу $R(\rho, h)$, $D \subset R(\rho, h)$, если будет выполнено следующее условие:

$$c_1^2 + c_2^2 \leqslant \rho^2.$$

Нами выше доказано, что, каковы бы ни были фиксированные числа α, ρ и постоянные, характеризующие сильную эллиптичность системы, при h достаточно малом соответствующее квази-конформное отображение области D, $D \subset R(\rho, h)$, на полосу $0 < v < h$ существует.

Отметим еще два следствия теоремы 4 и принципа подобия:

1. Если квази-конформное отображение области D, $D \subset R(\rho, h)$, на полосу существует, то при любом $\lambda < 0$ область $D(\gamma_\lambda)$, где γ_λ есть линия тока, соответствующая прямой $v = \lambda h$, будет принадлежать классу $R(\rho_1, \lambda h)$:

$$D(\gamma_\lambda) \subset R(\rho_1, \lambda h),$$

где ρ_1 зависит только от ρ.

2. Если теорема существования имеет место для класса $R(\rho, h)$, то она имеет место также для класса $R(\rho, \lambda h)$, $\lambda < 1$.

Для доказательства основной теоремы нам достаточно показать возможность перехода от областей класса $R(\rho, h)$ к областям класса $R(\rho + \Delta\rho, h + \Delta h)$. Начнем с описания процесса, причем рассмотрим отдельно переход от $R(\rho, h)$ к $R(\rho + \Delta\rho, h)$ и переход от $R(\rho, h)$ к $R(\rho, h + \Delta h)$.

Итак, допустим, что квази-конформное отображение области D, $D \subset R(\rho, h)$, на полосу $0 < v < h$ возможно. Фиксируя положительное достаточно малое число δ, построим линии тока $\gamma_{h-2\delta}$ и $\gamma_{h-\delta}$, соответствующие прямым $v = h - 2\delta$ и $v = h - \delta$. Пусть теперь нам дана область $D(\overline{\Gamma})$, $D(\overline{\Gamma}) \subset R(\rho + \Delta\rho, h)$, бесконечно близкая к области D. Построим две последовательности отображений: пусть функция $w = f_1(z)$ отображает область $D(\gamma_{h-2\delta}, \overline{\Gamma})$, ограниченную $\gamma_{h-2\delta}$ и $\overline{\Gamma}$, на полосу $h - 2\delta < v < h$, причем прямая $v = h - \delta$ соответствует линии γ_1; функция $w = f_2(z)$ отображает область $D(\gamma_1)$ на полосу $0 < v < h - \delta$, причем прямая $h - 2\delta$ соответствует линии γ_2; функция $w = f_3(s)$ отображает $D(\gamma_2, \overline{\Gamma})$ на полосу $h - 2\delta < v < h$ и т. д. Мы получим, таким образом, две последовательности линий и отображений:

$$\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2n-1}, \ldots,$$

$$f_1(z), \ _3(z)f, \ldots, f_{2n-1}(z), \ldots,$$

$$\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}, \ldots,$$

$$f_2(z), f_4(z), \ldots, f_{2n}(z), \ldots$$

Для второго случая — перехода от $R(\rho, h)$ к $R(\rho, h + \Delta h)$ — построение последовательностей γ и f вполне аналогично, только вместо полос $h - 2\delta < v < h$ и $0 < v < h - \delta$ мы будем брать полосы $h + \Delta h - 2\delta < v < h + \Delta h$ и $0 < v < h + \Delta h - \delta$.

Заметим, что в обоих случаях $\Delta\rho$, Δh, $\delta\Gamma$ малы сравнительно с δ; кроме того, каждое из отображений мы, естественно, подчиняем условию соответствия бесконечно удаленных точек, точек $z = 0$ и $w = 0$ (при отображениях f_{2n}) и (при отображениях f_{2n+1}) точки z_{2n+1} линии γ_{2n+1} и точки на оси v, где z_{2n+1} есть точка, переходящая в точку оси v при отображении f_{2n}.

Чтобы доказать возможность перехода от $R(\rho, h)$ к $R(\rho+\Delta\rho, h+\Delta h)$, нам достаточно установить:

1) возможность построения всех функций f_n и

2) сходимость процесса.

Заметим, что при δ достаточно малом и при бесконечно малых вариациях Γ (Γ и $\overline{\Gamma}$ имеют близость второго порядка) сходимость процесса есть простое следствие теоремы 4.

Нам, таким образом, остается доказать возможность построения функции f_n.

Существование функций f_{2n+1} с нечетным индексом всегда возможно при достаточно малом δ, ибо все линии тока принадлежат классу $R(\rho_2, \lambda h)$.

Займемся функциями с четными индексами. Их построение будет возможным при условии, что область $D(\gamma_{h-\delta})$ и все бесконечно близкие к ней области $D(\bar{\gamma}_{h-\delta})$ ($\bar{\gamma}$ имеет с γ близость второго порядка) можно отобразить на соответствующую полосу. В силу этого и отмеченного выше свойства 1° классов областей $R(\rho, h)$, индуктивное применение процесса Шварца будет всегда осуществимо в следующей форме: фиксируем число ρ и определяем число ρ_1. Через ρ_1 определяем число h_0 так, чтобы для любой области класса $R(\rho_1, h_0)$ отображение было возможно. Далее, описанным выше процессом увеличиваем h и расширяем области при условии, что каждая из областей D будет принадлежать классу $R(\rho_1, h)$ и обладать дополнительно следующим свойством: подобласть $D(\gamma_{\lambda h})$, ограниченная линией тока $\gamma_{\lambda h}$ области D, принадлежит классу $R(\rho_1, \lambda h)$.

Таким образом, теорема существования доказана при условии, что при $|u| > T$ функции F_1 и F_2 основной системы переходят соответственно в $W = V$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Теорему в общем случае мы получим, заставляя T стремиться к бесконечности. Сходимость процесса есть прямое следствие известной компактности семейства.

Переход от полос к произвольным областям, ограниченным кривыми, обладающими непрерывными кривизнами, осуществляется при помощи конформного отображения этих областей на полосы.

Поступило
10.IV.1948

ЛИТЕРАТУРА

[1] Лаврентьев М. А., Общая теория квази-конформных отображений плоских областей, Доклады Ак. Наук УССР, № 3-4 (1946), 3—6.

[2] Лаврентьев М. А., Квази-конформные отображения и их производные системы, Доклады Ак. Наук СССР, т. II, № 4 (1946), 287—289.

[3] Лаврентьев М. А., Общая задача теории квази-конформных отображений плоских областей, Матем. сб., 21 (63):2 (1947), 285—320.

[4] Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. II, М.—Л., 1946.

[5] Лаврентьев М. А., Об одном классе непрерывных отображений, Матем. сб. 42:4 (1935), 407—424.
[6] Шапиро З. Я., О существовании квази-конформных отображений, Доклады Ак. Наук СССР, т. XXX, № 8 (1941), 685—687.
[7] Шабат Б. В., Об обобщенных решениях одной системы уравнений в частных производных, Матем. сб., 17 (59):2 (1945), 193—209.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая

12 (1948), 555-568

М. М. ДЖРБАШЯН

ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ ВЗВЕШЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

(*Представлено академиком* М. В. Келдышем)

Рассматривается решение одной экстремальной задачи, связанной с теорией полноты взвешенных ортогональных по площади круга полиномов комплексного переменного.

Пусть заданная в круге $|z| < 1$ ограниченная положительная функция $h(z)$ остается постоянной на окружностях

$$C_\rho\,(|z-(1-\rho)|=\rho), \quad 0<\rho<1.$$

Обозначим через $\lambda(\rho)$ значение функции $h(z)$ на окружности C_ρ и допустим, что $\lambda(\rho)$ *не убывает* при $0<\rho<1$.

Обозначим через A_λ класс функций $f(z)$, голоморфных в круге $|z| < 1$ и удовлетворяющих условиям:

$$\iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|f(z)|^2\,dx\,dy < +\infty,$$

$$\inf_{\{Q\}} \iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|f(z)-Q(z)|^2\,dx\,dy = 0,$$

где $\{Q\}$ — всевозможные полиномы.

В настоящей работе доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА I. *В семействе* A_λ *минимум интеграла*

$$\mu(f)=\iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|f(z)|^2\,dx\,dy \tag{1}$$

при условии $f(\alpha)=1$ $(|\alpha|<1)$ *реализует функция*

$$f_0(z)=\left(\frac{1-\alpha}{1-z}\right)^2 \frac{\Phi(z,\overline{\alpha})}{\Phi(\alpha,\overline{\alpha})}, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} \Phi(z,\overline{\alpha}) &= \int_0^\infty p(t)\exp\left\{-t\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{1-\overline{\alpha}}\right)\right\}dt, \\ \frac{1}{p(t)} &= \int_0^1 \lambda(\rho)\,e^{-\frac{t}{\rho}}\,\frac{d\rho}{\rho^2} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и

$$\mu_0 = \inf \mu(f) = \frac{\pi\,|1-\alpha|^4}{\Phi(\alpha, \bar{\alpha})}. \tag{4}$$

Полиномы $p_n(z)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ определяются единственным образом следующими двумя свойствами:

1) $p_n(z)$ — полином степени n с положительным старшим коэффициентом;

2) $\iint\limits_{|z|<1} h(z)\, p_n(z)\, \overline{p_m(z)}\, dx\, dy = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$

ТЕОРЕМА II. *При* $|\alpha| < 1$ *ряд*

$$K(z, \bar{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p_n(\alpha)}\, p_n(z)$$

равномерно и абсолютно сходится в любой замкнутой части круга $|z| < 1$, *причем*

$$K(z, \bar{\alpha}) = \frac{\Phi(z, \bar{\alpha})}{\pi(1-z)^2(1-\bar{\alpha})^2}. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА III. *Функции семейства* A_λ *представляются в следующем параметрическом виде*:

$$f(z) = \frac{1}{\pi(1-z)^2} \iint\limits_{|w|<1} h(w)\, F(w)\, \frac{\Phi(z, \bar{w})}{(1-\bar{w})^2}\, du\, dv \qquad (w = u + iv), \tag{6}$$

где $F(w)$ — *произвольная функция, удовлетворяющая условию*

$$\iint\limits_{|w|<1} h(w)\, |F(w)|^2\, du\, dv < +\infty. \tag{7}$$

Среди всех функций $F(w)$, *представляющих данную функцию* $f(z)$ *класса* A_λ *по формуле* (6), *минимум интеграла* (7) *реализует функция* $f(w)$.

1. Пусть $0 < x_1 < 1$ и $x_1 \cdot x_2 = 1$. Пусть $C_\rho(x_1)$ — окружность, касательная к C_ρ в точке $P(1-2\rho)$ и точки x_1 и x_2 симметричны относительно нее. Таким образом, точки x_1 и x_2 одновременно симметричны относительно всех окружностей $C_\rho(x_1)$, $\frac{1-x_1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1$.

Определим новый вес $h(z, x_1)$, принимающий постоянные значения $\lambda(\rho)$ на окружностях $C_\rho(x_1)$.

ЛЕММА 1. *Среди всех функций* $f(z)$, *голоморфных в круге* $|z| < 1$ *и удовлетворяющих условиям*

$$\iint\limits_{|z|<1} h(z, x_1)\, |f(z)|^2\, dx\, dy < +\infty, \quad f(\alpha) = 1 \quad (|\alpha| < 1),$$

минимум интеграла

$$\mu(f, x_1) = \iint\limits_{|z|<1} h(z, x_1)\,|f(z)|^2\,dx\,dy$$

реализует функция

$$f_0(z, x_1) = \frac{(1 - x_1\alpha)(\alpha - x_1)}{(1 - x_1 z)(z - x_1)} \frac{\Phi(z, \overline{\alpha}, x_1)}{\Phi(\alpha, \overline{\alpha}, x_1)}, \tag{8}$$

где

$$\Phi(z, \overline{\alpha}, x_1) = (1 - x_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[r_1(z)]^n}{\int\limits_{\frac{1-x_1}{2}}^{1} \lambda(\rho)\,[r_2(\rho)]^n \frac{d\rho}{(2\rho - 1 + x_1)\,[(2\rho - 1)\,x_1 + 1]}}, \tag{9}$$

$$r_1(z) = \frac{z - x_1}{1 - x_1 z} \frac{\overline{\alpha} - x_1}{1 - x_1\overline{\alpha}}, \qquad r_2(\rho) = \left(\frac{2\rho - 1 + x_1}{(2\rho - 1)\,x_1 + 1}\right)^2, \tag{10}$$

и

$$\mu_0(x_1) = \inf(f, x_1) = \frac{4\pi\,|1 - x_1\alpha|^2\,|\alpha - x_1|^2}{\Phi(\alpha, \overline{\alpha}, x_1)}. \tag{11}$$

Доказательство. Функция

$$w = \varphi(z) = \frac{z - x_1}{1 - x_1 z} \frac{(1 - x_1\alpha)^2}{1 - x_1^2}, \qquad \varphi'(z) = \left(\frac{1 - x_1\alpha}{1 - x_1 z}\right)^2, \tag{12}$$

конформно отображает круг $|z| < 1$ на круг

$$|w| < \frac{(1 - x_1\alpha)^2}{1 - x_1^2} = R_1.$$

При таком отображении окружности $C_\rho(x_1)\left(\frac{1 - x_1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1\right)$ переходят в концентрические окружности внутри указанного круга радиуса

$$r = \frac{(2\rho - 1 + x_1)\,|1 - x_1\alpha|^2}{[(2\rho - 1)\,x_1 + 1]\,(1 - x_1^2)} \qquad (0 \leqslant r \leqslant R_1). \tag{13}$$

Имеем

$$\mu(f, x_1) = \iint\limits_{|w|<R_1} h[\psi(w);\ x_1]\,|f[\psi(w)]\,\psi'(w)|^2\,du\,dv \qquad (w = u + iv),$$

где $\psi(w)$ — обратная к $w = \varphi(z)$ функция. В этом интеграле вес $h[\psi(w), x_1]$ принимает постоянные значения $\lambda(\rho)$ на окружностях $|w| = r \leqslant R_1$.

Пусть

$$f[\psi(w)]\,\psi'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \qquad (w = re^{i\varphi}) \tag{14}$$

и

$$\alpha_1 = \varphi(\alpha) = \frac{(\alpha - x_1)(1 - x_1\alpha)}{1 - x_1^2};$$

тогда

$$f[\psi(\alpha_1)]\,\psi'(\alpha_1) = 1$$

и

$$\mu(f, x_1) = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \int_0^{R_1} \lambda(\rho) r^{2n+1} dr,$$

где ρ определяется из (13), как функция от r. Но, по неравенству Шварца,

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_1^n \right|^2 = 1 \leqslant \frac{\mu(f, x_1)}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_1|^{2n}}{\int_0^{R_1} \lambda(\rho) r^{2n+1} dr}.$$

Отсюда следует, что

$$\mu_0(x_1) = \min \mu(f, x_1) = 2\pi : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_1|^{2n}}{\int_0^{R_1} \lambda(\rho) r^{2n+1} dr}, \tag{14'}$$

причем этот минимум достигается при

$$a_n = q\bar{\alpha}_1^n : \int_0^{R_1} \lambda(\rho) r^{2n+1} dr \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где q — постоянное. Подставив эти значения a_n в (14), определяем q из условия

$$f[\psi(\alpha_1)]\, \psi'(\alpha_1) = 1,$$

затем, подставляя значения w, $\psi'(w)$, r и α_1 в (14) и (14′), получаем утверждение леммы.

2. Мы должны совершить предельный переход при $x_1 \to 1$ в формулах (8) и (11). Для этого необходимы некоторые вспомогательные соотношения и оценки.

Легко установить следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x_1 \to 1} \frac{1 - r_1(z)}{1 - x_1^2} = \frac{1 - \bar{\alpha} z}{(1 - \bar{\alpha})(1 - z)} \equiv \Delta^{-1}(z, \bar{\alpha}), \quad \lim_{x_1 \to 1} \frac{1 - r_2(\rho)}{1 - x_1^2} = \frac{1}{\rho} - 1, \tag{15}$$

$$\lim_{x_1 \to 1} \frac{1 - r_2(\rho)}{1 - r_1(z)} = \Delta(z, \bar{\alpha}) \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) = \omega(\rho). \tag{15'}$$

Заметим также, что при $|\alpha| < 1$ и $|z| < 1$

$$|r_1(z)| < 1 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant r_2(\rho) \leqslant 1 \qquad \left(\frac{1 - x_1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1 \right).$$

Из приведенных соотношений вытекает, что если $\varepsilon > 0$ — произвольно малое фиксированное число, то при $\varepsilon \leqslant \rho \leqslant 1$

$$\lim_{x_1 \to 1} \frac{[r_1(z)]^{\omega(\rho)} - r_2(\rho)}{1 - x_1^2} = 0 \tag{15''}$$

равномерно относительно ρ и, кроме того,

$$\lim_{x_1 \to 1} \frac{1 - r_2(\rho)}{1 - |r_1(z)|} = \frac{\Delta(z, \bar{z}) + \Delta(\alpha, \bar{\alpha})}{2} \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right). \tag{15'''}$$

Пусть $\lambda(d)=m>0$, $\varepsilon<d\leqslant 1$ и $\sup\lambda(\rho)=M$; тогда при $\varepsilon>\frac{1-x_1}{2}$ получаем оценки:

$$\int\limits_{\frac{1-x_1}{2}}^{\varepsilon}\lambda(\rho)\,r_2^n(\rho)\frac{d\rho}{(2\rho-1+x_1)\,[(2\rho-1)\,x_1+1]}<\frac{M}{4\,(1-x_1^2)}\int\limits_{\frac{1-x_1}{2}}^{\varepsilon}r_2^{n-1}(\rho)\,dr_2(\rho)=$$

$$=\frac{M}{4}\;\frac{r_2^n(\varepsilon)}{n\,(1-x_1^2)},\tag{16}$$

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\lambda(\rho)\,r_2^n(\rho)\frac{d\rho}{(2\rho-1+x_1)\,[(2\rho-1)\,x_1+1]}>\frac{m}{4\,(1-x_1^2)}\int\limits_{d}^{1}r_2^{n-1}(\rho)\,dr_2(\rho)=$$

$$=\frac{m}{4}\;\frac{1-r_2^n(d)^n}{n\,(1-x_1^2)}.\tag{16'}$$

Предположим, что z и α вещественны; тогда при $x_1\to 1$, в силу (15), будем иметь

$$\int\limits_{\varepsilon}^{1}\lambda(\rho)\,[r_1(z)]^{n\omega(\rho)}\frac{d\rho}{\rho^2}>\frac{m}{n\log\frac{1}{r_1(z)}}\Delta^{-1}(z,\bar\alpha)\int\limits_{d}^{1}d\,\{[r_1(z)]^{n\omega(\rho)}\}>$$

$$>\frac{m}{2}\;\frac{1-[r_1(z)]^{n\omega(d)}}{n\,(1-x_1^2)}.\tag{16''}$$

ЛЕММА 2. *При $|\alpha|<1$ в каждой замкнутой части круга $|z|<1$ имеем равномерно*

$$\lim_{x_1\to 1}\Phi(z,\bar\alpha,x_1)=4\Phi(z,\bar\alpha),\tag{17}$$

где $\Phi(z,\bar\alpha)$ определяется из соотношения (3).

Доказательство. Известно [1], что если $F(x)$ определена при $x>0$ и, начиная с достаточно большого x, монотонна, причем интеграл

$$\int\limits_0^{\infty}F(x)\,dx$$

существует, то

$$\lim_{h\to+0}h\sum_{n=1}^{\infty}F(n,h)=\int\limits_0^{\infty}F(x)\,dx.\tag{*}$$

Обозначим $r=e^{-h}$; тогда

$$I(k,m)=\lim_{r\to 1-0}(1-r)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k r^{np}}{(1-r^n)^m}=\int\limits_0^{\infty}\frac{x^k e^{-px}}{(1-e^{-x})^m}\,dx,\tag{18}$$

где $p>0$ — любое число, а $k\geqslant m\geqslant 0$.

Впоследствии через A_1, A_2, ... будем обозначать числа, не зависящие от ε, а через C_1, C_2, ... — числа, зависящие от ε.

Далее, обозначим

$$F_1(t) = \frac{e^{-t}}{\int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\, e^{-t\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2}}.$$

Легко проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ $F_1(t)$ монотонно убывает, начиная с некоторого t_0.

Положим $I(z) = I(\alpha) = 0$ и обозначим $r_1(z) = e^{-h}$ $(h > 0)$; тогда будем иметь

$$\Phi_1(x_1) = (1 - x_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[r_1(z)]^n}{\int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\, [r_1(z)]^{n\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2}} = (1 - x_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} F_1(nh)$$

и, согласно (*) и (15),

$$\lim_{x_1 \to 1} \Phi_1(x_1) = \lim_{x_1 \to 1} \frac{1 - x_1^2}{1 - r_1(z)} \cdot \lim_{h \to +0} h \sum_{n=1}^{\infty} F_1(nh) =$$

$$= \Delta(z, \bar{\alpha}) \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}\, dt}{\int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\, e^{-t\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2}} \tag{19}$$

Очевидно, что

$$\Phi(z, \bar{\alpha}, x_1) < (1 - x_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[r_1(z)]^n}{\int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\, [r_2(\rho)]^n \frac{d\rho}{(2\rho - 1 + x_1)\, [(2\rho - 1)\, x_1 + 1]}} = \Phi_2(x_1) \tag{19'}$$

и ввиду (16) и (16″),

$$|4\Phi_1(x_1) - \Phi_2(x_1)| \leqslant A_1 (1 - x_1^2)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 r^{\frac{n}{\omega(d)}}}{(1 - r^n)^2} \Big\{ (1 - x_1^2)\, C +$$

$$+ n (1 - x_1^2) \int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho) \frac{|\, [r_1(z)]^{\omega(\rho)} - r_2(\rho)\, |}{1 - x_1^2} \frac{d\rho}{\rho^2} \Big\},$$

где

$$r = \max\{[r_1(z)]^{\omega(d)},\ r_2(d)\},$$

и, в силу (15),

$$\lim_{x_1 \to 1} \frac{1 - x_1^2}{1 - r} = \frac{d}{1 - d}. \tag{20}$$

Из соотношений (20), (15″) и (18) получаем

$$\lim_{x_1 \to 1} \{4\Phi_1(x_1) - \Phi_2(x_1)\} = 0. \tag{21}$$

Далее, в силу (16),

$$\Phi(z, \bar{\alpha}, x_1) >$$

$$> (1-x_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[r_1(z)]^n}{\int_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\,[r_2(\rho)]^n \frac{d\rho}{(2\rho-1+x_1)\,[(2\rho-1)\,x_1+1]} + \frac{M}{4} \frac{[r_2(\varepsilon)]^n}{n(1-x_1^2)}} = \Phi_3(x_1) \quad (19'')$$

и если

$$\Phi_4(x_1) = (1-x_1^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[r_1(z)]^n}{\int_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\,[r_1(z)]^{n\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2} + M \frac{[r_1(z)]^{n\omega(\varepsilon)}}{n \log \frac{1}{r_1(z)}} \Delta^{-1}(z, \bar{\alpha})},$$

то получаем оценку

$$|4\Phi_4(x_1) - \Phi_3(x_1)| \leqslant A_2(1-x_1^2)^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 r^{\frac{n}{\omega(d)}}}{(1-r^n)^2} \Bigg\{ C_2(1-x_1^2) +$$

$$+ n(1-x_1^2) \int_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho) \frac{|[r_1(z)]^{\omega(\rho)} - r_2(\rho)|}{1-x_1^2} \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{M\Delta^{-1}(z, \bar{\alpha})}{4 \log \frac{1}{r_1(z)}} |[r_1(z)]^{\omega(\varepsilon)} - r_2(\varepsilon)| +$$

$$+ \frac{M}{4n} \left| \frac{\Delta^{-1}(z, \bar{\alpha})}{\log \frac{1}{r_1(z)}} - \frac{1}{1-x_1^2} \right| \Bigg\} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Как указывалось выше,

$$\lim_{x_1 \to 1} I_1 = \lim_{x_1 \to 1} I_2 = 0.$$

В силу (15) и (15″), имеем

$$\lim_{x_1 \to 1} \frac{[r_1(z)]^{\omega(\varepsilon)} - r_2(\varepsilon)}{1-x_1^2} = 0, \qquad \lim_{x_1 \to 1} \left| \frac{\Delta^{-1}(z, \bar{\alpha})}{\log \frac{1}{r_1(z)}} - \frac{1}{1-x_1^2} \right| = A_3,$$

а в силу (18) и (20), $\lim\limits_{x_1 \to 1} I_3 = 0$.

Пусть N — произвольное натуральное число; тогда, на основании (18),

$$\overline{\lim_{x_1 \to 1}}\, I_4 \leqslant \frac{A_4}{N} \int_{0}^{\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{x}{\omega(d)}}}{(1-e^{-x})^2}\, dx;$$

при $N \to \infty$ получаем $\lim\limits_{x_1 \to 1} I_4 = 0$.

Таким образом,

$$\lim_{x_1 \to 1} \{4\Phi_4(x_1) - \Phi_3(x_1)\} = 0. \qquad (22)$$

Легко показать, что для любого $\varepsilon > 0$ функция

$$F_2(t) = \frac{e^{-t}}{\int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\, e^{-t\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{M}{4} \Delta^{-1}(z, \bar{\alpha}) \frac{e^{-t\omega(\varepsilon)}}{t}}$$

монотонно убывает при $t \geqslant t_0$. Следовательно, обозначая

$$r_1(z) = e^{-h} \quad (h > 0),$$

получаем соотношение

$$\lim_{x_1 \to 1} \Phi_4(x_1) = \lim_{x_1 \to 1} \frac{1 - x_1^2}{1 - r_1(z)} \lim_{h \to +0} h \sum_{n=1}^{\infty} F_2(nh) =$$

$$= \Delta(z, \bar{\alpha}) \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{\int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\, e^{-t\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{M}{4\Delta} \frac{e^{-t\omega(\varepsilon)}}{t}} . \tag{23}$$

из неравенств (19′) и (19″) и равенств (19), (21), (22), (23) получаем

$$4\Delta \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{\int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\, e^{-t\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2} + \frac{M}{4\Delta} \frac{e^{-t\omega(\varepsilon)}}{t}} \leqslant \varliminf_{x_1 \to 1} \Phi \leqslant \varlimsup_{x_1 \to 1} \Phi \leqslant$$

$$\leqslant 4\Delta \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{\int\limits_{\varepsilon}^{1} \lambda(\rho)\, e^{-t\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2}} . \tag{24}$$

Замечая, что при $\varepsilon \to 0$ $\omega(\varepsilon) \to \infty$, мы из (24) предельным переходом при $\varepsilon \to 0$ получим

$$\lim_{x_1 \to 1} \Phi(z, \bar{\alpha}, x_1) = 4\Delta \cdot \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{\int\limits_0^{1} \lambda(\rho)\, e^{-t\omega(\rho)} \frac{d\rho}{\rho^2}} .$$

Отсюда простой заменой переменного t получаем (17). Таким образом, лемма доказана, если $I(z) = I(\alpha) = 0$. Пусть $|\alpha| < 1$ и $|z| < 1$; тогда, пользуясь соотношением (15‴), тем же способом получаем

$$\varlimsup_{x_1 \to 1} |\Phi(z, \bar{\alpha}, x_1)| \leqslant 4 \cdot \Delta^* \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-t}dt}{\int\limits_0^{1} \lambda(\rho)\, e^{-\Delta^* \left(\frac{1}{\rho} - 1\right) t} \frac{d\rho}{\rho^2}} ,$$

где

$$\Delta^* = \frac{\Delta(z, \bar{z}) + \Delta(\alpha, \bar{\alpha})}{2} .$$

Следовательно, при $x_1 \to 1$ функции $\Phi(z, \bar{\alpha}, x_1)$ составляют нормальное семейство в круге $|z| < 1$, $|\alpha| < 1$. Обобщая теорему Витали для функций двух переменных, отсюда получаем предельное соотношение (17) при $|\alpha| < 1$ и $|z| < 1$.

Из соотношения (17) следует также

$$f_0(z) = \lim_{x_1 \to 1} f_0(z, x_1) = \left(\frac{1-\alpha}{1-z}\right)^2 \frac{\Phi(z, \bar{\alpha})}{\Phi(\alpha, \bar{\alpha})}, \tag{25}$$

$$\mu_0 = \lim \mu_0(x_1) = \frac{\pi |1-\alpha|^4}{\Phi(\alpha, \bar{\alpha})}. \tag{25'}$$

Доказательство теоремы I. Надо показать, что функция $f_0(z)$, определяемая из (25), является решением поставленной экстремальной задачи. Покажем сначала, что $f_0(z) \subset A_\lambda$ в круге $|z| < 1$. Заметим, что в силу построения веса $h(z, x_1)$,

$$h(z, x_1) \geqslant h(z) \text{ при } |z| < 1.$$

Следовательно,

$$\iint_{|z|<1} h(z) |f_0(z, x_1)|^2 \, dx \, dy < \mu_0(x_1)$$

и так как предельное соотношение (25) выполняется равномерно в каждой замкнутой части круга $|z| < 1$, то, в силу (25′), имеем

$$\iint_{|z|<1} h(z) |f_0(z)|^2 \, dx \, dy \leqslant \mu_0. \tag{26}$$

Покажем теперь, что

$$\inf_{\{Q\}} \iint_{|z|<1} h(z) |f_0(z) - Q(z)|^2 \, dx \, dy = 0.$$

Действительно, так как при любом $x_1 < 1$ $f_0(z, x_1) \subset A_\lambda$, то, обозначая

$$C_n(x_1) = \iint_{|z|<1} h(z) f_0(z, x_1) \overline{p_n(z)} \, dx \, dy,$$

имеем равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n(x_1)|^2 = \iint_{|z|<1} h(z) |f_0(z, x_1)|^2 \, dx \, dy <$$

$$< \iint_{|z|<1} h(z, x_1) |f_0(z, x_1)|^2 \, dx \, dy = \mu_0(x_1).$$

В силу (25′), отсюда следует, что при $x_1 \to 1$

$$|C_n(x_1)| < 2\sqrt{\mu_0} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Хорошо известным диагональным процессом можно выбрать такую последовательность стремящихся к единице значений x_1, чтобы одновременно выполнялось:

$$\lim_{x_1 \to 1} C_n(x_1) = C_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

причем очевидно, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |C_n|^2 \leqslant \mu_0. \tag{27}$$

Но в каждой замкнутой части круга $|z| < 1$ имеем равномерно

$$f_0(z, x_1) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_1)\, p_n(z) \tag{28}$$

и, как будет показано ниже, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |p_n(z)|^2 \tag{27'}$$

равномерно сходится при $|z| \leqslant r < 1$.

По неравенству Шварца,

$$\Big| \sum_{n=k+1}^{\infty} C_n(x_1)\, p_n(z) |^2 \leqslant \mu_0(x_1) \sum_{n=k+1} |p_n(z)|^2. \tag{29}$$

Пользуясь соотношением (27) и сходимостью ряда (27') и совершив предельный переход в (28) при $x_1 \to 1$, получаем

$$f_0(z) = \sum_{n=0} C_n p_n(z), \tag{30}$$

причем, в силу (27), имеем также

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{|z|<1} h(z) \,|\, f_0(z) - \sum_{n=0}^{k} C_n p_n(z) |^2 \, dx\, dy = 0,$$

что доказывает принадлежность $f_0(z)$ к A_λ.

Пусть $f(z)$ — любая функция класса A_λ, $f(\alpha) = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{|z|<1} h(z) \,|\, f(z) - Q_n(z) |^2 \, dx\, dy = 0,$$

причем $Q_n(\alpha) = 1$; тогда, очевидно,

$$\iint_{|z|<1} h(z, x_1) \,|\, Q_n(z) |^2 \, dx\, dy > \mu_0(x_1).$$

Отсюда, по неравенству Минковского,

$$\Big(\iint_{|z|<1} h(z) \,|\, f(z) |^2 \, dx\, dy \Big)^{\frac{1}{2}} \geqslant - \Big(\iint_{|z|<1} h(z) \,|\, f(z) - Q_n(z) |^2 \, dx\, dy \Big)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \Big(\mu_0(x_1) + \iint_{|z|<1} [h(z) - h(z, x_1)] \,|\, Q_n(z) \,|\, dx\, dy \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Предельным переходом при $x_1 \to 1$ и $n \to \infty$ получаем

$$\iint_{|z|<1} h(z) \,|\, f(z) |^2 \, dx\, dy \geqslant \mu_0. \tag{31}$$

Из неравенств (26), (31) и из того, что $f_0(z) \subset A_\lambda$, следует

$$\mu_0 = \inf \mu(f) = \iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|f_0(z)|^2\,dx\,dy.$$

Единственность экстремальной функции $f_0(z)$ доказывается обычным способом.* Таким образом, теорема I доказана.

Доказательство теоремы II. Доказанная выше теорема I содержит хорошо известный факт [2], что среди всех функций, голоморфных в $|z|<r$ и удовлетворяющих условиям

$$\iint\limits_{|z|<r} |f(z)|^2\,dx\,dy < \infty, \quad f(\alpha)=1 \quad (|\alpha|<r), \tag{32}$$

минимум интеграла (32) реализует функция

$$f_0(z) = \left(\frac{r^2-|\alpha|^2}{r^2-\bar{\alpha}z}\right)^2, \tag{33}$$

причем

$$\iint\limits_{|z|<r} |f_0(z)|^2\,dx\,dy = \frac{\pi(r^2-|\alpha|^2)^2}{r^2}. \tag{33'}$$

Пусть

$$Q_n(z) = \left[\sum_{k=0}^{n} p_k(\alpha)\,p_k(z)\right] : \sum_{k=0}^{n} |p_k(\alpha)|^2;$$

тогда при $|\alpha|<r$ будем иметь

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} |p_k(\alpha)|^2} = \iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|Q_n(z)|^2\,dx\,dy > \iint\limits_{|z|<r} h(z)\,|Q_n(z)|^2\,dx\,dy >$$

$$> \lambda\left(\frac{1-r}{2}\right)\iint\limits_{|z|<r} |Q_n(z)|^2\,dx\,dy > \lambda\left(\frac{1-r}{2}\right)\frac{\pi(r^2-|\alpha|^2)^2}{r^2}.$$

Из этого неравенства следует, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |p_k\alpha)|^2$$

равномерно сходится в любой замкнутой части круга $|z|<1$. Следовательно, ряд

$$K(z,\bar{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{p_k(\alpha)}\,p_k(z)$$

равномерно и абсолютно сходится при $|z|<r<1$, $|\alpha|<r<1$ и пред-

---

* $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}(a^2+b^2)$; равенство имеет место только при $a=b$.

ставляет аналитическую функцию от z и $\overline{\alpha}$ в круге $|z|<1$. Очевидно, что функция

$$F_0(z)=\frac{K(z,\overline{\alpha})}{K(\alpha,\overline{\alpha})}$$

принадлежит к классу A_λ и

$$\iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|F_0(z)|^2\,dx\,dy=\frac{1}{K(\alpha,\overline{\alpha})}\geqslant\mu_0. \tag{34}$$

Покажем, что $F_0(z)=f_0(z)$. Действительно, пусть $f(z)\subset A_\lambda$ и $f(\alpha)=1$. Пусть, далее,

$$\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|f(z)-P_n(z)|^2\,dx\,dy=0,\quad P_n(\alpha)=1.$$

Тогда

$$\left(\iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|f(z)|^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|P_n(z)|^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}-$$

$$-\left(\iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|f(z)-P_n(z)|^2\,dx\,dy\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\sum_{k=0}^{n}|p_k(\alpha)|^2\right)^{-\frac{1}{2}}-\varepsilon(n),$$

где $\varepsilon(n)\longrightarrow 0$ при $n\longrightarrow\infty$. Отсюда при $n\longrightarrow\infty$ получаем

$$\mu(f)=\iint\limits_{|z|<1} h(z)\,|f(z)|^2\,dx\,dy\geqslant\frac{1}{K(\alpha,\overline{\alpha})}$$

и

$$\inf\mu(f)\geqslant\frac{1}{K(\alpha,\overline{\alpha})}. \tag{34'}$$

Из (34) и (34′) следует, что

$$\inf\mu(f)=\frac{\pi|1-\alpha|^4}{\Phi(\alpha,\overline{\alpha})}=\frac{1}{K(\alpha,\overline{\alpha})} \tag{35}$$

и

$$f_0(z)=\left(\frac{1-\alpha}{1-z}\right)^2\frac{\Phi(z,\overline{\alpha})}{\Phi(\alpha,\overline{\alpha})}=\frac{K(z,\overline{\alpha})}{K(\alpha,\overline{\alpha})}. \tag{35'}$$

Из (35) и (35′) следует утверждение теоремы II.

Доказательство теоремы III. Пусть $F(w)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$\iint\limits_{|w|<1} h(w)\,|F(w)|^2\,du\,dv<+\infty.$$

Составим числа

$$a_k=\iint\limits_{|w|<1} h(w)\,F(w)\,\overline{p_k(w)}\,du\,dv;$$

тогда, очевидно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \iint_{|w|<1} h(w)\,|F(w)|^2\,du\,dv,$$

причем равенство выполняется только для функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(z) = \iint_{|w|<1} h(w)\,K(z, \overline{w})\,du\,dv,$$

принадлежащей к классу A_λ, в силу сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|^2$. Имея в виду равенство

$$K(z, \overline{w}) = \frac{\Phi(z, \overline{w})}{\pi(1-z)^2(1-\overline{w})^2},$$

получаем доказательство теоремы III.

3. Приведем некоторые следствия из доказанных выше теорем.

I. Положив $h(z) \equiv 1$, т. е. $\lambda(\rho) \equiv 1$, находим $p(t) = te^t$,

$$\Phi(z, \overline{\alpha}) = \int_0^{\infty} te^{-t\cdot\frac{1-\overline{\alpha}z}{(1-\overline{\alpha})(1-z)}}\,dt = \frac{(1-\overline{\alpha})^2(1-z)^2}{(1-\overline{\alpha}z)^2}$$

и

$$f_0(z) = \left(\frac{1-|\alpha|^2}{1-\overline{\alpha}z}\right)^2, \qquad \mu_0 = \pi(1=|\alpha|^2) = \iint_{|z|<1} |f_0(z)|^2\,dx\,dy.$$

Такова функция, реализующая минимум интеграла

$$\mu(f) = \iint_{|z|<1} |f(z)|^2\,dx\,dy$$

в семействе A_1 функций, удовлетворяющих условию $f(\alpha) = 1$.

II. Положив

$$\lambda(\rho) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 < \rho < r < 1, \\ 1 \text{ при } r \leqslant \rho \leqslant 1, \end{cases}$$

мы для области луночки $D_0\,(|z-(1-r)| > r,\ |z| < 1)$ получаем

$$\Phi(z, \overline{\alpha}) = \int_0^{\infty} \frac{te^{-t\frac{1-\overline{\alpha}z}{(1-\overline{\alpha})(1-z)}}}{1-e^{-t\frac{1-r}{r}}}\,dt. \tag{36}$$

Экстремальная функция $f_0(z)$ совпадает с предельной функцией полиномов, реализующих минимум интеграла

$$\iint_{D_0} |P_n(z)|^2\,dx\,dy, \qquad P_n(\alpha) = 1$$

среди всех полиномов $P_n(z)$ степени n ([3]). Кроме того, голоморфность функции $f_0(z)$ в $|z| < 1$ показывает также, что система полиномов не

полна в D_0 в смысле средних квадратичных. Этот факт ранее был установлен А. Л. Шагиняном иным путем ([4]).

III. Положим

$$h(z)=\left|\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right|.$$

Легко видеть, что $h(z)$ принимает постоянные значения, равные

$$\lambda(\rho)=\exp\left(1-\frac{1}{\rho}\right)$$

на окружностях

$$|z-(1-\rho)|=\rho,\quad 0<\rho<1.$$

Имеем $p(t)=(1+t)e^t$,

$$\Phi(z,\bar{\alpha})=\int_0^\infty(1+t)e^{-t\frac{1-\alpha z}{(1-\bar{\alpha})(1-z)}}dt=\frac{(1-\bar{\alpha})(1-z)}{(1-\bar{\alpha}z)^2}(2-\bar{\alpha}-z),$$

откуда

$$f_0(z)=\left(\frac{1-|\alpha|^2}{1-\bar{\alpha}z}\right)^2\cdot\frac{1-\alpha}{1-z}\cdot\frac{2-(\bar{\alpha}+z)}{2-(\bar{\alpha}+\alpha)}. \qquad (37)$$

Отсюда, в частности, будет следовать доказанная М. В. Келдышем ([5]) теорема о том, что система полиномов не полна в смысле средних квадратичных при наличии веса $\left|\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right|$.

Ереванский гос. университет
им. В. М. Молотова

Поступило
20.VI.1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Полиа и Сеге, Задачи и теоремы анализа, т. 1, отд. II. гл. 1, задача 30.
[2] Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, М.—Л., 1945.
[3] Джрбашян М. М., О некоторых экстремальных проблемах в нежордановых областях, Доклады Ак. Наук Арм. ССР, т. 1, № 3 (1944), 5—12.
[4] Шагинян А. Л., Об аппроксимации полиномами в нежордановых областях, Доклады Ак. Наук СССР, т. XXXVII, № 4 (1940), 318—321.
[5] Келдыш М. В., О замкнутости ортогональных с весом систем полиномов, Доклады Ак. Наук СССР, т. XXX, № 9 (1941), 771—773.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 569—570

А. А. МАРКОВ

О ЗАВИСИМОСТИ АКСИОМЫ B6 ОТ ДРУГИХ АКСИОМ СИСТЕМЫ BERNAYS'а — GÖDEL'я

(*Представлено академиком* **В. И. Смирновым**)

Достигается упрощение системы аксиом Bernays'a—Gödel'я путем исключения из этой системы аксиомы B6.

В 1937 году P. Bernays(1) опубликовал некоторую систему аксиом теории множеств. Она была затем видоизменена K. Gödel'ем(2), положившим ее в основу своего доказательства совместимости обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств.

Мы установим здесь возможность небольшого упрощения системы $\sum$ Bernays'a — Gödel'я. А именно, мы покажем, что аксиома B6 * может быть исключена из системы $\sum$, так как она выводится из других аксиом этой системы.

В самом деле, пусть A — произвольный класс. Согласно B5, существует класс C такой, что

а $$(x, y)[<y\,x> \varepsilon C. \equiv . x \varepsilon A].$$

Согласно B8, существует класс D такой, что

б $$(x, y, z)[<x\,y\,z> \varepsilon D. \equiv . <x\,z\,y> \varepsilon C].$$

Согласно B4, существует класс B такой, что

в $$(x)[x \varepsilon B. \equiv . (\exists\, y)(<y\,x> \varepsilon D)].$$

Заметим теперь, что согласно $C1$, существует хотя бы одно множество, в силу чего

г $$(y)(<y\,x> \varepsilon C). \supset . (\exists\, y)(<y\,x> \varepsilon C).$$

Мы получаем

д $$(x, y)[x \varepsilon A. \supset . <y\,x> \varepsilon C] \quad [\text{а}]$$

е $$(x)[x \varepsilon A. \supset . (y)(<y\,x> \varepsilon C)] \quad [\text{д}]$$

ж $$(x)[x \varepsilon A. \supset . (\exists\, y)(<y\,x> \varepsilon C)] \quad [\text{е, г}]$$

з $$(x, y)[<y\,x> \varepsilon C. \supset . x \varepsilon A] \quad [\text{а}]$$

и $$(x)[(\exists\, y)(<y\,x> \varepsilon C). \supset . x \varepsilon A] \quad [\text{з}]$$

к $$(x)[(\exists\, y)(<y\,x> \varepsilon C). \equiv . x \varepsilon A]. \quad [\text{и, ж}]$$

---

* Мы придерживаемся обозначений Göd'я.

Принимая во внимание определение 1. 14 (см.[2]), получаем, наконец,

$$<x\ y> \varepsilon\ B. \equiv .\ (\exists\ z)(<z\ x\ y> \varepsilon\ D). \qquad [\text{в}]$$

$$\equiv .\ (\exists\ z)(<z\ y\ x> \varepsilon\ C). \qquad [\text{б}]$$

л $$\equiv .\ <y\ x> \varepsilon\ A \qquad [\text{к}]$$

м $$(x,\ y)[<x\ y> \varepsilon\ B. \equiv .\ <y\ x> \varepsilon\ A]. \qquad [\text{л}]$$

Таким образом, мы доказали, что

$$(A)(\exists\ B)(x,\ y)[<x\ y> \varepsilon\ B. \equiv .\ <y\ x> \varepsilon\ A], \qquad [\text{м}]$$

а это и есть аксиома B6.

Заметим, что использование аксиомы C1 в этом выводе не является существенным. В самом деле, эта аксиома нужна была нам лишь для того, чтобы утверждать существование хотя бы одного множества. Но при отсутствии множеств формула [м] имеет место тривиальным образом, и мы опять получаем B6.

Указанное здесь упрощение системы $\sum$ может оказаться полезным при ее исследовании.

ЛИТЕРАТУРА

1 P. Bernays, A system of axiomatic set-theory, Part I. J., Symb. Logic, 2 (1937), 65 – 77.

2 K. Gödel, The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory, Ann. of Math. Studies, 3 (1940); русск. перевод в Усп. Мат. наук, III : 1 (1948), 96—149.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 571—573

С. Н. БЕРНШТЕЙН

ПРИМЕЧАНИЕ К МОЕЙ РАБОТЕ «ПЕРЕНЕСЕНИЕ СВОЙСТВ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ НА ЦЕЛЫЕ ФУНКЦИИ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ»

(Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 12 (1948), 421—444)

При доказательстве леммы 2 (стр. 441) добавления (стр. 440 — 444) названной работы мною было использовано дополнительное допущение, которое не было указано в формулировке этой леммы. После требуемого дополнения рассматриваемая лемма гласит:

Если $G_p(x)$ *и* $G_q(x)$ — *целые функции, соответственно степени* p *и* q, *причем* $a = \varphi_1 - \varphi_0$ *есть угол между направлениями, где*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \log |G_p(re^{i\varphi_1})| = p, \quad \overline{\lim_{r\to\infty}} \log |G_q(re^{i\varphi_0})| = q, \tag{1}$$

то $G(x) = G_p(x)\, G_q(x)$ — *степени* h, где

$$h \geqslant \sqrt{p^2 + q^2 + 2pq\cos a} = |pe^{i\varphi_1} + qe^{i\varphi_0}|, \tag{2}$$

при дополнительном условии, что

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \log |G_p(re^{i(\varphi_1 - \psi)})|$$

существует в направлении $\varphi_1 - \psi$ *вектора* $pe^{i\varphi_1} + qe^{i\varphi_0}$.

Действительно, благодаря дополнительному условию, имеем в направлении $\varphi_1 - \psi = \varphi_0 + a - \psi$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \log |G(re^{i(\varphi_1-\psi)})| = \lim_{r\to\infty} r^{-1} \log |G_p(re^{i(\varphi_1-\psi)})| +$$
$$+ \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \log |G_q(re^{i(\varphi_1-\psi)})| \geqslant p\cos\psi + q\cos(a-\psi) =$$
$$= |pe^{i\varphi_1} - qe^{i\varphi_0}|.$$

Соответствующим условием нужно дополнить следствия 3 и 4 (добавления), первое из которых не понадобилось нигде в рассматриваемой работе, а последнее было использовано лишь в одном месте (§ 2, стр. 423) в частном случае, когда $G_p(x) = \cos px$. В этом случае дополнительное условие соблюдено, так что, в частности, справедливо утверждение (§ 2, стр. 423):

Если $G_q(x)$ — любая целая функция степени q, то степень h произведения $G(x) = \cos px\, G_q(x)$ удовлетворяет неравенству

$$h \geqslant \sqrt{p^2 + q^2}. \tag{2 bis}$$

В самом деле,

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \log |\cos p\, re^{i\varphi}| = p\,|\sin \varphi|, \text{ если } \sin\varphi \gtrless 0,$$

но, каково бы ни было φ_0, по крайней мере один из двух углов $a = \left|\varphi_0 \pm \frac{\pi}{2}\right| \leqslant \frac{\pi}{2}$, и мнимая часть соответствующего вектора $pe^{\pm i\frac{\pi}{2}} + qe^{i\varphi_0}$ отлична от нуля. Поэтому, применяя (2), где $\cos a \geqslant 0$, получаем (2 bis).

Отметим, вообще, что для существования предела

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \log |G_p(re^{i\varphi})| = p\,|\sin\varphi|, \text{ если } \sin\varphi \gtrless 0, \tag{3}$$

который обеспечивает применимость неравенства (2 bis) к произведению $G(x) = G_p(x)\, G_q(x)$, *достаточно, чтобы корни a_m (вещественной) функции $G_p(x) \in \mathfrak{B}$ удовлетворяли неравенствам*

$$\left|a_m - \frac{m\pi}{p}\right| < c \quad (-\infty < m < \infty), \tag{4}$$

где c — произвольно данная постоянная.

В случае, когда $G_q(x)$ также принадлежит классу $\mathfrak{B}$ (или по крайней мере $\overline{\lim\limits_{y\to\infty}}\, y^{-1} \log |G_q(iy)| = q$, т. е. $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$), равенство $h = p + q$ (следствие 3) имеет место при менее ограничительном, чем (3), условии

$$\lim_{y\to\infty} y^{-1} \log |G_p(iy)| = p.$$

Для этого достаточно, чтобы корни a_m (вещественной) функции $G_p(x) \in \mathfrak{B}$) удовлетворяли условиям

$$\lim_{m=\pm\infty} \frac{a_m}{m} = A, \quad |a_m + a_{-m}| < c$$

$\left(\text{в таком случае } A = \frac{\pi}{p} \text{ на основании следствия 7 добавления}\right)$, которые значительно шире, чем (4). Действительно,

$$G_p(z) = G_p(0)\left(1 - \frac{z}{a_0}\right) \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2 - z(a_m + a_{-m})}{a_m \cdot a_{-m}}\right)$$

(полагая, для определенности, $a_0 \gtrless 0$); в таком случае, при всяком $\varepsilon > 0$ мы можем зафиксировать $b > 0$ и $m_0 > 0$ так, что при всех $y > b$, $m > m_0$ множители $G_p(iy)$ удовлетворят неравенствам

$$1 + \frac{y^2p^2(1-\varepsilon)^2}{m^2\pi^2} < \left|1 + \frac{y^2 + iy(a_m + a_{-m})}{-a_m \cdot a_{-m}}\right| < 1 + \frac{y^2p^2(1+\varepsilon)^2}{m^2\pi^2},$$

крайние части которых соответствуют множителям бесконечного произведения $\sin(1 \pm \varepsilon)\, ipy$. Аналогичным образом, чтобы убедиться, что из условий (4) вытекает условие (3), нужно заметить, что $G_p(z + x_0)$ удовлетворяет тем же условиям (4) при всяком $x_0\,(-\infty < x_0 < \infty)$,

а потому, применяя предыдущее рассуждение и учитывая, что $G_p(x) \in \mathfrak{B}$, мы можем заключить, что при любом $\varepsilon > 0$

$$e^{py-\varepsilon r} < G_p(x_0 \pm iy)| < e^{py+\varepsilon r} \quad (-\infty < x_0 < \infty,\ r^2 = x_0^2 + y^2),$$

если $y > b$ достаточно велик.

Отмечу в заключение неравенство

$$\varliminf_{n=\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{n!}\right|} \geqslant \frac{\pi}{2p}, \tag{5}$$

усиливающее для функций $G_p(x) \in (\mathfrak{B})$ неравенство

$$\varlimsup_{n=\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right| \geqslant \frac{\pi}{2p},$$

которое составляет содержание леммы 3 (стр. 441) добавления, и подобно последнему, может быть получено при помощи формулы Иенсена. Из (5) следует также, что

$$\varliminf_{n=\infty} \left|\frac{a_n}{n}\right| \geqslant \frac{\pi}{2ep}.$$

Поступило
3.IX.1948

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 12

DATE DUE
